『労働搾取の厚生理論序説』についての幾つかの補論[1]

吉原直毅
一橋大学経済研究所

2009 年 3 月 4 日; 改訂 2009 年 8 月 21 日

要旨: 本稿ではマルクス派労働搾取理論に関する補論を主に 3 点に渡って、展開する。第一に、マルクス的一般均衡モデルの均衡概念として、従来提示されてきたフォン・ノイマン的均斉成長解と再生産可能解について検討する。第二に、「マルクスの基本定理」についての幾何的証明を提示する。第三に、「一般化された商品搾取定理」を、拡大投入行列が分解可能なケースに拡張する。

Keywords: 再生産可能解; マルクスの基本定理; 一般化された商品搾取定理

1. イントロダクション

以下では第 1 に、マルクス的一般均衡解として提示されてきた 2 つの均衡概念であるフォン・ノイマン的均斉成長解[von Neumann (1945)]と再生産可能解[Roemer (1981)]について検討する。フォン・ノイマン的均斉成長解も再生産可能解も、完全競争市場における動学的な資源配分問題の均衡解として提案されたものであり、異時点間競争均衡配分経路上の一時点的な資源配分の条件を描写したものと位置づけられてきた。均斉成長解はそのような一時点的資源配分の中で、特に定常均衡経路上にあるそれを描写しているものと解釈されるのに対し、再生産可能解は各期の資源配分が通常のワルラス的競争均衡解の条件を満たし、かつ、毎期の生産活動は、期首において賦存する総資本ストックを少なくとも単純再生産するような性質を持つ、そのような異時点間競争均衡配分経路上の一時点的な資源配分として解釈される。標準的な理解では、均斉成長解は再生産可能解の定常状態として解釈され、それ故に均斉成長解は完全競争市場における長期均衡解として位置づけ可能と考えられよう。しかしながら、再生産可能解の定常状態は確かに均斉成長解となるものの、資本家の利潤最大化行動を媒介とする市場の競争メカニズムの帰結として、均斉成長解を解釈する事は一般的には困難である事を、2 節において議論する。

第 2 に、所謂「マルクスの基本定理」(Okishio (1963), Morishima (1973))について、2 財・2 生産部門のレオンチェフ経済モデルに限定して、その幾何的証明を 3 節において与える。そのような証明は、通常の一般的な n 財 n 生産部門のレオンチェフ経済モデルで証明する場合に適用される、ホーキンス=サイモン定理やペロン=フロベニウス定理などの線形代数の素養を前提しなくとも、これらの定理のエッセンスが理解可能であるという意味で、ペダゴジカル・ノートとしての意義があろう。2 財・2 部門のレオンチェフ経済モデルでの「マルクスの基本定理」の証明は、従来、置塩(1976)等、代数的手法に基づいていた。他方、

[1] 本改訂稿に関して、松尾匡氏(立命館大学)より懇親なコメントを戴いた。また、本初稿を報告した一橋大学経済研究所定例研究会において、須賀晃一氏(早稲田大学)より懇親なコメントを戴いた。また、本稿 3 章に関して、松尾匡氏及び西田明彦氏より、有益な議論の機会を得た。ここに感謝したい。

本稿では幾何的アプローチを取る事によって、定理の成立する状態での経済的資源配分に関する直観が得られやすくなる。同様の試みは、すでに吉原(2006)及び吉原(2008)においても行われているが、これらの証明は、各生産部門における操業水準 1 単位をどのように定めるかの明示的な議論が無かった点で、不明瞭さの余地を残していた。[2] 本稿では、均衡における生産部門間での単位操業当たり売上収入が同一となる様に、各々の操業水準 1 単位の決定を明示的に解いた上で、その図を用いた定理の証明を行う。

第 3 に、4 節として、所謂「一般化された商品搾取定理」[Bowles & Gintis (1981); Roemer (1982); Samuelson (1982)]の拡張定理について論ずる。すなわちこの定理は、レオンチェフ経済モデルの想定の下、拡大投入行列の分解不可能性の仮定の下に導かれるが、この仮定を外す場合、必ずしも全ての商品に関して、その財の搾取が正の利潤と同値となる「搾取定理」が成立するとは限らない事、しかしながら依然として「商品搾取定理」が成立する労働力以外の商品は少なくとも 1 つは常に存在する故に、この定理の経済学的含意の頑健性は維持される事が論じられる。

2. 均衡解の選択について

今、市場を通じた取引が普遍化している経済社会にはn種類の財が存在している。この社会は 2 つの人々のグループN及びOから構成される。グループNは資本家階級に属する人々からなる集合であって、任意の資本家$\nu \in N$は、財の初期賦存ベクトル$\boldsymbol{\omega}^{\nu} \in \mathbf{R}_{+}^{n}$を**私的所有**している。他方、グループ$O$は労働者階級に属する人々からなる集合であって、$O$に属する全ての労働者の$n$種類の財の初期賦存は$\mathbf{0} \in \mathbf{R}_{+}^{n}$であって、無所有である。彼らは単に 1 労働日に 1 単位の労働を提供する能力(**労働力**)を有しているだけであり、その能力の格差は存在しない。また、彼らの提供する労働は同質である。社会全体での財の初期賦存量は$\boldsymbol{\omega} \equiv \sum_{\nu \in N} \boldsymbol{\omega}^{\nu}$である。

この経済社会における生産技術を、生産可能性集合$P \subseteq \mathbf{R}_{-} \times \mathbf{R}_{-}^{n} \times \mathbf{R}_{+}^{n}$で定義する。集合$P$の一般的要素は$2n+1$次元ベクトル$\boldsymbol{\alpha} \equiv \left(-\alpha_0, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}\right) \in P$であって、$\alpha_0 \in \mathbf{R}_{+}$は生産計画$\boldsymbol{\alpha}$の下での直接労働投入量を、$\underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{R}_{+}^{n}$はその計画下での非負の財の投入ベクトルを、$\overline{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{R}_{+}^{n}$はその結果としての財の産出ベクトルを、表す。$\hat{\boldsymbol{\alpha}} \equiv \overline{\boldsymbol{\alpha}} - \underline{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{R}^{n}$で、生産計画$\boldsymbol{\alpha}$の遂行によって得られる純産出ベクトルを表す。生産可能性集合Pは、$\mathbf{R}_{-} \times \mathbf{R}_{-}^{n} \times \mathbf{R}_{+}^{n}$における**閉凸錘(closed convex-cone)集合**であり、$\mathbf{0} \in P$を満たすと仮定。さらに以下の仮定を課す:[3]

A1. $\forall \boldsymbol{\alpha} = \left(-\alpha_0, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}\right) \in P \quad s.t. \quad \alpha_0 \geq 0 \ \ \& \ \ \underline{\boldsymbol{\alpha}} \geq \mathbf{0}$, $[\overline{\boldsymbol{\alpha}} > \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_0 > 0]$;

---

[2] 財の生産単位の決定問題の重要性については、松尾匡氏より与えられた示唆に基づく。

[3] 以下では、全てのベクトル$\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$及び$\mathbf{y} = \left(y_1, \ldots, y_p\right) \in \mathbf{R}^{p}$に関して、

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \geq y_i \quad (\forall i = 1, \ldots, p); \quad \mathbf{x} > \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{y} \ \ \& \ \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}; \quad \mathbf{x} \gg \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i \quad (\forall i = 1, \ldots, p).$$

また、$\neg(\cdot)$で、$(\cdot)$の記述の否定を表すものとする。例えば、$\neg\left(\mathbf{x} \geq \mathbf{y}\right)$ならば、$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ではない事を意味する。すなわち、$\exists i = 1, \ldots, p : x_i < y_i$を意味するものとする。

A2. $\forall \mathbf{c} \in \mathbf{R}_+^n$, $\exists \boldsymbol{\alpha} = (-\alpha_0, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}) \in P$ $s.t.$ $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \geq \mathbf{c}$；

A3. $\forall \boldsymbol{\alpha} = (-\alpha_0, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}) \in P$, $\forall (-\underline{\boldsymbol{\alpha}}', \overline{\boldsymbol{\alpha}}') \in \mathbf{R}_-^n \times \mathbf{R}_+^n$, $\left[(-\underline{\boldsymbol{\alpha}}', \overline{\boldsymbol{\alpha}}') \leq (-\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}) \Rightarrow (-\alpha_0, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}', \overline{\boldsymbol{\alpha}}') \in P\right]$.

上記３つの追加的仮定のうち、A1.は、**生産活動における労働投入の不可欠性**の仮定である。A2. は、いわゆる**純生産可能性条件**と言われる条件の一般的記述である。A3. は、いわゆる自由可処分性(free disposal)の仮定を意味する。

また、労働者の**生存消費ベクトル**(subsistent consumption vector)を導入する。全ての労働者は１労働日に１単位の労働を提供する事の対価として、少なくとも $\mathbf{b} \in \mathbf{R}_+^n$ の消費財ベクトルを購入可能なだけの賃金収入を必要とする。$\mathbf{b} \in \mathbf{R}_+^n$ の消費財ベクトルを購入不可能な水準の賃金収入の場合、労働者達は翌日行使する為の労働力を再生産する事が出来なくなる故、労働市場から撤退すると考えられる。また、余暇への選好は存在しない。財の私的所有状態を $(\boldsymbol{\omega}^\nu)_{\nu \in N}$ で表す。以上より、**一つの資本主義経済(a capitalist economy)** をリスト $\left\langle N, O; (P, \mathbf{b}); (\boldsymbol{\omega}^\nu)_{\nu \in N} \right\rangle$ で表す。尚、$P(\alpha_0 = 1) \equiv \left\{\boldsymbol{\alpha} \in P \middle| \boldsymbol{\alpha} = (-1, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}})\right\}$ という記号を以下、適時、使用する。また、**労働投入量１単位の下で純生産可能な財ベクトル集合**を、

$$\hat{P}(\alpha_0 = 1) \equiv \left\{\hat{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbf{R}^n \middle| \exists \boldsymbol{\alpha} = (-1, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}) \in P : \overline{\boldsymbol{\alpha}} - \underline{\boldsymbol{\alpha}} \geq \hat{\boldsymbol{\alpha}}\right\}$$

とする。また、任意の集合 X に関して、$\partial X \equiv \left\{\mathbf{x} \in X \middle| \neg(\exists \mathbf{x}' \in X) : \mathbf{x}' \gg \mathbf{x}\right\}$ と表す。

資本主義経済 $\left\langle N, O; (P, \mathbf{b}); (\boldsymbol{\omega}^\nu)_{\nu \in N} \right\rangle$ の下で、財市場における完全競争市場を仮定し、各経済主体は市場価格体系 $(\mathbf{p}, w) \in \mathbf{R}_+^{n+1}$ を所与として、合理的経済活動を選択するとしよう。但し、$\mathbf{p}$ は $1 \times n$ 型価格ベクトルであって、その各成分 $p_j \geq 0$ は財 j の**市場価格**を表す。また、$w \geq 0$ は**名目賃金率**を表す。

第１に、労働者は価格体系が $w \geq \mathbf{pb}$ を満たす限り、資本家に雇用されて１日１単位労働を提供する事を望む。逆に $w < \mathbf{pb}$ ならば、いずれの労働者も労働市場から撤退する。つまり、もはや１日１単位労働を提供しようとは考えない。このモデルでは単純化のため、労働者の消費選択の多様性は存在しないものと仮定する。すなわち、全ての労働者は予算制約 $w = q\mathbf{pb}$ を満たす消費財ベクトル $q\mathbf{b}$ （但し $q \geq 1$)を消費選択すると仮定する。

第２に、任意の資本家 $\nu \in N$ は、価格体系の下で、予算制約下の利潤最大化生産計画を設定する：すなわち、所与の市場価格体系 $(\mathbf{p}, w) \in \mathbf{R}_+^{n+1}$ の下、以下の様な**予算制約下の利潤最大化問題(P1)**

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}^{\nu}=\left(-\alpha_0^{\nu},-\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu}\right)\in P} \quad \mathbf{p}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu}-\left(\mathbf{p}\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu}+w\alpha_0^{\nu}\right) \tag{P1}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{p}\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu}\le\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}^{\nu} \ (\textit{resp.}\ \mathbf{p}\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu}+w\alpha_0^{\nu}\le\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}^{\nu}),$$ [4]

の解となるような生産計画$\boldsymbol{\alpha}^{\nu}=\left(-\alpha_0^{\nu},-\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\nu}\right)\in P$を選択する。価格体系$(\mathbf{p},w)$の下での問題(P1)の解の集合を、$A^{\nu}(\mathbf{p},w)$で表す。このモデルでは単純化のため、資本家は問題(P1)を解く結果として獲得した利潤収入は全て来期の生産活動のための資本財ストックの蓄積資金に費やされるものと仮定する。すなわち、資本家の消費選択問題は捨象する。

以下では財の市場価格ベクトルは全て、$\mathbf{pb}=1$となるように**基準化**する。以上の設定の下、この経済における均衡解の１つは以下のように定義される:

定義 1. [Roemer (1981)]: *任意の資本主義経済*$\left\langle N,O;(P,\mathbf{b});\left(\boldsymbol{\omega}^{\nu}\right)_{\nu\in N}\right\rangle$*に対して、あるペア*$\left((\mathbf{p},w),\boldsymbol{\alpha}\right)\in\mathbf{R}_{+}^{n+1}\times P$*が一つの**再生産可能解 (a reproducible solution) (RS)**と呼ばれるのは、それが以下の条件を満たすとき、そのときのみである:*

(a) $\forall\nu\in N$, $\boldsymbol{\alpha}^{\nu}\in A^{\nu}(\mathbf{p},w)$, 但し$\boldsymbol{\alpha}\equiv\sum_{\nu\in N}\boldsymbol{\alpha}^{\nu}$ (利潤最大化条件);

(b) $\hat{\boldsymbol{\alpha}}\ge\alpha_0\mathbf{b}$, 但し$\boldsymbol{\alpha}=\left(-\alpha_0,-\underline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in P$ & $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\overline{\boldsymbol{\alpha}}-\underline{\boldsymbol{\alpha}}$ (再生産可能条件);

(c) $w=\mathbf{pb}$ (生存賃金均衡条件); &

(d) $\underline{\boldsymbol{\alpha}}\le\boldsymbol{\omega}$ (resp. $\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b}\le\boldsymbol{\omega}$) (社会的実行可能性条件).

定義 2.1.の 4 つの条件のうち、(a)は再生産可能解での市場価格体系の下で、全ての資本家は彼らの所有する資本財の貨幣価値額によって規定された予算制約内で利潤最大化生産計画を遂行している事を意味する。条件(d)は、社会総体として賦存する総資本財賦存量$\boldsymbol{\omega}$の範囲内で生産活動を行っている事を意味する。これはこの経済モデルに暗黙裡に時間的構造を導入している事を意味している。[5]　ここでは基本的に賃金後払い制度に対応した総資本制約条件を基本としているが、(*resp.*)内のもう１つの不等式は賃金前払い制度に対応した総資本制約条件を表している。条件(c)は労働市場における均衡条件を表している。$w=\mathbf{pb}$とは、再生産可能解においては、労働者の賃金率は、１単位の１日労働力の行使に際して必要な生存消費ベクトル$\mathbf{b}$の購入に要する最少額として、決まる事を意味する。これは、当該資

[4] ここでの問題(P1)は賃金後払い制度を仮定しているが、この制約条件の(resp.)内の不等式は、賃金前払い制度の場合の、資本制約式を意味する。

[5] この意味についての詳細な説明は、吉原(2008)の 2 章 2.1 節を参照の事。

本主義社会において、いわゆる**マルクスの相対的過剰人口**が存在する事を前提している。[6] 最後に条件(b)は、消費財の需給条件を表している、と解釈可能であろう。条件(b)のもう一つの説得力ある解釈としては、それは、今生産期間の期首に社会に賦存した資本財ストック量$\boldsymbol{\omega}$を今生産期間の期末において再現可能である為の条件を表しており、来期の生産においても再び最低限$\boldsymbol{\omega}$の量だけの総資本財ストックを投下して生産可能である(少なくともいわゆる単純再生産可能である)事を要請するものである。[7]

資本主義経済$\left\langle N,O;\left(P_{(A,B,L)},\mathbf{b}\right);\left(\boldsymbol{\omega}^{\nu}\right)_{\nu\in N}\right\rangle$の下での、もう 1 つの代替的均衡概念は**均斉成長解**(balanced growth solution)と呼ばれるもので、以下のように定義される：

定義 2. [von Neumann (1945)]: *任意の資本主義経済*$\left\langle N,O;\left(P_{(A,B,L)},\mathbf{b}\right);\left(\boldsymbol{\omega}^{\nu}\right)_{\nu\in N}\right\rangle$*に対して、あるペア*$\left((\mathbf{p},w),\boldsymbol{\alpha}^{*}\right)\in\mathbf{R}_{+}^{n+1}\times P$*が一つの**均斉成長解(balanced growth solution)（BGS)**と呼ばれるのは、ある実数*$\pi>-1$*が存在して、それが以下の条件を満たすとき、そのときのみである:*

(a) $\forall\left(-\alpha_{0},-\underline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in P$, $\mathbf{p}\overline{\boldsymbol{\alpha}}\leq(1+\pi)\left[\mathbf{p}\underline{\boldsymbol{\alpha}}+w\alpha_{0}\right]$;

(b) $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\geq(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_{0}^{*}\mathbf{b}\right)$;

(c) $w=\mathbf{pb}$ (生存賃金均衡条件);

(d) $\mathbf{p}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}=(1+\pi)\left(\mathbf{p}\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+w\alpha_{0}^{*}\right)$; &

(e) $\mathbf{p}\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}>0$.

ここで、(a)式は、価格-費用不等式を表しており、競争によって均等利潤率$\boldsymbol{\pi}$を超える利潤は消滅する事を含意する。(b)は、財の資本財としての消費であれ個人的消費であれ、今期の消費量は前期に生産された粗産出量を上回れない事を意味する。(d)は収益性のルールを表明しており、すなわち、均等利潤率を実現できないプロセスは操業されない事を含意している。同時に、自由財のルール、すなわち、過剰生産の生じる財の価格はゼロになる事を含意する。(e)は総産出の価値は正であることを示す。

上記 2 つの均衡解のうち、再生産可能解はいわゆるワルラシアン競争均衡解のリファインメントとして解釈できる[8]ので、それを市場の競争メカニズムの帰結として理解する事に困難は無い。他方、均斉成長解において、それが市場の競争メカニズムの帰結を表

[6] この意味についての詳細な説明は、吉原(2008)の 2 章 2.1 節を参照の事。
[7] この意味についての詳細な説明は、吉原(2008)の 2 章 2.1 節を参照の事。
[8] ワルラシアン競争均衡解は、定義 1 の条件(a)(利潤最大化)、条件(c)(労働市場均衡)、及びいわゆる総超過需要条件によって定義される。総超過需要条件は、定義 1 の条件(b)と条件(d)の 2 つの不等式それぞれの左辺同士と右辺同士の和を採る事で得られる。従って、再生産可能解であれば必ず総超過需要条件を満たす故にワルラシアン競争均衡解となる。

すと解釈されてきたのは、均等利潤率πの成立[9]ゆえであった。すなわち、資本の部門間移動が可能な長期における市場の競争均衡では、これ以上の資本移動の起こらない安定状態として、均等利潤率が成立すると解釈されてきた。しかし、Nikaido (1983)が論証したように、資本がより収益性の高い生産部門に移動する市場経済モデルにおける動学的安定状態は必ずしも均等利潤率を成立させない。したがって、均等利潤率という条件だけでは、均斉成長解を市場の競争メカニズムの帰結として解釈する事は難しい。

だが、均斉成長解が市場競争の圧力の下で個々の資本家が利潤最大化行動を取らざるを得ない下で成立する均衡となるのであれば、この性質を均衡の条件式として導入する事の正当化は可能だろう。果たしてそのような性質を一般的に導出できるであろうか？答えは否である。なぜならば、再生産可能解は、総資本賦存ベクトルの位置に依存して、その下での再生産可能な利潤最大化解として決定されるのに対して、均斉成長解は総資本賦存ベクトルとは全く独立に決定される。それ故に、そもそも既存の総資本賦存ベクトルの下では、均斉成長解は定義 1-(d)を満たさないという意味で、実行不可能という状況が生じ得る。その場合、均斉成長解は市場の競争メカニズムの帰結には決してならない。しかしながら、以下では、所与の総資本賦存ベクトルの下で均斉成長解が実行可能(すなわち定義 1-(d)を満たす)である場合でも、一般的に、均斉成長解が資本家間の競争メカニズムの解としては支持されない事を示す。[10] 具体的には、第 1 に、ある特殊な総資本賦存ベクトルの配置の下では、均斉成長解が再生産可能解として支持され得る事を示す。[11] 第 2 に、所与の総資本賦存ベクトルの下で、均斉成長解が定義 1-(d)を満たすとしても、その様な均斉成長解が利潤最大化行動を媒介に成立する均衡解ではない例を示す。その準備として、

$\tilde{P} \equiv \left\{ \left(\underline{\boldsymbol{\alpha}} + \alpha_0 \mathbf{b}, \overline{\boldsymbol{\alpha}} \right) \in \mathbf{R}_+^{2n} \middle| \left(-\alpha_0, -\underline{\boldsymbol{\alpha}}, \overline{\boldsymbol{\alpha}} \right) \in P \right\}$とする。

レンマ 1 (Karlin (1959; pp.338~340)): *任意の資本主義経済*$\left\langle N, O; (P, \mathbf{b}); \left(\boldsymbol{\omega}^\nu \right)_{\nu \in N} \right\rangle$*に対して、*

(i). $\exists \left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^* + \alpha_0^* \mathbf{b}, \overline{\boldsymbol{\alpha}}^* \right) \in \tilde{P}$, $\exists \pi > -1$, s. t. $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^* = (1+\pi) \left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^* + \alpha_0^* \mathbf{b} \right)$;

(ii). $\exists \mathbf{p} \in \mathbf{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ s. t. $\forall \left(\underline{\boldsymbol{\alpha}} + \alpha_0 \mathbf{b}, \overline{\boldsymbol{\alpha}} \right) \in \tilde{P}$, $\mathbf{p}\overline{\boldsymbol{\alpha}} \leq (1+\pi) \mathbf{p} \left(\underline{\boldsymbol{\alpha}} + \alpha_0 \mathbf{b} \right)$.

証明: (i)について。集合Pの閉凸錘の仮定より、$\tilde{P}$も閉凸錘である。以下の集合を定義する:

$$B\tilde{P} \equiv \left\{ \left(\underline{\boldsymbol{\alpha}} + \alpha_0 \mathbf{b}, \overline{\boldsymbol{\alpha}} \right) \in \tilde{P} \middle| \exists g > -1 : \overline{\boldsymbol{\alpha}} = (1+g) \left(\underline{\boldsymbol{\alpha}} + \alpha_0 \mathbf{b} \right) \right\}.$$

---

9 例えば、Morishima (1960), p. 132 を参照の事。

10 同様の動機に基づく両均衡概念の比較分析として、すでに吉原(2008)の 2 章 5 節定理 2.5 があり、そこでは効率的再生産可能解の一般的存在と、全ての均斉成長解が効率性基準を満たさない数値例を示している。これは「市場均衡の効率性」という厚生経済学の基本定理の観点から、再生産可能解を支持する議論である。

11 本節の以下の議論では、賃金前払い制の下での再生産可能解を考える。

ここで A2.より、$\overline{\boldsymbol{\alpha}}-\underline{\boldsymbol{\alpha}}\gg\mathbf{0}$ となる $\left(-\alpha_0,-\underline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in P$ が存在するので、A3.より $B\tilde{P}$ は非空である。以下、この集合の中で g を最大化させる要素の存在を証明する。第一に、

$$N\tilde{P}\equiv\left\{\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in\tilde{P}\,\middle|\,\exists\left(-\alpha_0,-\underline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in P:\sum\nolimits_{i=1}^{n}\overline{\alpha}_i=1\right\}$$

を定義し、関数 $F:N\tilde{P}\to\mathbf{R}_+$ を

$$\forall\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in N\tilde{P},\ F\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\equiv\min_{i=1,\ldots,n}\tfrac{\overline{\alpha}_i}{\underline{\alpha}_i+\alpha_0 b_i}$$

と定義する。明らかにこの関数は連続である。今、この関数の値は上に有界でない、つまり、$\sup F\left(N\tilde{P}\right)=+\infty$ と仮定。すると、$\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}+\alpha_0^{\lambda}\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}\right)\in N\tilde{P}$ かつ $\lim_{\lambda\to+\infty}F\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}+\alpha_0^{\lambda}\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}\right)=+\infty$ となる収束列 $\left\{\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}+\alpha_0^{\lambda}\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}\right)\right\}$ が存在する。このとき、全ての財 i において、ある正の産出 $\overline{\alpha}_i$ が存在して、$\left(0,\overline{\alpha}_i\right)_{i=1,\ldots,n}=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}+\alpha_0^{\lambda}\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\lambda}\right)$ となる。ここで $\left(0,\overline{\alpha}_i\right)_{i=1,\ldots,n}\in N\tilde{P}$ となる事が、$N\tilde{P}$ が閉集合である事より従うが、これは A1.に矛盾。以上より $\sup F\left(N\tilde{P}\right)<+\infty$。この性質、$N\tilde{P}$ が閉集合である事、関数の連続性より、関数 F の最大値が存在する。このとき

$$\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_0^{*}\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\right)=\arg\max_{\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in N\tilde{P}}F\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)$$

を取り、$\pi\equiv F\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_0^{*}\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\right)-1$ とする。A2.より、$\pi>-1$ であり、さらに $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\geq(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_0^{*}\mathbf{b}\right)$ が、一般には成立する。しかし A3.より、一般性を失う事無く、$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}=(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_0^{*}\mathbf{b}\right)$ であると見做して良い。このとき、$\tilde{P}$ の凸錐性より、$B\tilde{P}$ 内で π よりも大きい成長率 g を実現する生産計画は存在しない。

(ii)について。(i)の証明で定めた π を用いて、以下のような集合を定義する:

$$\tilde{P}(\pi)\equiv\left\{\overline{\boldsymbol{\alpha}}-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b}\right)\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in\tilde{P}\right\}.$$

ここで $\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_0^{*}\mathbf{b}\right)\in\partial\tilde{P}(\pi)$ である事を示す。仮にそうでないとすると、ある適当な $\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}'+\alpha_0'\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}'\right)\in\tilde{P}$ が存在して、$\overline{\boldsymbol{\alpha}}'-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}'+\alpha_0'\mathbf{b}\right)\gg\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_0^{*}\mathbf{b}\right)$ となる。このとき、A3.より、各財 i ごとに、適当な $\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}+\alpha_0^{(i)}\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}\right)\in\tilde{P}$ が存在して、

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{(i)}+\alpha_0^{(i)}\mathbf{b}\right)>\overline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{*}+\alpha_0^{*}\mathbf{b}\right)$$

が成立する(但し、この不等式上での厳密な不等号関係は第i成分に関してのみ成立)。そのような各財iごとのベクトル、計n個の適当な凸結合によって、ベクトル$\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}''+\alpha_0''\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}''\right)\in\tilde{P}$を作ると、そのとき、

$$\exists\pi''>\pi\text{, s.t. }\overline{\boldsymbol{\alpha}}''=\left(1+\pi''\right)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}''+\alpha_0''\mathbf{b}\right).$$

これはπの定義に矛盾。よって、$\overline{\boldsymbol{\alpha}}^*-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b}\right)\in\partial\tilde{P}(\pi)$である。以上より、凸集合に関する支持超平面定理より、

$$\exists\mathbf{p}\in\mathbf{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\},$$

$$\text{s. t. }\forall\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}\right)\in\tilde{P},\ \mathbf{p}\left[\overline{\boldsymbol{\alpha}}^*-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b}\right)\right]\geq\mathbf{p}\left[\overline{\boldsymbol{\alpha}}-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b}\right)\right],\tag{1}$$

が成り立つ。ここで任意の財iに関して、ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}^i>\mathbf{0}$はその第$i$成分のみがある十分に小さな正数$\varepsilon>0$であって、その他の成分は全て0であるとしよう。今、上記の非ゼロ価格ベクトル$\mathbf{p}$の第i成分が負数としよう。**A3.**より、$\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b},\overline{\boldsymbol{\alpha}}^*-\boldsymbol{\varepsilon}^i\right)\in\tilde{P}$が、十分に小さな$\boldsymbol{\varepsilon}^i>\mathbf{0}$に関して、従う。このとき、条件(1)及び、$\left[\overline{\boldsymbol{\alpha}}^*-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b}\right)\right]=\mathbf{0}$である事より、

$$\mathbf{p}\left[\overline{\boldsymbol{\alpha}}^*-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b}\right)\right]=\mathbf{0}\geq\mathbf{p}\left[\overline{\boldsymbol{\alpha}}^*-\boldsymbol{\varepsilon}^i-(1+\pi)\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b}\right)\right].$$

これはベクトル$\mathbf{p}$の第i成分が負である事に矛盾。よって、$\mathbf{p}\in\mathbf{R}_+^n\setminus\{\mathbf{0}\}$である。 **Q.E.D.**

定理 1: *任意の*$\langle N,O;(P,\mathbf{b})\rangle$*に関して、適切な総資本財ストックの初期賦存*$\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}_+^n$*の下で、再生産可能解となるような均斉成長解が存在する。*

証明: レンマ1で示された$\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\alpha}^*,\pi$に基づいて定義されるプロフィール$\left((\mathbf{p},1),\boldsymbol{\alpha}^*,\pi\right)$は均斉成長解である。但し、$\mathbf{p}$は$\mathbf{pb}=1$を満たすように基準化される。実際、このプロフィールは、レンマ1の(i), (ii)の性質より、定義2の(e)以外の4条件を満たす事は直ちに解る。また、定義2-(e)は、$\alpha_0^*>0$及び$\pi>-1$なので、定義2-(d)の等式の右辺が正である事から、従う。ここで、$\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}_+^n$を$\boldsymbol{\omega}\equiv\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b}$と定める。そのとき、以下の問題を考える:

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}\in P}\mathbf{p}\left[\overline{\boldsymbol{\alpha}}-\left(\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\mathbf{b}\right)\right]\text{ s. t. }\mathbf{p}\underline{\boldsymbol{\alpha}}+\alpha_0\leq\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}.$$

レンマ1-(i), (ii)より、$\boldsymbol{\alpha}^*$はこの問題の解となる。このとき、総資本賦存が$\boldsymbol{\omega}\equiv\underline{\boldsymbol{\alpha}}^*+\alpha_0^*\mathbf{b}$とな

る任意の経済$\left\langle N,O;(P,\mathbf{b});(\boldsymbol{\omega}^{\nu})_{\nu\in N}\right\rangle$で、$\left((\mathbf{p},1),\boldsymbol{\alpha}^{*}\right)$が再生産可能解となる。 **Q.E.D.**

この定理 1 は、定義 1-(d)と整合的となるようなある特定の総資本賦存ベクトルの配置の下では、均斉成長解が再生産可能解になる事を意味している。

しかし、総資本賦存ベクトルが定義 1-(d)と整合的であっても、均斉成長解が常に再生産可能解になるとは限らない。その事を見る為に、生産可能性集合Pの特殊形態として、**フォン・ノイマン生産技術体系**(A,B,L)を考える。ここでAは$n\times m$型非負の**投入行列**であって、その各成分$a_{ij}\geq 0$は、第j工程の 1 単位操業水準に必要な財iの投入量を意味する。また、Bは$n\times m$型非負の**産出行列**であって、その各成分$b_{ij}\geq 0$は、第j工程の 1 単位操業水準で可能な財iの産出量を意味する。他方、**直接労働投入ベクトル**であるLは$1\times m$型非負行ベクトルであって、その各成分$L_j\geq 0$は、第j工程の 1 単位操業水準当たりに必要な直接労働投入量を意味する。この(A,B,L)に対応する生産可能性集合は

$$P_{(A,B,L)}\equiv\left\{(-\alpha_0,-\underline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\alpha}})\in\mathbf{R}_{-}\times\mathbf{R}_{-}^{n}\times\mathbf{R}_{+}^{n}\,\middle|\,\exists\mathbf{x}\in\mathbf{R}_{+}^{m}:(-L\mathbf{x},-A\mathbf{x},B\mathbf{x})\geq(-\alpha_0,-\underline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\alpha}})\right\}$$

で与えられる。この$P_{(A,B,L)}$は$\mathbf{R}_{-}\times\mathbf{R}_{-}^{n}\times\mathbf{R}_{+}^{n}$における閉凸錘集合であり、$\mathbf{0}\in P_{(A,B,L)}$である。

以上の準備の下、定義 1-(d)と整合的な総資本賦存ベクトルの下でも、再生産可能解にならない均斉成長解が存在する可能性がある事を、以下の数値例を用いて示す:

例 1: フォン・ノイマン経済体系として、以下のような経済環境を考えよう：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&2&3\\3&2&1\end{bmatrix},\quad L=(1,1,1),\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}.$$

第 1 に、$M\equiv A+bL$とすれば、この数値例の下での定義 2 の条件(a)-(b)は、$[B-M]\mathbf{x}\geq\pi M\mathbf{x}$かつ$\mathbf{p}[B-M]\leq\pi\mathbf{p}M$である事から、それらをそれぞれ整理すると

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_1\end{bmatrix}\geq\pi\begin{bmatrix}2\\2-x_3\end{bmatrix},\tag{*}$$

$$(p_2,0,p_1)\leq\pi(2,2,1+p_1).\tag{**}$$

但し、$x_1+x_2+x_3=1$かつ$\mathbf{pb}=p_1+p_2=1$と基準化している。この(*)-(**)式を満たす解は

$$(\mathbf{p}^{*},\mathbf{x}^{*},\pi^{*})=\left(\left(\sqrt{2}-1,2-\sqrt{2}\right),\begin{bmatrix}\sqrt{2}-1\\0\\2-\sqrt{2}\end{bmatrix},\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\tag{***}$$

のみである。従って、この$(\mathbf{p}^{*},\mathbf{x}^{*},\pi^{*})$が当該経済における唯一の均斉成長解となる。この解は、総資本財ベクトル$\boldsymbol{\omega}$に関して$M\mathbf{x}^{*}\leq\boldsymbol{\omega}$なので、定義 1-(d)を満たす。

次に再生産可能解の集合を解く。今、$\mathbf{x}^k > \mathbf{0}$をその第$k$成分のみが1で、それ以外の成分が全て0であるような単位ベクトルを表すとしよう。このとき、再生産可能解の集合は

$$\left\{\left(\mathbf{p},\mathbf{x}^1\right)\middle|\mathbf{p}\in\Delta \text{ s.t. } 2-\sqrt{2}\leq p_2\right\}\cup\left\{\left((1,0),\mathbf{x}^3\right)\right\}, \text{ 但し } \Delta\equiv\left\{\mathbf{p}\in\mathbf{R}_+^2\middle|\mathbf{pb}=1\right\} \qquad (*)$$

となる。(***)と(*)の比較により明らかな様に、再生産可能解は生産点が$\mathbf{x}^1$か$\mathbf{x}^3$になるのに対して、均斉成長解での生産点$\mathbf{x}^*$は、$\mathbf{x}^1$と$\mathbf{x}^3$の凸結合である。よって、総資本財ベクトル$\boldsymbol{\omega}$が賦存するこの経済環境における均斉成長解は、再生産可能解にはならない。均斉成長解の均衡価格$\mathbf{p}^*$は再生産可能解の均衡価格にもなり、また$\mathbf{x}^*$は、$\boldsymbol{\omega}$の下で定義 1-(d)を満たすが、$\mathbf{p}^*$の下で$\mathbf{x}^*$は利潤最大化解にはならないからである。すなわち、$\boldsymbol{\omega}$の下での資本家の利潤最大化行動の結果として、均斉成長解は支持されない。 **Q.E.D.**

3. マルクスの基本定理の幾何的証明

本章では、2財2生産部門のレオンチェフ生産体系モデルの想定の下で、マルクスの基本定理の幾何的証明を与える。フォン・ノイマン生産体系の特殊ケースとして、**レオンチェフ生産技術体系**(A,I,L)を考える。ここで**投入行列**Aは$n\times n$型非負正方行列であり、**産出行列**Iは$n\times n$型単位行列である。このレオンチェフ生産体系(A,I,L)においては、一般的な閉凸錘の生産可能性集合に関する仮定**A1**と**A2**が以下の様に、簡単化される:

A1'. $L \gg \mathbf{0}$;

A2'. $\forall \mathbf{c}\in\mathbf{R}_+^n$, $\exists \mathbf{x}\in\mathbf{R}_+^n$ s.t. $\mathbf{x}-A\mathbf{x}\geq\mathbf{c}$.

但し$\mathbf{x}\in\mathbf{R}_+^n$は$n\times 1$型列ベクトルであって、その各成分$x_i\geq 0$は財$i$の粗生産活動水準を表す。

本節の以下では、$n=2$と仮定し、投入行列Aは分解不可能と仮定する。そのとき、純生産可能性条件A2'は、2×2型投入行列の想定の下、以下のように図示される:[12]

【図1挿入】

上記の図1では、財1の1単位粗産出のために、$a_{11}\geq 0$の財1と$a_{21}>0$の財2の投入が必要である事、そして、財1産業の1単位粗産出活動$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$の結果、$\begin{bmatrix}1-a_{11}\\-a_{21}\end{bmatrix}$だけの純産出ベクトルを生産する事を表している。同様に、財2の1単位粗産出のために、$a_{12}>0$の財1と$a_{22}\geq 0$の財2の投入が必要である。そして、財2産業の1単位粗産出活動$\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$の結果、$\begin{bmatrix}-a_{12}\\1-a_{22}\end{bmatrix}$だけの純産出ベクトルを生産する。さらに、図1は、産出活動$\mathbf{e}_1$と産出活動$\mathbf{e}_2$の適切な1次結合によって得られる産出活動$\mathbf{x}=t\mathbf{e}_1+(1-t)\mathbf{e}_2$ (但し$0\leq t\leq 1$)の適当なスカラー倍$q\mathbf{x}$ (但し、$q>0$)によって、$\mathbf{R}_+^2$上の任意の点をカバーできる事を示している。例えば図1の点$\mathbf{b}\in\mathbf{R}_{++}^2$の任意のスカラー倍$q\mathbf{b}\in\mathbf{R}_{++}^2$に対して、それを純産出可能とするような

[12] 2×2非負行列Aが分解不可能となる為には、$a_{21}>0$, $a_{12}>0$である事が必要十分である。

産出活動$q'\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2_{++}$が存在する事を確認できる。

以下では、市場均衡として 2 節で定義した再生産可能解$\left(\left(\mathbf{p}^*,1\right),\boldsymbol{\alpha}^*\right)$を想定し、この財価格ベクトル$\mathbf{p}^*$を$\mathbf{p}^*\mathbf{b}=1$と基準化された正ベクトルとする。この価格ベクトルは、再生産可能解の性質より、2 部門間における均等利潤率によって特徴付けられる。[13] すなわち、ある正のスカラーπに関して、

$$\mathbf{p}^*=\left(1+\pi\right)\mathbf{p}^*A+L \tag{2}$$

が成り立つ。また、対応する総生産点$\boldsymbol{\alpha}$はレオンチェフ生産体系の下では、ある適当な操業水準ベクトル$\mathbf{x}'\in\mathbf{R}^2_+$を用いて、$\boldsymbol{\alpha}^*=\left(-L\mathbf{x}',-A\mathbf{x}',\mathbf{x}'\right)$で表せる。ここで 2 つの部門それぞれの単位操業ベクトル$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$それぞれを、ある同一の売上収入量に対応する操業水準が 1 単位となるように、単位変換を行う。第 1 に、適当な 2 つの正のスカラー、$x_1>0$及び$x_2>0$を取る事によって、$\left[\mathbf{p}^*-\mathbf{p}^*A\right]x_1\mathbf{e}_1=\left[\mathbf{p}^*-\mathbf{p}^*A\right]x_2\mathbf{e}_2$となるようにする。第 2 に、適当な$\lambda^*\in[0,1]$及び$\mu'>0$を選ぶ事によって、再生産可能解の下での総操業水準ベクトル$\mathbf{x}'$は、

$$\mathbf{x}'=\mu'\left[\lambda^*x_1\mathbf{e}_1+\left(1-\lambda^*\right)x_2\mathbf{e}_2\right] \tag{3}$$

と表せる。さらに、$\mu^*\equiv\frac{\mu'}{L\mathbf{x}'}$と置いて

$$\mathbf{x}^*\equiv\mu^*\left[\lambda^*x_1\mathbf{e}_1+\left(1-\lambda^*\right)x_2\mathbf{e}_2\right] \tag{4}$$

と定義する。このベクトル$\mathbf{x}^*$は、再生産可能解の下での 1 労働日当たり操業ベクトルである。このx_1，x_2，及びμ^*を用いて、$\mathbf{e}'_1\equiv\mu^*x_1\mathbf{e}_1$かつ、$\mathbf{e}'_2\equiv\mu^*x_2\mathbf{e}_2$と、それぞれの部門の単位操業ベクトルの変換を行う。この新たな$\mathbf{e}'_1$，$\mathbf{e}'_2$の下では

$$\left[\mathbf{p}^*-\mathbf{p}^*A\right]\mathbf{e}'_1=\left[\mathbf{p}^*-\mathbf{p}^*A\right]\mathbf{e}'_2 \tag{5}$$

が従う。ここで、財 1 産業及び第 2 産業各々の新たな 1 単位粗産出活動に対応する 2 つの純産出ベクトル$[I-A]\mathbf{e}'_1$及び$[I-A]\mathbf{e}'_2$を結ぶ線分を、**単位純産出量曲線**

$$\partial\hat{P}\left(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\right)\equiv\left\{\left(I-A\right)\mathbf{x}\,\middle|\,\exists\lambda\in[0,1]:\mathbf{x}=\lambda\mathbf{e}'_1+\left(1-\lambda\right)\mathbf{e}'_2\right\}$$

と定義しよう。このとき、$\left(I-A\right)\mathbf{x}^*\in\partial\hat{P}\left(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\right)$である。また、(5)式の成立は、価格ベクトル$\mathbf{p}^*$が単位純産出量曲線の法線ベクトルとなる事を意味する。すなわち$\partial\hat{P}\left(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\right)$と$\mathbf{p}^*$は直交する。ところで、1 労働日あたり可能純産出集合を

$$\hat{P}\left(L\mathbf{x}=1\right)\equiv\left\{\left(I-A\right)\mathbf{x}\,\middle|\,\exists\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2_+:L\mathbf{x}\leq 1\right\}\ \ \&\ \ \partial\hat{P}\left(L\mathbf{x}=1\right)\equiv\left\{\left(I-A\right)\mathbf{x}\,\middle|\,\exists\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2_+:L\mathbf{x}=1\right\}$$

[13] そのような価格体系は、レオンチェフ生産体系に関する仮定 **A1'** と **A2'** と投入行列の分解不可能より、数学的にはペロン=フロベニウス定理によって保証される唯一の固有ベクトルとして特徴付けられる。

と置くと、$\mathbf{x}^*$に関する(3), (4)の定義より、及び再生産可能解の定義 1-(b)より、

$$(I-A)\mathbf{x}^* \in \partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1) \quad \& \quad (I-A)\mathbf{x}^* \geq \mathbf{b} \tag{6}$$

が成立する。すなわち、操業ベクトル$\mathbf{x}^*$の実行によって、1 労働日が投下される。このとき、価格ベクトル$\mathbf{p}^*$の下での利潤量は

$$\mathbf{p}^*\left[(I-A)\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\right] \tag{7}$$

で表される。つまり売上収入$\mathbf{p}^*(I-A)\mathbf{x}^*$と賃金コスト$\mathbf{p}^*\mathbf{b}=1$の差で利潤の大きさが表される。この(7)式の値に等しい利潤量は、均等利潤率の条件(2)式より、$\mathbf{p}^*A\mathbf{x}=\mathbf{p}^*A\mathbf{x}^*$となる任意の非負操業ベクトル$\mathbf{x}$に関して実現可能である。しかし、そのようなベクトル$\mathbf{x}$に対応する労働投入量$L\mathbf{x}$は、部門 1 と部門 2 の資本-労働比率が等しくなる特殊なケースを除いて、一般に 1 に等しくはならない。[14] 部門 1 と部門 2 の資本-労働比率が異なる場合、集合$\partial\hat{P}(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2)$と集合$\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$とは唯一、$(I-A)\mathbf{x}^*$のみを共通の要素として持つ。すなわち:

$$\left\{(I-A)\mathbf{x}^*\right\} = \partial\hat{P}(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2) \cap \partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1). \tag{8}$$

再生産可能解の下での総操業水準ベクトルが$\mathbf{x}'$である事より、また、再生産可能解の定義 1-(a)及び定義 1-(d)と価格ベクトル$\mathbf{p}^*$が正である事より、総資本ストック$\boldsymbol{\omega}$の下で$A\mathbf{x}'=\boldsymbol{\omega}$が成立する。ここでもし$L\mathbf{x}'=1$であれば、$A\mathbf{x}^*=\boldsymbol{\omega}$となる。すなわち、$\boldsymbol{\alpha}^*=(-L\mathbf{x}^*,-A\mathbf{x}^*,\mathbf{x}^*)$としたときペア$((\mathbf{p}^*,1),\boldsymbol{\alpha}^*)$は、$A\mathbf{x}^*=\boldsymbol{\omega}$となるような総資本ストック$\boldsymbol{\omega}$の下で、再生産可能解となる。このような再生産可能解$((\mathbf{p}^*,1),\boldsymbol{\alpha}^*)$を図示したのが、図 2 である 。但し、図 2 において、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* \equiv \mathbf{x}^* - A\mathbf{x}^*$である。また、$\mathbf{a}_1 \equiv A\mathbf{e}'_1$かつ$\mathbf{a}_2 \equiv A\mathbf{e}'_2$である。

【図 2 挿入】

図 2 が示す様に、価格$\mathbf{p}^*$は単位純産出量曲線$\partial\hat{P}(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2)$の法線ベクトルであり、(7)式より点$(I-A)\mathbf{x}^*$は単位純産出量曲線と平面$\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$の交差上に位置する。また、 1 労働日を供給する労働者の賃金収入はちょうどベクトル$\mathbf{b}$を購入するのに必要かつ十分な水準であるので、彼の予算曲線は点$\mathbf{b}$を通過し、法線ベクトルが$\mathbf{p}^*$となる$\mathbf{R}^2_+$上の線分である。また、図 2 上で「profit」と記載された単位純産出量曲線と労働者の予算曲線の b-切片間の差部分は(7)式における利潤量を表している。

上記の議論のプロセスに従って導出された図 2 を用いて、マルクスの基本定理を

---

[14] その性質は、均等利潤率の条件(2)と(5)式の性質より、各部門の単位操業水準の下での労働投下量に関して$L\mathbf{e}'_1=L\mathbf{e}'_2=1$であるときには、必ず$\mathbf{p}^*A\mathbf{e}'_1=\mathbf{p}^*A\mathbf{e}'_2$となる事、従って両部門の資本 - 労働比率が等しくなる事より従う。

幾何的に証明できる。その議論をする為に、森嶋型の労働価値を定義しよう。

定義 3. [Morishima (1974)]: *任意の非負財ベクトル*$\mathbf{c}\in\mathbf{R}_{+}^{n}$ *の労働価値(labor value of* $\mathbf{c}$*)* は以下のように与えられる:

$$l.v.(\mathbf{c})\equiv\min\left\{\alpha_0 \,\middle|\, \exists(-\alpha_0,-\underline{\boldsymbol{\alpha}},\overline{\boldsymbol{\alpha}})\in P:\overline{\boldsymbol{\alpha}}-\underline{\boldsymbol{\alpha}}\geq\mathbf{c}\right\}.$$

同様にして、今、労働者の実質賃金ベクトル $\mathbf{b}$ の労働価値を $l.v.(\mathbf{b})$ によって定義できる。これは、労働力の再生産の為に最低限必要な財ベクトル $\mathbf{b}$ の生産の為の社会的必要労働量であり、労働者の 1 日 1 単位労働の中の**必要労働時間**に相当する。従って、労働搾取率は、剰余労働時間を必要労働時間で除した値として、以下の様に定義される:

定義 4. [Morishima (1974)]: 所与の*実質賃金ベクトル*$\mathbf{b}$ *における労働の搾取率(the rate of labor exploitation)*は以下のように与えられる:

$$e(\mathbf{b})\equiv\tfrac{1-l.v.(\mathbf{b})}{l.v.(\mathbf{b})}.$$

このとき、以下の定理が成立する:

定理 2. [Okishio (1963)] (Fundamental Marxian Theorem; FMT): *任意の資本主義経済* $\left\langle N,O;\left(P_{(A,I,L)},\mathbf{b}\right);\left(\boldsymbol{\omega}^{\nu}\right)_{\nu\in N}\right\rangle$ *において、任意の再生産可能解*$\left(\left(\mathbf{p}^{*},1\right),\boldsymbol{\alpha}^{*}\right)$ *が**正の利潤**を伴う為の必要十分条件は*$e(\mathbf{b})>0$ *である。*

証明: この定理の証明を図 2 で描かれた再生産可能解を所与として、幾何的に与える。この再生産可能解における純産出水準 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}=\mathbf{x}^{*}-A\mathbf{x}^{*}$ のときの直接労働投入量が $L\mathbf{x}^{*}=1$ であった。また、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}$ 以外にも、1 単位の直接労働投入によって純産出可能な財ベクトルの集合が $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ として定義されていた。換言すれば、この集合は、それを純産出する際に要する最小労働投入量が 1 となる財ベクトルの集合なので、定義 3 より、その労働価値量が 1 となる財ベクトルの集合である。この集合は、図 2 において、点 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}$ を通過する右下がりの直線として描く事ができる。点 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}$ を通過する事については、(8)式、及び $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}=\mathbf{x}^{*}-A\mathbf{x}^{*}$ より、明らかである。右下がり直線の性質に関して:A の分解不可能性及び A2'より、純産出ベクトル $[I-A]\mathbf{e}_1'$ 及び $[I-A]\mathbf{e}_2'$ のいずれとも $\mathbf{R}_{+}^{2}$ には属さず、また両ベクトルの為す角が 90 度より大かつ 180 度未満となる。その場合、任意の $\mu_1>0$ 及び $\mu_2>0$ に関して、ベクトル $\mu_1[I-A]\mathbf{e}_1'$ とベクトル $\mu_2[I-A]\mathbf{e}_2'$ を結ぶ線分は右下がりとなる。$\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ はそのような

線分の 1 特殊例に他ならないので、それは右下がりの直線として描かれる。

さて、$\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ は労働価値量が 1 となる財ベクトルの集合であるので、この平面 $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ の法線ベクトルは、その各成分が財 1 及び財 2 それぞれの **1 単位当たり労働価値**を表すものに他ならない。この法線ベクトルを $\mathbf{\Lambda}$ で記す。右下がりの平面 $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ に直交するベクトルである事から、必ず $\mathbf{\Lambda}\gg\mathbf{0}$ となる。かくして、任意の $\mathbf{y}\in\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ に関して、 $\mathbf{\Lambda y}=\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}=1$ となるので、集合 $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ は点 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}$ と正の法線ベクトル $\mathbf{\Lambda}$ によって定義される超平面 $H\left(\mathbf{\Lambda},\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\right)\equiv\left\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{2}\,\middle|\,\mathbf{\Lambda y}=\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\right\}$ の部分集合に他ならない。法線ベクトルが再生産可能解の価格ベクトル $\mathbf{p}^{*}$ である単位純産出量曲線 $\partial\hat{P}(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2')$ と平面 $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ とが点 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}$ 上で交差して、一般には一致しないのは、前者が同一売上収入当たりの純産出ベクトルの軌跡であり、後者が 1 労働日投下当たりの純産出ベクトルの軌跡である事と、第 1 部門と第 2 部門の資本-労働比率が一般には異なる性質に対応している。その事は、均等利潤率の下での価格ベクトル $\mathbf{p}^{*}$ と労働価値ベクトル $\mathbf{\Lambda}$ が一致しない事にも対応している。逆に $\partial\hat{P}(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2')$ と $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ が一致する状況とは、第 1 部門と第 2 部門の資本-労働比率が一致する状況に対応し、同時に $\mathbf{p}^{*}$ と $\mathbf{\Lambda}$ が一致する状況に対応している。

【図 3 挿入】

集合 $\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ は、平面 $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ 及びその下方領域として、幾何的に表される。特に図 3 の射影領域は、点 $\mathbf{b}$ を通過し法線ベクトルが $\mathbf{\Lambda}$ となる超平面 $H(\mathbf{\Lambda},\mathbf{b})$ の下方領域を $H_{-}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{b})\equiv\left\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{2}\,\middle|\,\mathbf{\Lambda y}\leq\mathbf{\Lambda b}\right\}$ と定義したときの、集合 $\hat{P}(L\mathbf{x}=1)\cap H_{-}(\mathbf{\Lambda},\mathbf{b})$ を表している。

ところで、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\in\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ かつ $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\geq(\neq)\mathbf{b}$ であり、平面 $\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ が右下がりの線分であるので、必ず $\mathbf{b}\in\hat{P}(L\mathbf{x}=1)\setminus\partial\hat{P}(L\mathbf{x}=1)$ となる。これは超平面 $H(\mathbf{\Lambda},\mathbf{b})$ が超平面 $H\left(\mathbf{\Lambda},\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{*}\right)$ の下部に位置する事を意味し、実質賃金ベクトル $\mathbf{b}$ の純産出に要する最小労働量が 1 より小さい事、すなわち、$l.v.(\mathbf{b})<1$ を意味する。よって、定義 4 より労働搾取率が正である。

逆に、もし再生産可能解 $\left((\mathbf{p}^{*},1),\boldsymbol{\alpha}^{*}\right)$ が正の利潤を伴わない状況を考えてみよう。

利潤最大化を目的とする資本家は、もし生産活動の結果が負の利潤しか生まなければ、生産計画$\mathbf{0}\in P$によって最適化できるから、再生産可能解で利潤が正でないとすれば、それは利潤ゼロのケースしか有り得ない。また、再生産可能解の条件(b)より、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* \geq \mathbf{b}$でなければならないが、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* > \mathbf{b}$であれば、再生産可能解を特徴付ける正ベクトル$\mathbf{p}^*$の下で、正の利潤が生じてしまうので、結局、$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^* = \mathbf{b}$となるしかない。よってこれまでの議論から明らかなように、$l.v.(\mathbf{b}) = 1$となり、その結果、労働搾取は存在しない事が解る。以上によって、マルクスの基本定理がこの2財のレオンチェフ経済の下で証明された。 **Q.E.D.**

上記定理は再生産可能解を前提にした FMT である。他方、均斉成長解を前提とした FMT も、Morishima (1974)等、存在する。ここではレオンチェフ経済モデルを前提とした議論であるので、均斉成長解であれば必ず再生産可能解でもある。したがって定理 2 は、均斉成長解を前提した場合での FMT の幾何的証明としてそのまま通用する。

4. 「一般化された商品搾取定理」の拡張

「一般化された商品搾取定理」(GCET) [Bowles & Gintis (1981); Roemer (1982); Samuelson (1982)]は、レオンチェフ経済モデルに関するいかなる前提条件の下で成立するであろうか？例えば、少なくとも拡大投入行列が分解不能である場合には、定理は成立する。その条件は、投入行列Aが分解不可能であるか、もしくは仮定 A1'の下では、n種類の財の全てが労働者によって消費されるような経済であれば満たされる。つまり$\mathbf{b} \gg \mathbf{0}$である状況である。しかし投入行列$A$が分解可能であり、ベクトル$\mathbf{b}$が半正であるようなより一般的な状況において、GCET は果たして頑健であるか否かが以下の問題である。[15]

仮定 A1'と A2'を満たすレオンチェフ生産体系(A, I, L)を想定し、その拡大投入行列を$M = A + \mathbf{b}L$で定める。任意の財$k \in \{1, \cdots, n\}$を選び、労働力商品も含めて各財の1単位の生産活動に要する、投入財ベクトルの生産に必要な財kの直接・間接投入量を表記した$1 \times (n+1)$型ベクトルを、$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}_{[n+1]} = \left(\upsilon^{(k)}_1, \cdots, \upsilon^{(k)}_k, \cdots, \upsilon^{(k)}_n, \upsilon^{(k)}_{n+1}\right)$で表す。また、$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)} = \left(\upsilon^{(k)}_1, \cdots, \upsilon^{(k)}_n\right)$

とする。ここで$n+1$は労働力商品の index である。$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}_{[n+1]}$を投下$k$-価値ベクトルといい、

$$\upsilon^{(k)}_j = a_{kj} + \sum_{i \neq k, n+1} \upsilon^{(k)}_i a_{ij} + \upsilon^{(k)}_{n+1} L_j \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\} \tag{9}$$

$$\upsilon^{(k)}_{n+1} = b_k + \sum_{i \neq k, n+1} \upsilon^{(k)}_i b_i \tag{10}$$

で定義される。(9)と(10)を整理すれば、

$$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)} = \boldsymbol{\upsilon}^{(k)} M + \left(1 - \upsilon^{(k)}_k\right) M_k \tag{11}$$

---

[15] この問題は、西田明彦氏との往復書簡での議論の機会から触発されたものである。

となる。但し、M_k は M の第 k 行ベクトルである。また、財 k の正の搾取の条件式は、

$$1-\upsilon_k^{(k)}>0 \tag{12}$$

と表現される。

ここで $\mathbf{b}\gg\mathbf{0}$ ならば、A1'より $M\gg\mathbf{0}$ が従うが、以下では $\mathbf{b}>\mathbf{0}$ と仮定しよう。そのとき、$M>\mathbf{0}$ である。また A1'より、$b_k>0$ となる任意の財 k に関して、$M_k\gg\mathbf{0}$ である。このとき、以下の結論が導かれる:

命題 1 [Bowles & Gintis (1981); Roemer (1982); Samuelson (1982)]: *任意の資本主義経済 $\left\langle N,O;\left(P_{(A,I,L)},\mathbf{b}\right);\left(\boldsymbol{\omega}^{\nu}\right)_{\nu\in N}\right\rangle$ において、その生産技術体系が **A1'** を満たすとしよう。このとき、正の利潤を伴う正の価格ベクトル $(\mathbf{p},1)\in\mathbf{R}_{++}^{n+1}$ が存在するならば、任意の財 $k\in\{1,\cdots,n\}$ に関して、非負の k-価値ベクトルの下で財 k の正の搾取が存在する。*

証明: 正の利潤を伴う正の価格ベクトル $(\mathbf{p},1)\in\mathbf{R}_{++}^{n+1}$ が存在するとは、$\mathbf{p}[I-M]\gg\mathbf{0}$ が成立する事である。このとき、二階堂(1960; p.114; 定理 15.3)より、$[I-M]^{-1}\geq\mathbf{0}$ が存在する。任意の財 k に関して(11)式を変形すると、

$$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}=\left(1-\upsilon_k^{(k)}\right)M_k[I-M]^{-1}. \tag{13}$$

もし $M_k=\mathbf{0}$ ならば、$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}=\mathbf{0}$ に対して $1-\upsilon_k^{(k)}>0$ が自明に成立。もし $M_k>\mathbf{0}$ ならば、$[I-M]^{-1}\geq\mathbf{0}$ なので $\frac{\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}}{1-\upsilon_k^{(k)}}\geq\mathbf{0}$ が従う。このとき、$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}\geq\mathbf{0}$ かつ $1-\upsilon_k^{(k)}>0$ が従う。　**Q.E.D.**

定理 3: *任意の資本主義経済 $\left\langle N,O;\left(P_{(A,I,L)},\mathbf{b}\right);\left(\boldsymbol{\omega}^{\nu}\right)_{\nu\in N}\right\rangle$ において、その生産技術体系が **A1'** を満たすとしよう。また、M は分解不能としよう。このとき、以下が同値である:*

(a) *非負の k-価値ベクトルの下で財 k の正の搾取が存在する;*

(b) *正の k-価値ベクトルの下で財 k の正の搾取が存在する;*

(c) *正の利潤を伴う正の価格ベクトル $(\mathbf{p},1)\in\mathbf{R}_{++}^{n+1}$ が存在する。*

証明: (a)$\Leftarrow$(c)は命題 1 より明らか。(a)$\Rightarrow$(c)を示す。もし $M_k=\mathbf{0}$ となる財 k が存在すれば、M は分解可能となり矛盾。よって、任意の財 k に関して、少なくとも $M_k>\mathbf{0}$ である。(11)式の解として $\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}\geq\mathbf{0}$ が存在し、かつ $1-\upsilon_k^{(k)}>0$ であるとしよう。このとき、M の分解不能

から、二階堂(1960; p.139; 定理 20.2)より、$I-M$ はホーキンス=サイモン条件(H-S)を満たす。よって、ある正の価格ベクトル $\mathbf{p}\gg\mathbf{0}$ が存在して、$\mathbf{p}\left[I-M\right]\gg\mathbf{0}$ が成立する。最後に、(a)$\Rightarrow$(b)を示す。$I-M$ の(H-S)条件と二階堂(1960; p.114; 定理 15.3)より、非負の $\left[I-M\right]^{-1}$ が存在し、かつ M の分解可能から、二階堂(1960; p.139; 定理 20.2)より、$\left[I-M\right]^{-1}\gg\mathbf{0}$。よって、$M_k>\mathbf{0}$ かつ $1-\upsilon_k^{(k)}>0$ なので、(13)式の適用により、$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}\gg\mathbf{0}$。 **Q.E.D.**

定理 4: *任意の資本主義経済* $\left\langle N,O;\left(P_{(A,I,L)},\mathbf{b}\right);\left(\boldsymbol{\omega}^{\nu}\right)_{\nu\in N}\right\rangle$ *において、その生産技術体系が* ***A1'*** *を満たすとしよう。また、拡大投入行列は一般に* $M=\begin{bmatrix} M^{(m)} & M^{(m,n-m)} \\ \mathbf{0} & M^{(n-m)} \end{bmatrix}$ *と表せる。但し、* $M^{(m)}$ *は* $m\times m$ *分解不能行列であり、* $M^{(m,n-m)}$ *は* $m\times(n-m)$ *行列、* $M^{(n-m)}$ *は* $(n-m)\times(n-m)$ *行列であり、* $m\leq n$ *である。ここで、* M *自体が分解不能の場合は、* $m=n$ *、従って* $M=M^{(m)}$ *としよう。このとき、任意の財* $k\in\{1,\ldots,m\}$ *に関して、以下が同値である:*

(a) *非負の* k *-価値ベクトルの下で財* k *の正の搾取が存在する;*

(b) *正の* k *-価値ベクトルの下で財* k *の正の搾取が存在する;*

(c) *正の利潤を伴う正の価格ベクトル* $(\mathbf{p},1)\in\mathbf{R}_{++}^{n+1}$ *が存在する。*[16]

定理 4 の前提条件である、分解不能な正方行列 $M^{(m)}$ の存在は、必ず保証される。なぜならば A1'より $L\gg\mathbf{0}$ であるので、少なくとも $b_k>0$ となる労働者の消費財 k に関しては対応する行ベクトルは $M_k\gg\mathbf{0}$ となるので、その様な財の集合によって構成される正方行列は必ず分解不能となる。この $M^{(m)}$ を構成する m 個の生産部門それぞれは、全ての財の生産において直接・間接に投入される財を生産しており、それを**基礎部門** [置塩(1978; p.80)]と呼び、そのような部門で産出される財を**基礎部門財**と呼ぶ。

定理 4 の証明: (a)$\Leftarrow$(c)は命題 1 より明らかなので、逆を示す。任意の財 $k\in\{1,\ldots,m\}$ に関して、$\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}\geq\mathbf{0}$ かつ $1-\upsilon_k^{(k)}>0$ が連立方程式(11)の解であるとしよう。ベクトル $\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}$ のうち、最初の m 次元ベクトル $\boldsymbol{\upsilon}_{(m)}^{(k)}\equiv\left(\upsilon_1^{(k)},\ldots,\upsilon_m^{(k)}\right)$ は、方程式

$$\boldsymbol{\upsilon}_{(m)}^{(k)}=\boldsymbol{\upsilon}_{(m)}^{(k)}M^{(m)}+\left(1-\upsilon_k^{(k)}\right)M_k^{(m)} \tag{11a}$$

16 この定理は、松尾匡氏の示唆に基づいて元々の定理を改訂したものである。

によって決定される。$M^{(m)}$ は分解不能であるので、定理 3 の証明と同様のロジックで、$\mathbf{v}_{(m)}^{(k)}$ は正となる。他方、ベクトル $\mathbf{v}^{(k)}$ の残り $\mathbf{v}_{(n-m)}^{(k)} \equiv \left(v_{m+1}^{(k)},\ldots,v_n^{(k)}\right)$ は、

$$\mathbf{v}_{(n-m)}^{(k)} = \mathbf{v}_{(n-m)}^{(k)} M^{(n-m)} + \mathbf{v}_{(m)}^{(k)} M^{(m,n-m)} + \left(1-v_k^{(k)}\right) M_k^{(m,n-m)} \tag{11b}$$

となる。ここで財の集合 $\{1,\ldots,m\}$ の中に $b_k > 0$ となる財 h が必ず存在し、$M_h \gg \mathbf{0}$ となるので、$\mathbf{v}_{(m)}^{(k)} \gg \mathbf{0}$ より、$\mathbf{v}_{(m)}^{(k)} M^{(m,n-m)} \gg \mathbf{0}$ が従う。以上より、$\mathbf{v}_{(n-m)}^{(k)}\left(I - M^{(n-m)}\right) \gg \mathbf{0}$ であるので、方程式(11a)-(11b)は Weak solvability を満たす。よって(H-S)条件より、ある正の価格ベクトル $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ が存在して、$\mathbf{p}\left[I-M\right] \gg \mathbf{0}$ となる。 最後に(a) $\Rightarrow$ (b)を示す。(11b)が Weak solvability を満たす事と二階堂(1960; p.114; 定理 15.3)より、$\left[I - M^{(n-m)}\right]^{-1} \geq \mathbf{0}$ が存在するので、$\mathbf{v}_{(m)}^{(k)} M^{(m,n-m)} \gg \mathbf{0}$ より、$\mathbf{v}_{(n-m)}^{(k)} \gg \mathbf{0}$ が従う。 **Q.E.D.**

定理 4 の前提条件である、財 k が基礎部門財である事は、定理 4 の成立にとって不可欠である。実際、以下の例が示すように、財 k が非基礎部門財である場合には、定理 4 の同値関係は必ずしも成立しない:

例 2: 財の数が $n=2$ であり、$a_{11}<1$, $a_{12}=a_{21}=a_{22}=0$, $b_1=0$, $b_2L_1>0$, $b_2L_2>1$ としよう。このとき、対応する拡大投入行列は

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ b_2L_1 & b_2L_2 \end{bmatrix}$$

となる。ここで $M_1 \geq \mathbf{0}$ となっている財 1 の価値 $\mathbf{v}^{(1)} = \left(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}\right)$ について考える。(13)式を $k=1$ に関して適用すれば、

$$\frac{\mathbf{v}^{(1)}}{1-v_1^{(1)}} = \left(a_{11}, 0\right)\left[I-M\right]^{-1} \tag{14}$$

となる。この行列 M に基づいて、$\left[I-M\right]^{-1}$ を求めると、

$$\left[I-M\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-b_2L_2}{|I-M|} & 0 \\ \frac{b_2L_1}{|I-M|} & \frac{1-a_{11}}{|I-M|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-b_2L_2}{(1-a_{11})(1-b_2L_2)} & 0 \\ \frac{b_2L_1}{(1-a_{11})(1-b_2L_2)} & \frac{1-a_{11}}{(1-a_{11})(1-b_2L_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-a_{11})} & 0 \\ \frac{b_2L_1}{(1-a_{11})(1-b_2L_2)} & \frac{1}{(1-b_2L_2)} \end{bmatrix}.$$

これを(14)式に適用すると、$\frac{\mathbf{v}^{(1)}}{1-v_1^{(1)}} = \left(\frac{a_{11}}{(1-a_{11})}, 0\right)$ となる。よって、$\mathbf{v}^{(1)} = \left(a_{11}, 0\right)$ となり、$a_{11}<1$ よ

り、$1-\upsilon_1^{(1)}>0$ である。しかし、$b_2L_2>1$ かつ $|I-M|<0$ 故に、(H-S)条件は成立せず、正の利潤を伴う正の価格ベクトルは存在しない。 **Q.E.D.**

以上より、行列 A が分解可能であり、かつベクトル $\mathbf{b}$ が半正となる一般的なケースでは、GCET は任意の財一般に関しては、必ずしも成立しない。しかし任意の基礎部門財 k に関しては、GCET が依然として成立する。このような財 k は、**A1'**及び $\mathbf{b}>\mathbf{0}$ の仮定より、必ず存在する。例えば $b_k>0$ となる任意の財 k がそれである。従って、正の利潤の生成の源泉として説明可能な生産要素の搾取が、労働力以外の財に関しても存在する。従って、依然として、労働の搾取が正の利潤生成の唯一の源泉という説明は成立しない。第 2 に、行列 M が分解可能な場合に GCET が成立しない財が存在し得る事は、労働搾取の固有性についての何らかの含意を与えるとは解釈し難い。M が分解可能な場合であっても FMT が成立するのは、労働投入ベクトル L が正という仮定ゆえである。仮に直接労働投入を全く要しない生産工程が存在する場合には、例 2 と同様の反例が労働搾取に関しても生じる。すなわち、ある生産要素に関する搾取と正の利潤の同値関係を成立させる要因は、その生産要素が労働力である故ではなく、むしろその生産要素が全ての生産工程において直接的・間接的に投入を要する財であるのか否かに関わる。例えば「重油」などにそうした性質があるとすれば、「重油」と労働力とを区別する理論的根拠は無い事になろう。

以上の定理 3 及び定理 4 の結論に基づいて、最近の GCET に関する Fujita and Fujimoto (2008)や Matsuo (2009)等の文献[17]について言及しよう。これらの文献では、レオンチェフ経済モデルにおける従来の n 次投入行列 A に労働投入ベクトルや実質賃金ベクトルを追加した $n+1$ 次拡張的投入行列 $\mathbf{A}^+\equiv\begin{bmatrix}A & \mathbf{b}\\ L & 0\end{bmatrix}$ を定義し、n 次拡張的レオンチェフ行列 $I-\mathbf{A}^+_{(k,k)}$ ――但し、$\mathbf{A}^+_{(k,k)}$ は $\mathbf{A}^+$ における第 k 行ベクトル及び第 k 列ベクトルを控除して得られる n 次拡張的投入行列である――に関する(H-S)条件の成立を前提する事で、$\mathbf{A}^+$ が分解不可能か否かに言及する事無しに、GCET の十分性パートの証明を行っている。しかし、$\mathbf{A}^+$ が分解可能な場合に、この種の(H-S)条件を正当に前提できるのかが問題となろう。方程式(9), (10)の非負解の存在だけからは、$I-\mathbf{A}^+_{(k,k)}$ の(H-S)条件は保証できないからである。[18]

参照文献

[17] これらの文献は GCET の厳密な証明を与える事が目的ではなく、GCET 成立の下での労働搾取の条件と商品 k の搾取の条件との非対称性を指摘し、労働搾取の意義の固有性を主張する事が主目的であった。この論点に関する批判的議論に関しては、Veneziani and Yoshihara (2009)及び Yoshihara and Veneziani (2009)を参照の事。

[18] $\mathbf{A}^+_{(k,k)}$ の分解不可能性か、もしくは行列 $\mathbf{A}^+$ の $n+1$ 次第 k 行ベクトルから第 k 成分を除いた n 次行ベクトル $\mathbf{A}^+_{k(k)}$ が正であるという仮定の下で、それは保証される。これらの条件は松尾(2004)の注 7)で指摘されている。

置塩信雄（1976):『蓄積論』 筑摩書房.

置塩信雄（1978):『資本制経済の基礎理論』(増訂版）創文社.

二階堂副包(1960):『現代経済学の数学的方法ー位相数学による分析入門ー』 岩波書店.

松尾匡（2004):「吉原直毅氏による『マルクスの基本定理』批判」,『季刊経済理論』 **41-1**, pp. 57-62.

吉原直毅（2006):「アナリティカル・マルクシズムにおける労働搾取理論」,『経済学研究』 **56-2**, pp. 63-97.

吉原直毅（2008):『労働搾取の厚生理論序説』 岩波書店.

Bowles, S. and H. Gintis (1981): "Structure and practice in the labor theory of value," *Review of Radical Political Economics*, **12**, pp.1-26.

Fujimoto, T. and Y. Fujita (2008): "A Refutation of Commodity Exploitation Theorem," *Metroeconomica* **59**, pp. 530-540.

Karlin, S. (1959): *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, **vol. i**, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Matsuo, T. (2009): "Generalized Commodity Exploitation Theorem and the Net-production Concept," forthcoming in *Bulletin of Political Economy*.

Morishima, M. (1960): *Equilibrium, Stability, and Growth, Clarendon Press*, Oxford.

Morishima, M. (1973): *Marx's Economics: A Dual Theory of Value and Growth*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
森嶋通夫『マルクスの経済学』高須賀義博訳，東洋経済新報社，1974 年.

Morishima, M. (1974): "Marx in the Light of Modern Economic Theory," *Econometrica* **42**, pp.611-32.

von Neumann, J. (1945): "A Model of General Economic Equilibrium," *Review of*

Economic Studies **13**, pp.1-9.

Nikaido, H. (1983): "Marx on Competition," *Journal of Economics* **43**(4), pp.337-362.

Okishio, N. (1963): "A Mathematical Note on Marxian Theorems," *Weltwirtschaftliches* Archiv **91**, pp.287-99.

Roemer, J. E. (1981): *Analytical Foundation of Marxian Economic Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

Roemer, J. E. (1982): *A General Theory of Exploitation and Class*, Harvard Univ Press, Cambridge.

Samuelson, P. (1982): "The normative and positive inferiority of Marx's vales paradigm," *Southern Economic Journal* **49**-1, pp.11-18.

Veneziani R. and N. Yoshihara (2009): "Exploitation and Productivity: The General Commodity Exploitation Theorem Once Again," *mimeo*, The Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, and Queen Mary, University of London.

Yoshihara, N. and R. Veneziani (2009): "Value and Exploitation: A Critical Analysis of Some Recent Contributions on Classical Theory," *mimeo*, The Institute of Economic Research, Hitotsubashi University, and Queen Mary, University of London.

吉原直毅
一橋大学経済研究所
〒186-8603　東京都国立市中２－１一橋大学経済研究所
電話：042-580-8354, Email: yosihara@ier.hit-u.ac.jp

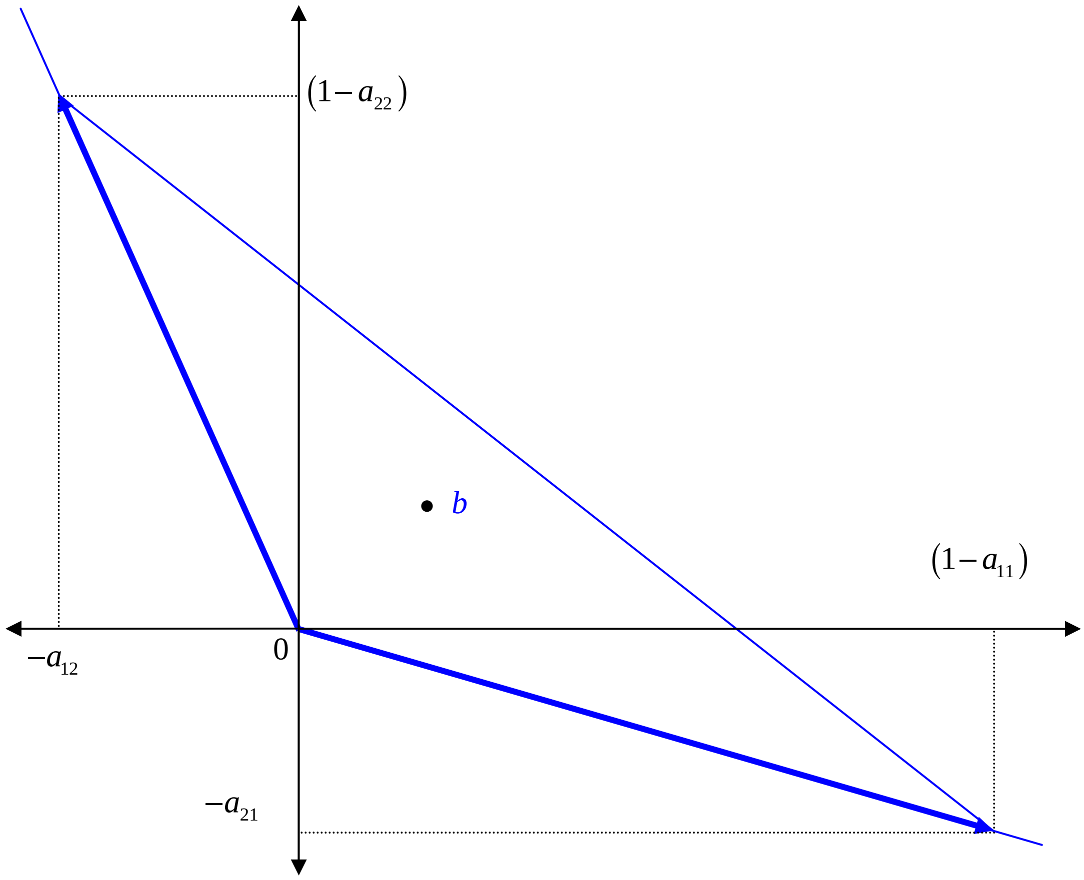

図 1: レオンチェフ生産体系の下での純生産可能性

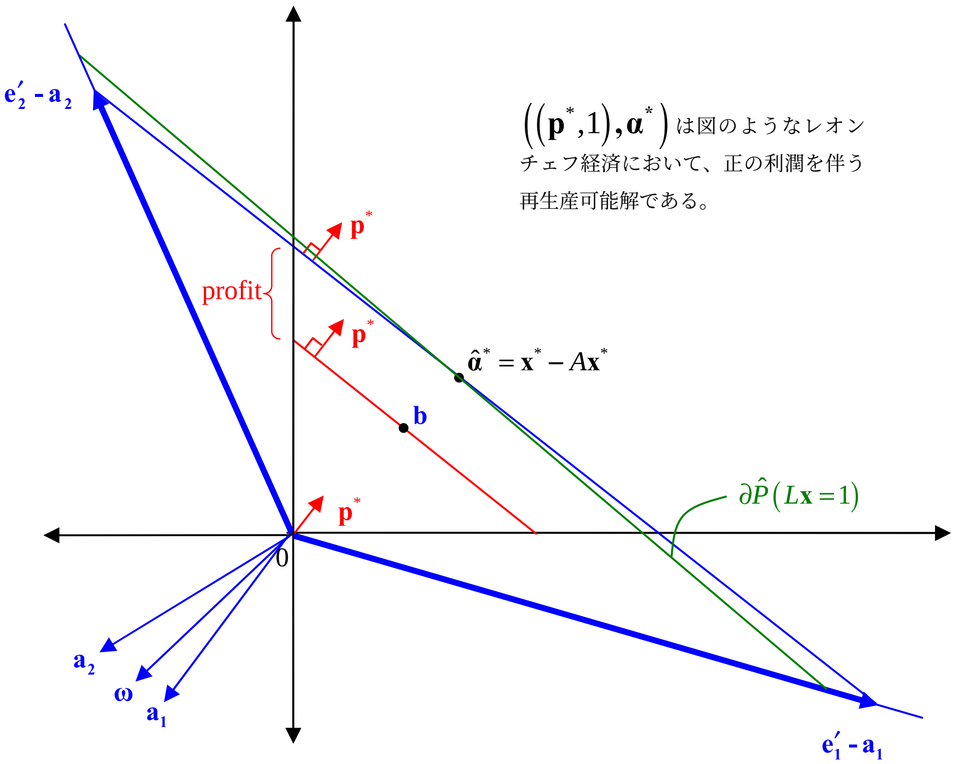

図 2: レオンチェフ生産体系における、正の利潤の伴う再生産可能解

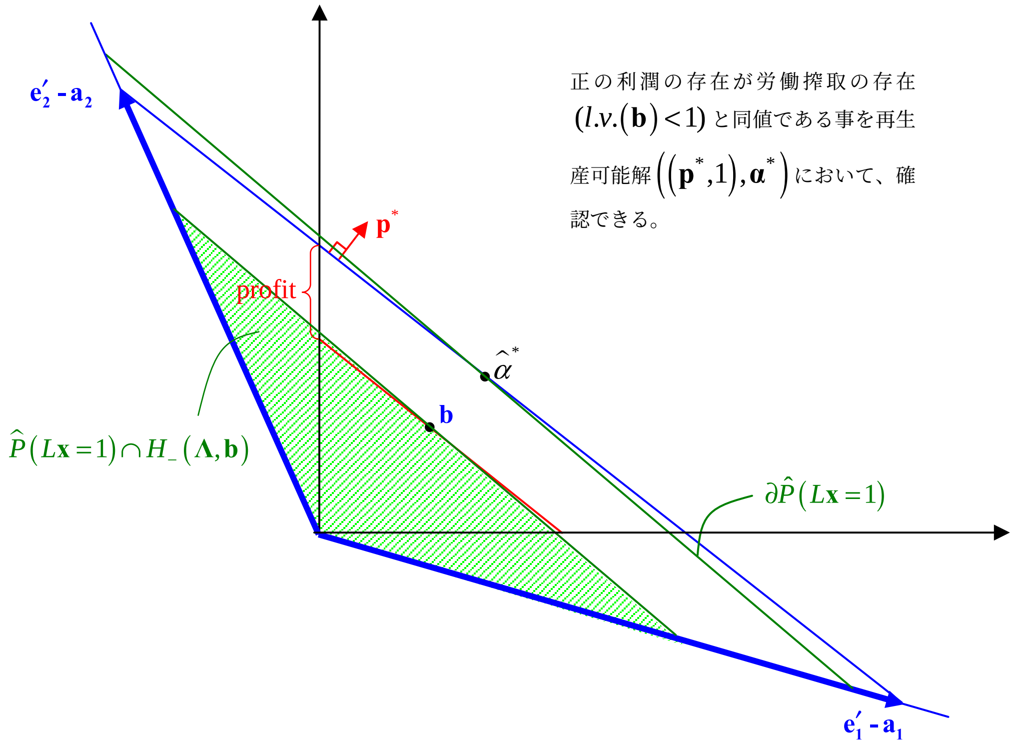

図 3: マルクスの基本定理の幾何的証明