

# 応用マクロ経済学 Summer 2020 講義ノート (RBC)

by Naohito Abe  
x8347  
nabe@ier.hit-u.ac.jp  
2020\_June

## 1 はじめに

本講義ノートの最初のバージョンを書いたのは10年以上前である。当時、日本の主要大学で数量的なマクロ分析をコースワークの一部としている所は存在せず、大学院のマクロ経済学ではAD-ASや内生成長モデル、世代重複モデル等を位相図を用いた、定性的な分析の紹介が中心であった。2000年代の半ばになると状況は一変し、MatlabやDynerus等を用いる定量的分析が大学院レベルのマクロ経済学に欠かせぬ一部となっている。

マクロ経済学に、本格的な数量分析、それも、最適化と資源制約を明示的に取り込んだ動学構造モデルの数値解析に本格的に取り込んだのは、1982年のKydland and Prescott と Long and Plosser による実物景気循環理論研究である。彼らのモデルが発表された当時、いわゆる、RBC(Real Business Cycle)は強烈な批判を浴び、大論争の中心となった。今でも、ケインズのモデルにシンパシーを感じる有名マクロ経済学者で、RBCへの嫌悪感を隠さない人も少なくない。しかしながら、様々な批判を浴びながらも、RBCはSolowモデル、Diamondモデルと並び、主要ベンチマークモデルとして、今日のマクロ経済学において、必要不可欠なものとなっている。景気循環モデルとしてどこまで正しいかどうかはさておき、RBCモデルが、ミクロ的基礎付けと資本蓄積を含む最も単純な確率的動学モデルであるためである。したがって、近年の動学モデルの展開を知るためには、たとえRBCに対して批判的な立場に立つものであっても、基本的なRBCモデルの特徴を理解し、実際にカリブレートできることは必要なスキルとなっている。近年流行のDSGE(Dynamic Stochastic General Equilibrium)モデルの解法も、基本的には本講義ノートで触れられるRBCモデルの解法と同じである。

本講義ノートは、動学マクロモデルの解法の中でも、もっとも単純なKPR(King, Plosser, and Rebelo)と呼ばれる解法を説明することを主眼としているが、ここでは、オイラー方程式や資源制約式を一つ一つ、手対数線形近似をとる必要がある。これは、近年主流になりつつある、数値微分を多用するアプローチに比べ面倒であり、かつ、途中で計算ミスをしやすいという欠点を有する。にもかかわらず、筆者は、マクロ経済学モデルを構築するものは、すくなくとも一度はこの作業を行うべきであると考えている。それは、マクロモデルを「解く」プロセスをブラックボックス化するのではなく、数式やアルゴリズムの各ステップが何を意味し、どのような作業がなされているのかを追いかけることが極めて重要であるからである。線形近似された資源制約やオイラー方程式の直感的な意味を追いかけること、そして、Forwardに解く、ということがどのような情報と構造に依

存するのか、結果を大きく左右するメカニズムは何か、それらを把握するには、マクロモデルの細部の構造まで理解する必要があるためである。

## 2 参考文献

RBC の入門書としては

George McCandless [2008] *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models* Harvard University Press.

がある。その他にも、毎年のように、実践的な教科書が出版されている。

RBC に関する初期の入門および様々な応用に関しては、多少古くなったが Thomas F. Cooley ed. [1995] *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press.

は、最初の章が導入用のテキストとして非常によく書かれている。また、不完全競争や国際経済、金融への応用も詳しく述べられており、この分野で論文を書くこととするものであれば、持っている価値は今でも十分にある。

King, Robert, Plosser, Charles and Rebelo, Sergio, [1988a], Production, growth and business cycles: I. The basic neoclassical model, *Journal of Monetary Economics*, 21, issue 2-3, p. 195-232.

King, Robert, Plosser, Charles and Rebelo, Sergio, [1988b], Production, growth and business cycles: II. New directions, *Journal of Monetary Economics*, 21, issue 2-3, p. 309-341.

この二本の JME 論文は、その後の多くのマクロ経済学者に大きな影響を与えた論文であり、現在でも、ここで提唱されたアルゴリズムは KPR と呼ばれ、頻繁に利用されている。その後、今から 10 年ほど前までの RBC の貢献と当時の Frontier に関する Rebelo によるサーベイが下記である。

Sergio Rebelo [2005] "Real Business Cycle Models: Past, Present and Future," *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 107(2), pages 217-238

実証的観点を完全に無視し、ミクロ経済学な理論構造を厳密に説明しているのは第四版になった

Ljungqvist and Sargent [2018] の第 8,12 章であり、完備資本市場における動学一般均衡モデルを丁寧に解説している。逆に、実証分析を強調したものに関しては

Carlo A. Favero [2001] *Applied Macroeconometrics*, Oxford University Press. が計量の基礎から VAR, Cowles Commission Approach, GMM および Calibration にわたる広範囲な方法論に関して簡潔にまとめている。

より本格的に数値解析を駆使した動学一般均衡を分析するには

Heer, Burkhard and Alfred Maussner [2009] *Dynamic General Equilibrium Modeling*, Springer

は、線形近似から Projection Methods, Discretization や多項式近似等の非線形解法から解説、さらには異質な主体が存在する不完備市場におけるマクロショックと分布の変化を追いかけるような複雑な動学均衡モデルを詳細に説明している。多くのプログラム例も提供しているが、ソフトは GAUSS および FORTRAN であり、Matlab ではない。

最後に、リーマンショックという巨大ショックを予測できなかったとして、当時、マクロ経済学は強い批判を浴びた。

Friedman, B.M. and M. Woodford ed. (2011) *Handbook of Monetary Economics Volume 3A,B*. North Holland

は、リーマンショック後の、金融・貨幣的側面を重視する第一人者による最先端のサーベイ集であり、この分野で論文を書きたい者は図書館で一読することを強く進める。

### 3 RBCモデルと経済成長

RBCまたはDSGモデルが1970年代までの景気循環理論と異なる点は、議論の出発点を、ケインジアン理論ではなく、最適成長モデルとし、経済成長と景気循環のメカニズムを同一のフレームワークで説明しようとしたことである。それまでの景気循環理論、特に Keynesian 達によるものでは、出発点は Phillips 曲線であったことと対照的である。彼らは、景気循環の原動力と、経済成長の原動力の間に密接な関係がある、と仮定したわけである。その理由の一つは、以下のようなものであったと思われる。Solow による経済成長の要因分解 (Growth Accounting) によると、経済成長の 1/3 は資本ストックの増大に、2/3 は技術革新によるものである。すなわち、技術革新が成長に大いに貢献しているのである。しかし、技術革新そのものを観察することはできず、推定の際の残差 (Solow Residuals) としてしか観察できない。生産性を向上させるような技術革新として、CPU の高速化、流れ作業の導入などの革新は確かに存在する。一方、オイルショックのような外生要因を考えることもできる。石油価格の上昇は生産コストの上昇、すなわち生産性の低下と同じ効果をもたらす。負の残差が発生する可能性もあるということである<sup>1</sup>。2007年から2008年にかけて、石油価格は歴史的にないくらい高い水準にあった。この経済効果を、標準的な経済成長モデルで分析してみよう。日本経済を念頭に置き、石油価格を外生と考えることにする。石油価格の上昇は、石油を生産に用いる財の生産を減少させることになる。次に、資本の生産性が低下することから資本収益率を低下させ、投資を減少させる。投資の減少は将来の資本ストックの減少をもたらす、将来の生産水準の低下を引き起こす。すなわち、石油価格の上昇が生産に与える影響は、当期にとどまらず、将来にもわたるのである。逆に、2014年以降の石油価格の急落は、逆に将来の生産力を拡大させることが予想される。Solow Residuals の変化は、生産水準の (比較的) 長期的な変化を引き起こすのである。RBC、または DSGE モデルの初期の研究者達は、この成長モデルのもつ特性が、景気循環の説明のベースになりうると考えたのである。

それでは、景気循環を成長モデルで説明する場合、景気循環のどのような側面の説明を目標にすべきなのであろうか?初期のRBCの研究者がまず行ったことは、主要なマクロ変数の時系列を並べることであった。具体的には、GDP、非耐久消費財、投資、政府支出、雇用、賃金などである。無論、これら全ての変数は、長期トレンドをもっている。成長モデルに従えば、この長期トレンドの源泉は生産性の向上である。しかし、景気循環の源泉も Solow Residuals の変動に求めるのであれば、この長期トレンドは単なる直線ではなくなる。長期トレンドは、ふ

<sup>1</sup>無論、資本や労働の測定誤差、または基礎となっている生産関数そのものが間違っている場合にも Solow Residuals は発生する。

らふらと動き景気循環を引き起こす Solow Residuals の変化が、長期的には上昇傾向にあることから生じることになる。

GDP 等のマクロ時系列の長期トレンドと景気循環を識別することは難しい。計量経済学的には、データを定常にする作業ということになり、階差を次々と取っていくことができるし、線形トレンドに回帰し、その残差として捕らえることもできる。前者は、指標に測定誤差がある場合は、その影響を拡大させてしまうし、また階差をとることで定常化しすぎる可能性がある。また、後者ではトレンドが線形である必然性がなく、例えば、高度成長期と現在の日本の長期トレンドが同じであると考えることには大分無理があるであろう。

一つの慣例として用いられる手法として、Hodric-Prescott のフィルター (the H-P filter) と呼ばれるフィルターを用いて長期トレンドを除去することがよく行われている。具体的には、各系列、例えば  $y_t$  を以下の式を最小化させるような二つの components ( $y_t^c, y_t^g$ ) に分離するのである。なお、 $y_t^c$  は Cyclical Component であり、 $y_t^g$  がトレンド Component である。

$$\text{Min} \sum_{t=1}^T (y_t^c)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(y_{t+1}^g - y_t^g) - (y_t^g - y_{t-1}^g)]^2, \quad (1)$$

$$y_t = y_t^c + y_t^g. \quad (2)$$

$\lambda$  は、四半期では 1600 に設定する<sup>2</sup>。第一項は変動項、第二項は成長項を示す。 $\lambda = 0$  のとき、解は変動項のみとなり、このフィルターの解は実際の系列と一致する。逆に  $\lambda$  が非常に大きい場合は、成長率が一定の単なるトレンドとなる。 $\lambda$  を調整することで、除去する変動の周波数を調整することができる。 $\lambda = 1600$  のとき、このフィルターは 8 年以上の低周波を除去することが知られている<sup>3</sup>。このフィルターを用いることにより、Solow Residuals の長期的な傾向と、短期的な傾向を分離することになるのである<sup>4</sup>。

Matlab では、Econometric Toolbox が入っていれば、下記のように hpfilter をかけることが出来る。

```
%%%%%%%%%%%%%%
clear all;
gdpdata=xlsread('japan_quarterly.csv','B2:N105'); % エクセルファイル読み取り
t = datetime(1994,01,1):calmonths(3):datetime(2019,12,31);% 日付データ作成
date=t';
gdp =gdpdata(:,1);
lngdp=log(gdp);
[~,dgd] = hpfilter(lngdp,1600);
```

<sup>2</sup>Annual の場合は 100、Monthly の場合は 14400 に設定するのが慣習となっている。もっとも近年ではこのような恣意的な設定に対してはかなり厳しい批判が浴びせられている。後で多少説明する。

<sup>3</sup>Burnside[1999] には、H-P filter に関する詳しい説明が書かれているが、周波数領域に関する基本的な知識を前提としている。周波数領域に関して興味のあるものは、山本拓氏の『経済の時系列分析』の最後の章が参考になる。

<sup>4</sup>このフィルターは、現在では多くの統計パッケージで利用可能である。Eviews や TSP 等の時系列分析に強みのあるパッケージは無論、Stata 用にも下記の web から入手することもできる (<http://ideas.repec.org/c/boc/bocode/s447001.html>)。

```
figure
plot(date,dgdp)
axis tight
grid on
```

```
figure
plot(date,lngdp)
axis tight
grid on
%%%%%%%%%
```

図1は日本の実質GDP(対数)の推移を描いたものである。2008年から2009年にかけてのリーマンショック(グローバルファイナンシャルクライシス)が非常に深刻なものであったことがわかる。また、それ以外にも、2011年の東日本大震災、2014年の消費税率改定前後で比較的大きな景気の変動が生じていることも伺うことができる。図2は、このGDPにHP-Filterをかけ、トレンドを取り除いたものである。リーマンショック後、日本のGDPの景気循環が短期間化していることがわかる(公式の景気循環日付とは異なるものであることに注意せよ)。

図3は、いくつかのマクロ系列にhp filterをかけたうえで、GDPと、各変数の各種ラグ、フォーワードとの相互相関(Cross-Correlation)を計算したものである。

この表から、消費は投資よりも変動が小さく、就業者数はさらに変動が少ないこと。GDPとの相関は、政府消費支出や政府投資支出とは小さいものの、他の変数は、同時点において大きな相関となっていることもわかる。そして、GDPの自己相関は、1年経過するとほぼなくなるが、就業者や失業率との相関は長く残ることがわかる。これらの現象(Stylized Facts)を再現するようなモデルを作ることが、初期のRBCの目標であった。

なお、近年ではH-Filterそのもの、および $\lambda$ の値に関して批判的な研究が増加しており、昔のようにH-Filterのみが主流のDetrending Methodとは言えなくなっている。たとえば、

Ravn, Morten O. and Uhlig, Harald, "On Adjusting the HP-Filter for the Frequency of Observations," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 84, Issue 2 - May 2002.

はannualデータの $\lambda$ は100でなく、6.25にすべきであると論じている。また、異なる手法としては

Baxter and King [1999] "Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 81, Issue 4 .

はBand-Pass Filterを提唱しており、プログラムも簡単に入手可能である。Band-Pass Filterを理解するためにはフーリエ解析の知識が必要なため、本講義ノートでは説明しないが、この手法は、特定の周波数のサイクルのみを抽出するものであり、非常に強力である。詳しくは

Favio Canova.[1998], "Detrending and Business Cycle Facts," *Journal of Monetary Economics* 41, 475—512.

Timothy Cogley and Japnes M. Nason [1995] "Effects of the Hodrick-Prescott Filter on Trend and Difference Stationary Time Series," *Journal of Economic Dynamics and Control* vol 19.



Figure 1: 日本の対数実質 GDP の推移

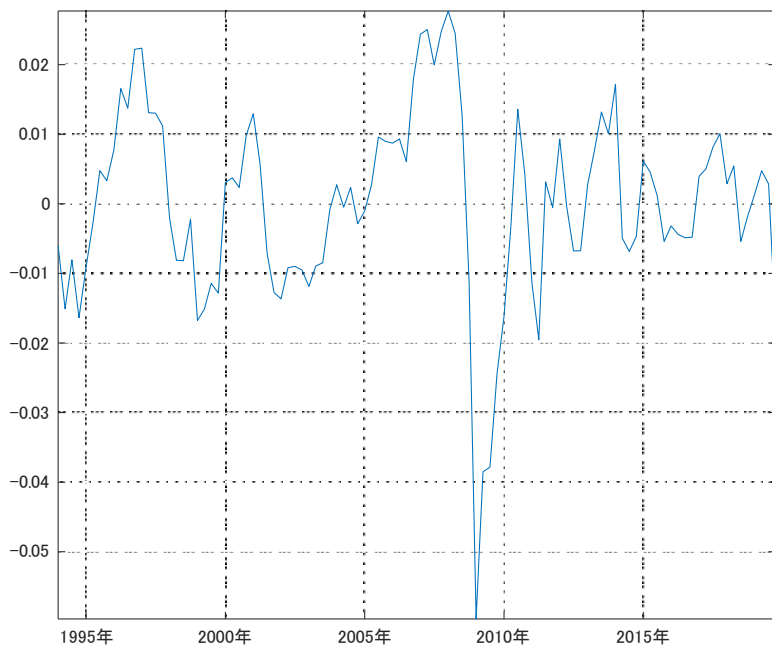


Figure 2: 実質 GDP(HP-Filter 後)

Cross-Correlation of Japanese Macroeconomic Data (1994:Q1-2019:Q4)												
	STD	Corr(GDP, I.E.X)	Corr(GDP, I.L.X)	Corr(GDP, I.L.X)	Corr(GDP, I.L.X)	Corr(GDP, I.L.X)	Corr(GDP, I.L.X)	Corr(GDP, I.L.X)	Corr(GDP, F.I.X)	Corr(GDP, F.I.X)	Corr(GDP, F.I.X)	Corr(GDP, F.S.X)
GDP	0.0137	-0.0925	0.0426	0.2266	0.4998	0.7617	1	0.7617	0.4998	0.2266	0.0426	-0.0925
CONS	0.0100	0.056	0.1611	0.2833	0.4375	0.6106	0.7263	0.4343	0.1878	0.0104	-0.0839	-0.1154
INVESTMENT	0.0380	-0.0881	-0.04	0.1077	0.3228	0.5516	0.7519	0.7604	0.7012	0.5751	0.4343	0.2924
GC	0.0074	0.2062	0.2856	0.3606	0.3063	0.2177	0.1059	-0.0945	-0.2124	-0.3489	-0.359	-0.4246
GINV	0.0354	0.1402	0.1677	0.1313	0.0264	-0.0566	-0.1515	-0.3202	-0.3616	-0.3719	-0.3165	-0.2202
EXPORT	0.0606	-0.2	-0.0611	0.1416	0.3851	0.6044	0.798	0.6429	0.3804	0.1199	-0.0529	-0.1575
IMPORT	0.0450	-0.0086	0.0956	0.2657	0.4441	0.6045	0.8084	0.7928	0.6064	0.3471	0.1006	-0.1204
Workers	0.0047	-0.3813	-0.2747	-0.1209	0.0989	0.299	0.4753	0.6505	0.6867	0.6413	0.5395	0.3876
Unemploy Rate	0.0591	0.1758	0.0451	-0.1597	-0.3282	-0.478	-0.6512	-0.7818	-0.7763	-0.651	-0.4911	-0.3065
Note: Source: System of National Account by Cabinet Office, Labor Force Survey. All the data are seasonally adjusted, detrended by HP filter (lambda =1600). Workers: Shugouusha Su Except for Workers and Unemploy Rate, all the data are real values.												

Figure 3: 日本の Cross-Correlation



および

Lawrence J. Christiano & Terry J. Fitzgerald [2003]. "The Band Pass Filter," *International Economic Review*, vol. 44(2), pages 435-465, 05.

を参照すること。<sup>5</sup>

## 4 モデル

国民所得計算は1年間に4回発表される、4半期データである。それに対応するように、時間の単位を4半期ごとに1単位進むと仮定し、モデルを構築しよう。もっとも単純な生産経済における成長モデルは、

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \quad (3)$$

$$\text{s.t. } k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t - c_t \text{ for all } t, \quad k_0 > 0: \text{ given.} \quad (4)$$

なお、ここで主観的割引率  $\rho$  を、主観的割引因子  $\beta$  で定義しなおしていることに注意せよ。

次に、成長モデルでは雇用は一定とされているが、景気循環における雇用の役割が大きいことは明らかなため、雇用の変動をモデルに組み込む必要がある。雇用の変動を組み込む手法には様々なものがあるが、一番単純なケースは、家計が労働と余暇消費の選択をおこない、賃金が余暇と消費の限界代替率に等しいところまで労働を供給し、企業は労働の限界生産性が賃金に等しい水準まで需要すると仮定することである。そこで、瞬時的効用関数を以下のように仮定する。

$$u(c_t, 1 - l_t) \quad (5)$$

$l_t$  は家計による労働供給であり、 $1 - l_t$  は余暇消費にあたる。単位期間当たり、余暇が労働にあてることのできる時間を1に基準化してある。

同様に、生産サイドにも労働を明示する必要がある。それと同時に、このモデルの最大の特色の一つである、生産性ショックも生産サイドに導入する必要がある<sup>6</sup>。具体的には、以下のような生産関数を仮定する。

$$y_t = e^{z_t} F(k_t, l_t), \quad (6)$$

$z_t$  は生産性に対するショックであり、一階の自己回帰 (AR1) に従うとする。すなわち、

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1} \quad (7)$$

ここで、 $\varepsilon$  は平均値ゼロの同一の正規分布に従い、各期間で独立であるとする (i.i.d.)。また、 $0 < \eta < 1$  を仮定する。この仮定のもとでは、 $z_t$  は長期的には0

<sup>5</sup>なお、日本経済を対象に、井堀、中里、川出 [2002] 『90年代の財政運営：評価と課題』 「フィナンシャル・レビュー」 July は様々なフィルターの比較を行っている。

<sup>6</sup>ハロッド中立ではなく、ヒックス中立としている理由は、この理論が成長よりも循環に注目していることと、後にコブダグラス型効用関数を考えるため、両者は同一になること、さらには、 $z$  としてソロー残差を考える際、この定式化のほうがデータと整合的であるためである。

に収する。なお、 $\eta$  が正の値をとる、ということは生産性ショックには正の系列相関があることを意味する。 $\varepsilon$  が i.i.d. である、ということは、生産性ショックは経済諸変数に影響を与えることはあっても、それらから逆に影響を受けることはなく、外生であることを意味する。経済理論では説明できない、ショック要因として扱うということである。<sup>7</sup> 技術ショックの導入の仕方には様々なものを考えることができるが、上記の定式化は最も単純なものである。なお、AR1 の生産性ショックを導入することにより、この経済の消費者は不確実性に直面することになる。現在、2020 年の時点では、コロナウィルスの影響がいつ終焉するかわからないし、翌年、2021 年に何が起きるかわからないということである。このような不確実性に直面する場合、標準的な経済学では、消費者は効用の期待値、すなわち期待効用を最大化すると定式化する。ここでもそれに従うことにする<sup>8</sup>。ただし、注意せねばならないことは、標準的なミクロ経済学に従い人々が合理的であると仮定する場合<sup>9</sup>、現在利用可能な情報を元に、将来を予想する、条件付期待値を最大化することになることである。 $t$  期における条件付期待値を  $E_t$  と表記すると、消費者の最大化する効用は以下のように定義される。

$$E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - l_t) \right]. \quad (8)$$

たとえ不確実性が導入されていても、市場が完全完備であると仮定する限り、この経済の均衡はパレート効率的となる。選好が同一である限り、たとえば家計所得の実現値が家計により異なっても、完備資本市場の下では各家計の消費は完全に連動し、マクロの消費水準に比例して動く。したがって、上記のような代表的個人の最適化として経済を描写することが可能である。換言すれば、RBC は完備資本市場における景気循環モデルなのである。

生産関数が標準的な新古典派の性質を満たす限り、厚生経済学の第二基本定理が適用可能であり、資源制約を用いて消費者の厚生を最大化する解は、一般均衡としてある価格体系で再現 (support) される。したがって、我々のモデルは、以下のように定式化することができる。

#### [基本モデル]

$$\text{Max } E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - l_t) \right], \quad (9)$$

<sup>7</sup>なお、上記の定式化は Romer[2001] と若干異なるが、線形近似すると同一の結果となる。

<sup>8</sup>近年、期待効用最大化という形式では、消費者の行動をうまく描写できないと主張する経済学者が増加している。Behavioral Economics と呼ばれる分野であり、現在かなり精力的に分析がなされている。Robert Shiller や Alan Blinder などの著名なマクロ・金融の専門家も近年様々な研究を行っている。代表的なものは、セイラー (Thaler)[1998] の『市場と感情の経済学』ダイヤモンド社 (篠原勝訳) であろう。

<sup>9</sup>余談であるが、マクロ経済学の議論で『合理的期待』の定義に関して、混乱している記述を時に見受けられる。筆者の理解している限りでは、標準的な定義は以下の通りである。ある経済モデルにおいて、消費者がある変数に関して合理的期待をもつ、ということは、その消費者がモデルの構造を認識し、そのモデルから導かれる当該変数の条件付期待値をその将来予想と一致させるときである。したがって合理的期待という概念は、モデルごとに定義されるべきものなのである。

$$\text{s.t. } k_{t+1} = e^{z_t} F(k_t, l_t) + (1 - \delta) k_t - c_t, \text{ for all } t, \quad k_0 > 0: \text{ given}, \quad (10)$$

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1}. \quad (11)$$

このモデルを解く、ということを考えてみる。経済成長モデルでは、市場均衡を満たす消費と資本の水準は、鞍点に収束する一本の曲線で描かれていた。すなわち、ある時点での資本水準が与えられた場合、それに対応する消費水準は、Saddle Path 上の一点で示される。数式で書くと

$$c_t = h(k_t), \quad (12)$$

という関数で Saddle Path が定義された。この関係は、Policy Function と呼ばれる。資本ストックは jump できない変数であり、State Variable、または Predetermined Variable と呼ばれる。t 期において変更することが出来ないという意味である。それに対し、消費は t 期で自由に設定することができる。そのような変数のことを Control Variable、または Non-Predetermined Variable と呼ばれる。Predetermined Variable に依存して Control Variable の水準を決定する式を Policy Function と定義するのである。

我々の単純な RBC モデルでは、State Variable は資本  $k_t$  と技術水準  $z_t$  である<sup>10</sup>。なぜなら、t 期において、この経済の代表的個人は両変数を動かすことが出来ないためである。一方、Control Variable は消費  $c_t$  と労働供給  $l_t$  である。経済成長モデルとのアナロジーに従えば、我々のモデルの解は、以下のような形になることが予想される。

$$c_t = h_1(k_t, z_t) \quad (13)$$

$$l_t = h_2(k_t, z_t) \quad (14)$$

ここで問題になるのは、そのような解が存在するか否か、存在するならば、どのようにすればそれを導くことができるか、である。前者の問題は数学的には必ずしも自明ではないが、ここでのモデルに関しては、最適化の解が存在することが知られている。より一般的なモデルで解の存在を保証させることは難しいが、ここではその問題には深く立ち入らず<sup>11</sup>、解が存在すると仮定し、上記のような 2 つの Policy Function を導く手法を考察する。最もナイーブな方法は、財政学や国際経済学などの応用ミクロ経済分析で行われるように、一般均衡を定義する最適化の一階条件と市場均衡条件を全て並べ<sup>12</sup>、連立方程式体系にし、その根を求

<sup>10</sup>研究者の中には内生変数のみを State Variables と呼び、ショック項は外生変数として区別する者もいる。

<sup>11</sup>解の存在証明に関して、詳しく知りたいものは Stokey and Lucas [1989], *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press を参照せよ。ただし、関数解析に関する知識が必要となる。マクロ動学モデルは、1960 年代に極めて高度な数学展開がなされ、力学系の専門家が参入するなど、応用数学としての性格が強くなった時期があった。工学的な性格が強い現在とは全く違う雰囲気がある。

<sup>12</sup>無論、ワルラス法則があるため、一本は必要なくなる。

めることである。あるいは、より洗練された手法で、Scarf Algorithm 等を用いることも考えることは可能である。しかし、ここでのモデルにおいて上記の手法を適用することは非常に困難である。それは、この経済は無限期間であり、均衡を定義する連立方程式は無次元になってしまうためである。したがって、我々は別の手法を探さねばならない。

近年のマクロ経済学の進展は、如何にして上記の問題や、さらに複雑な動学最適化問題を実際に解いていくか、その解法の進展と密接な関係がある。Closed Form で Policy Function を求めることができない以上、なんらかの近似を用いて解くことになる。解法には大きく分けて (1) 離散近似、またはスプライン補間によるノンパラメトリック法と (2) 線形、または多項式によるパラメトリック法に分けることが出来る。ここでは、数ある手法のうち、もっとも単純で、なおかつ、諸変数がスムーズに動く経済モデルでは広く適用可能な線形近似法を用いる。離散近似手法に関しては、動的計画法の広義の際に多少触れる予定である。

## 5 線形近似手法 (Linear-Quadratic Methods)

この手法はもともと Blanchard and Kahn[1980] により開発されたものであり、King, Plosser, and Rebelo [1988a, b] がさらに利用しやすい形に拡張して紹介したため、Blanchard-Kahn 法あるいは KPR 法とも呼ばれる。基本的なアイデアは、Policy Functions が Predetermined Variables に関して線形である、と仮定し、線形関数の中で、「もっともらしいもの」を選ぶというものである。具体的には、定常状態において経済システムを線形近似することで Saddle Path が線形になることを保証し、その上で、Saddle Path を導く。この手法は、最適成長モデルで Saddle Path を線形近似して求める手法と同一であるが、この経済には不確実性が存在しており、将来の不確実性を考慮して代表的個人が行動を決定するところが異なっている。

まず、上記の基本モデルを Random Lagrange Methods を用いて一階条件を求める。ラグランジュアンを次のように作る。

$$L = E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - l_t) + \beta^t \lambda_t (e^{z_t} F(k_t, l_t) + (1 - \delta) k_t - c_t - k_{t+1}) \right]. \quad (15)$$

これを  $t$  期における情報を用いて、 $c_t$ 、 $l_t$ 、 $k_{t+1}$  について微分する。

$$E_t \left[ \frac{-\partial}{\partial c_t} u(c_t, 1 - l_t) - \lambda_t \right] = 0, \quad (16)$$

$$E_t \left[ \frac{\partial}{\partial l_t} u(c_t, 1 - l_t) + \lambda_t e^{z_t} \frac{\partial}{\partial l_t} F(k_t, l_t) \right] = 0, \quad (17)$$

$$E_t \left[ -\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} \left( e^{z_{t+1}} \frac{\partial}{\partial k_{t+1}} F(k_{t+1}, l_{t+1}) + (1 - \delta) \right) \right] = 0. \quad (18)$$

ところで、最初の 2 つの式では、条件付期待値オペレーターの中には  $t$  期で決定される変数しか存在しない。したがって、それらは  $t$  期において不確実性は存

在せず、条件付期待値を外すことができる。しかし、(18)の中には、 $t$  期においては確定していない変数が入っており、条件付期待値を外すことはできない。ただ、 $\lambda_t$  は  $t$  期において確定しており、それとコンスタントの  $\beta$  のみ期待値オペレーターから外すことが出来る。したがって、以下のように書き直すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial c_t} u(c_t, 1 - l_t) = \lambda_t, \quad (19)$$

$$-\frac{\partial}{\partial l_t} u(c_t, 1 - l_t) = \lambda_t e^{z_t} \frac{\partial}{\partial l_t} F(k_t, l_t), \quad (20)$$

$$\lambda_t = \beta E_t \left[ \lambda_{t+1} \left( e^{z_{t+1}} \frac{\partial}{\partial k_{t+1}} F(k_{t+1}, l_{t+1}) - \delta \right) \right]. \quad (21)$$

$\lambda_{t+1}$  は、 $t$  期においては確率変数であり、それゆえに Random Multiplier と呼ばれる。最初の 2 つの式は、以下のように限界代替率で表すことが出来る。

$$\frac{-\frac{\partial}{\partial l_t} u(c_t, 1 - l_t)}{\frac{\partial}{\partial c_t} u(c_t, 1 - l_t)} = e^{z_t} \frac{\partial}{\partial l_t} F(k_t, l_t). \quad (22)$$

この経済では、生産物は 1 種類であり、その価格が 1 になっている。上式の左辺は消費と余暇の限界代替率であり、右辺は労働の限界生産性、市場均衡においては賃金に等しい。

動学最適化問題の解を特定するには、さらに、境界条件が必要である。最適成長とのアナロジーを用いれば、以下のような横断面の条件を課すことになる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_0 [\beta^t \lambda_t k_t] = 0. \quad (23)$$

横断面の条件は、最適化の過程で生じるものであり、本来外生的に与えるものではない。無限期間で、かつ不確実性がある場合、どのような横断面の条件を課すか、一般的な公式は今のところ、便利な形では存在しないが、上記の横断面の条件と他の最適化条件を満たす path が存在すれば、それは最適化問題の解になっていることを証明することは可能である。すなわち、上記の条件は十分条件として機能するのである<sup>13</sup>。実際の作業では、さらに厳しい

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_0 [\beta^t k_t] = 0, \quad (24)$$

の条件を課すことが多い。この条件を満たし、かつ他の最適化条件を同時に満たすものがあれば、それは実際の最適化問題の解となっていると考えるのである。

## 6 カリブレーション

ここまでのところ、効用関数と生産関数には特殊な仮定をおかずに議論を進めてきたが、以降の数式の変形を行う際には、関数形を特定化するほうが便利で

<sup>13</sup>詳しくは、Stokey, Lucas, and Prescott [1989], *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press. を参照せよ。

ある。そこで、この節では、カリブレーションと呼ばれる手法により、関数形やパラメータの値を特定化する。カリブレーションが、実際にはどのようなプロセスのことを指すのかは、必ずしも統一された見解があるわけではないが、ここでは、基本的には Cooley ed.[1995] に従って解説する<sup>14</sup>。モデルを特定化する、ということは、モデルに制約を課すことに等しい。カリブレーションとは、もともと目盛りをつける、または正しい価値を決定する、という意味である。動学一般均衡分析においては、以下の作業のことを指す。

(1) 探すパラメータの取りうる値を制限する。これには、経済理論とデータをつき合わせる必要がある。例えば、投資と資本の比率が長期的に 0.1 であれば、減価償却率  $\delta$  を 0.1 に設定するのである。しかし、どのようにパラメータの値を設定する手続きには様々なものがあり、ときには他の実証研究の結果を適用することもある。なお、近年では、モデルを直接推計することでパラメータを得ることもある。これは構造モデルの推計という一大分野となりつつあり、GMM や ML を用いて一階条件式を推定する手法や、境界条件も使い、Simulation 法により推定する手法など、近年最も進歩の大きな分野である。

(2) 後にモデルを評価する際に用いるデータを設定する。(1)においてもデータを用いているので、あるデータとモデルの結果は恒等的に一致する。たとえば、投資と資本の比率から  $\delta$  の値を求めた場合、モデルの評価に、 $\delta$  が投資・資本比率に等しいかどうかを用いても意味がないのである。したがって、そのような恒等関係にない指標を設定する必要がある。また、モデルの目標に沿った評価基準を設定する必要がある。例えば、失業が存在しないモデルにおいて、失業率の値を評価の指標に用いても意味のある結果を得ることはできないということである。初期の RBC では、消費・投資と総生産の間の共分散が用いられた。

(3) (1) で求められたパラメータの値をモデルに入れて解き、(2) で与えられた指標をモデルの予測値と比較する。

では、Cooley ed.[1995] に従い、先のモデルに関数構造とパラメータを組み込んでみる<sup>15</sup>。

まず、所得、資本、労働の分配を見ると、各々の分配率は大きく変化してはいない。これは、労働分配率が年によらず一定の生産関数を用いて構わないことを示唆する。分配率が生産水準に寄らず一定の生産関数とは、コブ・ダグラス型である。すなわち

$$Y_t = e^{z_t} A K_t^\theta L_t^{1-\theta}. \quad (25)$$

次に、余暇消費時間はほとんど一定であり、実質賃金は一定の率で上昇している。一人当たり消費と実質賃金がほぼ一定の率で成長していることも考慮する

<sup>14</sup>初期の RBC の文献においてカリブレーションという言葉は計量経済学的手法を採用せずに独自の手法を用いる、というニュアンスを多分に含んでいる。しかし、計量的手法はかならずしも t-検定や F-検定に限定される必要は無く、統計的手法を用いてモデルの評価を行うことと考えれば、特にカリブレーションと計量分析を区別する必要は無いと思える。

<sup>15</sup>なお、1990 年代初頭のアメリカ経済を念頭に置いているので、日本経済を念頭に置く場合は、また異なるカリブレーションが必要になると思われるので注意されたい。

と、これは消費と余暇の代替の弾力性が1であることを示唆する。すなわち、瞬時的効用関数もコブ・ダグラス型である。

$$u(c_t, 1 - l_t) = \frac{(c_t^{1-\alpha} (1 - l_t)^\alpha)^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}. \quad (26)$$

ここで、 $1/\sigma$  は異時点間の弾力性であり、この推定は非常に困難であることが知られている。なぜなら、 $\sigma$  の水準は均斉成長経路自体には影響を与えず、そこへの移行過程にのみ影響をあたえるためである。ここでは、単純なケースとして、 $\sigma = 1$ 、すなわち対数効用のケースのみを考えることにする<sup>16</sup>。

$$u(c_t, 1 - l_t) = (1 - \alpha) \ln c_t + \alpha \ln(1 - l_t). \quad (27)$$

ここまでの作業で関数形は特定できたことになり、残るはパラメータの設定である。長期成長率を外生  $\gamma$  と考え、上記の [基本モデル] を書き直すと、

$$\text{Max } E_o \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t ((1 - \alpha) \ln c_t + \alpha \ln(1 - l_t)) \right], \quad (28)$$

$$\text{s.t. } (1 + \gamma) k_{t+1} = e^{z_t} A k_t^\theta l_t^{1-\theta} + (1 - \delta) k_t - c_t, \text{ for all } t, \quad k_o > 0: \text{ given}, \quad (29)$$

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1}. \quad (30)$$

ただし、成長理論の時、 $K$  や  $C$  を  $A$  で割ったように、資本と消費を経済成長因子  $(1 + \gamma)^t$  で割っていることに注意せよ。

まず、生産関数の資本弾力性  $\theta$  の値を考える。これは、良く知られているように、分配面からみた場合の、国民所得における資本分配率に等しくなる。Cooley ed. [1995] は、この値を 0.40 と試算している。

次に、均斉成長経路のデータと、このモデルの生み出す均斉成長経路の予測値を比較し、他のパラメータの設定を行う。オイラー方程式は以下ようになる。

$$E_t \left[ -\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} (1 + \gamma)^{-1} \left( e^{z_{t+1}} \frac{\theta A k_{t+1}^\theta l_{t+1}^{1-\theta}}{k_{t+1}} + (1 - \delta) \right) \right] = 0. \quad (31)$$

均斉成長経路では、 $z_t = 0$  for all  $t$  であり、不確実性は存在せず、また各変数が一定になるため、上式は

$$\frac{\theta y}{k} + (1 - \delta) = \frac{1 + \gamma}{\beta}. \quad (32)$$

次に、余暇と消費の限界代替率が賃金に等しかったため、均斉成長経路では、以下の関係を導くことが出来る。

<sup>16</sup>無論、この仮定にはなんの根拠も無いが、実際、 $\sigma$  の様々な手法による推定値には幅が大きく、どの値を採用しても問題が残る。様々な  $\sigma$  の値に関して simulation を行うことが望ましいと思われる。なお、この  $\sigma$  の推計は、ミクロ・マクロの様々なデータを駆使し、オイラー方程式や Policy Function 等、多くの情報に基づき多くの研究がなされている。

$$(1 - \theta) \frac{y}{c} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{l}{1 - l}. \quad (33)$$

最後に、資源制約より、均斉成長経路上では、

$$(1 + \gamma) \frac{k}{y} = (1 - \delta) \frac{k}{y} + \frac{i}{y}. \quad (34)$$

ただし、

$$i = (\delta + \gamma) k, \quad (35)$$

であり、投資を意味する。長期の投資・資本比率は、公表値に従うと 0.076 であるから、経済成長率  $\gamma$  が年間 2.8% とすれば減価償却率  $\delta = 0.048$  であり、四半期では 0.012 になる。 $\theta, \delta$  が特定化できれば、割引因子  $\beta$  も求めることができ、 $\beta = 0.947$ , 四半期では 0.987 になる。次に、家計の余暇・消費選択に関してであるが、Becker 等による家計行動の分析によると、家計は睡眠などのやむをえない時間を除いた、discretionary time の 1/3 を市場活動におこなう。ここでは、家計は 0.31 の時間を労働に当てるとする。すると、(33) より、 $y/c$  がおよそ 1.33 であることを利用すると、 $\alpha/(1 - \alpha) = 1.78$  を得ることが出来る。

最後に、Solow Residuals,  $z_t$  であるが、これまでの特定化によって、GDP, K, L のデータから計算することができる。具体的には

$$z_t - z_{t-1} = (\ln Y_t - \ln Y_{t-1}) - \theta (\ln K_t - \ln K_{t-1}) - (1 - \theta) (\ln l_t - \ln l_{t-1}), \quad (36)$$

である。これから、 $z_t$  の自己相関係数  $\eta$  を計算すると、非常に高い相関がある。Cooley に従い、ここでは  $\eta = 0.95$  とする。また、 $\varepsilon_t$  の標準偏差も同様に計算することが可能であり、 $\sigma_\varepsilon = 0.007$  とする。

以上の作業により、ここでのモデルの関数形とパラメータはすべて特定化し終わったことになり、具体的に数値計算することが可能となった<sup>17</sup>。パラメータを整理すると、以下ようになる。

$\theta$	$\delta$	$\eta$	$\sigma_\varepsilon$	$\gamma$	$\beta$	$\sigma$	$\alpha$
0.40	0.012	0.95	0.007	0.026	0.987	1	0.64

## 7 (対数) 線形近似による解法

オイラー方程式と資源制約を、前節で特定した関数形を用いて書き直すと、以下ようになる。

$$(1 - \theta) \frac{e^{z_t} A k_t^\theta l_t^{1-\theta}}{c_t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{l_t}{1 - l_t}, \quad (37)$$

<sup>17</sup>なお、生産関数の中の A 項が特定されていないが、我々の分析では A の水準は解に影響を与えない。これは、コブ・ダグラスなどの特殊な仮定によるものであり、一般的には A の水準を決めねばならない。



$$\frac{(1 - \alpha)}{c_t} = \lambda_t, \quad (38)$$

$$(1 + \gamma) k_{t+1} = e^{z_t} A k_t^\theta l_t^{1-\theta} + (1 - \delta) k_t - c_t, \quad (39)$$

$$\lambda_t = \beta E_t \left[ \lambda_{t+1} (1 + \gamma)^{-1} \left( e^{z_{t+1}} \frac{\theta A k_{t+1}^\theta l_{t+1}^{1-\theta}}{k_{t+1}} + (1 - \delta) \right) \right], \quad (40)$$

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1}. \quad (41)$$

Policy Functions を線形のクラスの中から探すには、いくつかの方法がある。一つは、Linear Quadratic 手法といい、目的関数を二次関数で、制約式を線形でそれぞれ均斉成長経路上で近似する手法である。もう一つの手法は、上記の一連の均衡条件を均斉成長経路上で線形近似する手法である。実は、両者は同値であることがわかっている。また、Random Multiplier を用いず、Dynamic Programing の形に問題を書き直し、目的関数を二次関数で、制約式を線形で近似し、Value Function、ないし Policy Functions を直接計算する手法もある。この、Dynamic Programing を用いる手法は広い応用可能性を持っており、今日では微分不可能な経済モデルにも応用されている。しかし、かなり技術的な説明が必要になる。ここでは、Blanchard and Kahn[1980] 以降、長い伝統を持つ、均衡条件式を線形近似する手法を採用する。この手法は、経済モデルが微分可能である限り適用可能であり、かつコンピューターに課す負担がスピード、メモリーいずれの点でも小さく、大きなモデル(方程式の数が数百を超えても)であっても、現在の PC ならば 1 分もかからずに計算を終えることが可能である。

まず、上記のシステムを均斉成長経路上で  $(c_t, k_t, l_t, \lambda_t, z_t, \varepsilon_t) = (c, k, l, \lambda, 0, 0)$  for all  $t$  で線形近似する。線形近似は、テイラー展開を行うわけであるが、上記のようなコブ・ダグラス型のモデルでは、対数変換をしてから線形近似するほうが後の問題が容易になることが多い。そこで、まず対数線形近似について簡単に説明する。

一般に、以下を満たす連続微分可能な関数があるとする。

$$g(y) = f(x), x \in R. \quad (42)$$

この式を  $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$  で線形近似すると、単純なテイラー展開により

$$g(\bar{y}) + \frac{dg}{dy}(\bar{y})(y - \bar{y}) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})(x - \bar{x}). \quad (43)$$

対数線形近似を行う場合は、以下の恒等式を利用する。

$$x = e^{\ln x} \quad (44)$$

そして、新たに変数を定義し

$$h = \ln x, \quad (45)$$

$$j = \ln y, \quad (46)$$

$y = f(x)$  を書き直すと

$$g(e^j) = f(e^h). \quad (47)$$

これを  $j, h$  に関してテイラー展開を行う。すると

$$g(e^{\bar{j}}) + e^{\bar{j}} \frac{dg}{dy}(e^{\bar{j}}) (j - \bar{j}) = f(e^{\bar{h}}) + \frac{df}{dx}(e^{\bar{h}}) e^{\bar{h}} (h - \bar{h}). \quad (48)$$

$j, h$  を  $y, x$  に戻すと

$$g(\bar{y}) + \bar{y} \frac{dg}{dy}(\bar{y}) (\ln y - \ln \bar{y}) = f(\bar{x}) + \bar{x} \frac{df}{dx}(\bar{x}) (\ln x - \ln \bar{x}). \quad (49)$$

これを元の (43) と比較すると、両辺の微分係数に、 $\bar{y}$  ないし、 $\bar{x}$  が乗じられていることのみが異なる。

$$\Delta y = \ln y - \ln \bar{y}, \quad \Delta x = \ln x - \ln \bar{x}, \quad (50)$$

と定義し、 $g(\bar{y}) = f(\bar{x})$  が成立しているとなると、対数近似式は以下のように書くことが可能である。

$$\bar{y} \frac{dg}{dy}(\bar{y}) \Delta y = \bar{x} \frac{df}{dx}(\bar{x}) \Delta x. \quad (51)$$

例えば、コブ・ダグラス型の生産関数が以下のように与えられたとする。

$$Y = AK^\theta L^{1-\theta}. \quad (52)$$

この式を  $\bar{Y} = \bar{A}\bar{K}^\theta \bar{L}^{1-\theta}$  で対数線形近似する場合は、

$$\bar{Y}(\Delta Y) = \bar{A}\bar{K}^\theta \bar{L}^{1-\theta} \Delta A + \theta \bar{A}\bar{K}^{\theta-1} \bar{L}^{1-\theta} \Delta K + (1-\theta) \bar{A}\bar{K}^\theta \bar{L}^{-\theta} \Delta L. \quad (53)$$

しかし、さらに整理することが可能であり、

$$\Delta Y = \Delta A + \theta \Delta K + (1-\theta) \Delta L. \quad (54)$$

であり、非常に単純になることがわかる。

(37) – (41) を均斉成長経路上で対数線形近似する。ただし、 $z_t$  は、すでに対数の形になっているので、 $z_t$  のみはそのまま線形近似することにする。すると、以下の式を得ることができる。

$$\Delta z_t + \theta \Delta k_t + (1-\theta) \Delta l_t - \Delta c_t = \frac{1}{1-l} \Delta l_t, \quad (55)$$

$$-\Delta c_t = \Delta \lambda_t, \quad (56)$$

$$\Delta \lambda_t = E_t \Delta \lambda_{t+1} + \mu E_t \Delta z_{t+1} + \mu(\theta-1) E_t \Delta k_{t+1} + \mu(1-\theta) E_t \Delta l_{t+1}, \quad (57)$$

$$(1 + \gamma) \frac{k}{y} \Delta k_{t+1} = \Delta z_t + \theta \Delta k_t + (1 - \theta) \Delta l_t + (1 - \delta) \frac{k}{y} \Delta k_t - \frac{c}{y} \Delta c_t, \quad (58)$$

$$\Delta z_{t+1} = \eta \Delta z_t + \Delta \varepsilon_{t+1}. \quad (59)$$

ただし、

$$\mu = \frac{\theta \beta y}{(1 + \gamma) k}, \quad (60)$$

$$y = A k^\theta l^{1-\theta}, \quad (61)$$

なお、前節までのカリブレーションにより、上記の線形差分方程式のパラメータは数値的に解くことが可能である。具体的には、均斉成長系路上の均衡方程式である、

$$\frac{\theta y}{k} + (1 - \delta) = \frac{1 + \gamma}{\beta}, \quad (62)$$

$$(1 - \theta) \frac{y}{c} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{l}{1 - l}, \quad (63)$$

$$(\gamma + \delta) \frac{k}{y} = 1 - \frac{c}{y}, \quad (64)$$

$$y = k^\theta l^{1-\theta}, \quad (65)$$

の連立方程式を解くことで得ることが出来る。この場合は、数値計算に頼らずに手で解くことができ、

$$\frac{y}{k} = \frac{1}{\theta} \left[ \frac{1 + \gamma}{\beta} - (1 - \delta) \right], \quad (66)$$

$$\frac{c}{y} = 1 - (\gamma + \delta) \frac{k}{y}, \quad (67)$$

$$l = \frac{\frac{1-\alpha}{\alpha} (1-\theta) \frac{y}{c}}{\left[ 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} (1-\theta) \frac{y}{c} \right]}, \quad (68)$$

である。しかし、多少複雑なシステムになると、上記のように解析的にパラメータを解くことができるのはきわめて稀になる。解析的に解くことが出来ない場合は、Root Finding をコンピューターに行わせる必要がある。Matlab であればコマンド `fzero` が、方程式の解を与える<sup>18</sup>。

<sup>18</sup>非線形方程式の解を求める手法には様々なものがあり、今日でも進歩が続いている一大分野でもある。計量経済学において最尤法 (Maximum Likelihood Methods) を実践するときにも、同様の問題に直面する。中級・上級レベルの計量経済学のテキストには、大抵、一連の手法の詳しい解説が載っている。なお、`fzero` は非常に単純な手法しか含んでおらず、複雑な非線形方程式の解を計算するには限界がある。Matlab には別売りで、様々な Root Finding を行う ToolBox が販売されている。

次に、(55)-(59) で与えられた線形の差分方程式システムの解を具体的に導出する。我々の目標は、線形な Policy Functions の導出であった。すなわち、目標となるのは、

$$\Delta c_t = C_1 \Delta k_t + C_2 \Delta z_t, \quad (69)$$

$$\Delta l_t = C_3 \Delta k_t + C_4 \Delta z_t, \quad (70)$$

の形状の関数である。今、 $\Delta c_t$  に関する Policy Function が手に入ったとしよう。すると、(55) から直ちに  $\Delta l_t$  に関する Policy Function も計算できる。さらに、(56) から、 $\Delta \lambda_t$  に関する Policy Function も計算可能である。すなわち、消費と労働供給いずれかの Policy Function か、乗数に関する Policy Function を入手できれば、他の Policy Function は直ちに計算することが出来る。消費、労働、乗数のどれを先に計算しても良いことになる。Blanchard and Kahn[1980] は乗数を消去し、残りの Control Variable のどちらかを選択している。Burnside[1999] や King, Plosser, and Rebelo [1988a, b] では、乗数のみを残している。いずれの方法でも同じ結果を得ることが出来るが、後者の方が、複雑なシステムでは手作業が減少するメリットがある。そのため、ここでは乗数のみを残す手法を解説する。

あらかじめ作業の道筋を解説すると、以下ようになる。

- (1) Control Variables を乗数と State Variables, Shocks の関数の形に書き換える。
- (2) 乗数と State Variables, Shocks 項に関する連立差分方程式を作る。
- (3) Jordan の標準形を用いて、発散する根を消去する。
- (4) 乗数に関する Policy Function を得る。
- (5) (1) で求めた関数を用い、Control Variables に関する Policy Function を得る。

では、まず (1) から始めてみる。(55) と (56) を変形し

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-l} - 1 + \theta \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_t \\ \Delta l_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta k_t \\ \Delta \lambda_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta z_t. \quad (71)$$

次に、(57) と (58) を変形し、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\mu(1-\theta) & 1 \\ -(1+\gamma)\frac{k}{y} & 0 \end{pmatrix} E_t \begin{pmatrix} \Delta k_{t+1} \\ \Delta \lambda_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \theta + (1-\delta)\frac{k}{y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta k_t \\ \Delta \lambda_t \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} 0 & -\mu(1-\theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_t \begin{pmatrix} \Delta c_{t+1} \\ \Delta l_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c/y & -(1-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c_t \\ \Delta l_t \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} -\mu \\ 0 \end{pmatrix} E_t \Delta z_{t+1} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Delta z_t. \end{aligned} \quad (72)$$

上の 2 式を以下のように書くことにする。

$$M_{cc} V_t = M_{cs} X_t + M_{ce} z_t, \quad (73)$$

$$M_{ss0}E_tX_{t+1} + M_{ss1}X_t = M_{sc0}E_tV_{t+1} + M_{sc1}V_t + M_{se0}E_tz_{t+1} + M_{se1}z_t, \quad (74)$$

ただし、 $V_t = (c_t, l_t)'$ 、 $X_t = (k_t, \lambda_t)'$  である。

なお、以降の手法は、上記のモデルのみでなく、諸変数がスムーズに動く一般の動学均衡分析を解く際に適用可能なものであり、極力一般的なケースを考慮して説明する。状態変数や Control Variables がたとえ数百あっても、上記の2本の式の形状に変更可能である限り、応用可能である。

$M_{cc}$  に逆行列  $M_{cc}^{-1}$  が存在すると仮定すると<sup>19</sup>、両式をまとめることが可能であり、

$$V_t = M_{cc}^{-1}M_{cs}X_t + M_{cc}^{-1}M_{ce}z_t, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} M_{ss0}E_tX_{t+1} + M_{ss1}X_t &= M_{sc0}E_t(M_{cc}^{-1}M_{cs}X_{t+1} + M_{cc}^{-1}M_{ce}z_{t+1}) + \\ &M_{sc1}(M_{cc}^{-1}M_{cs}X_t + M_{cc}^{-1}M_{ce}z_t) + M_{se0}E_tz_{t+1} + M_{se1}z_t, \end{aligned} \quad (76)$$

整理すると

$$E_tX_{t+1} = WX_t + RE_tz_{t+1} + Qz_t \quad (77)$$

ただし、

$$W = -(M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce})^{-1}(M_{ss1} - M_{sc1}M_{cc}^{-1}M_{cs}), \quad (78)$$

$$R = (M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce})^{-1}(M_{se0} + M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce}), \quad (79)$$

$$Q = (M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce})^{-1}(M_{se1} + M_{sc1}M_{cc}^{-1}M_{ce}), \quad (80)$$

以上で、Predetermined Variables と乗数に関する連立差分方程式を得ることが出来た。次に、Step (3) として、Jordan の標準形を用いて W を対角化すると、

$$P^{-1}X_{t+1} = \Lambda P^{-1}X_t + P^{-1}RZ_{t+1} + P^{-1}QZ_t, \quad (81)$$

ただし、 $\Lambda$  は W の固有値を対角成分にもつ対角行列であり、P は固有ベクトルからなる行列であり、以下の式をみたとす。

$$P\Lambda P^{-1} = W. \quad (82)$$

直交化された新たな変数を以下のように定義する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{\lambda}_t \end{pmatrix} = P^{-1}X_t. \quad (83)$$

ここでは Predetermined Variables が資本の一つしかないため  $\tilde{x}_t$  は 1 次元ベクトルになっているが、より高次元の経済モデルでは、Predetermined Variables、または State Variables の次元に等しいベクトルとなる。

<sup>19</sup> $M_{cc}$  に逆行列が存在しない場合、ここでの手法を適用することはできない。Control Variables の線形結合をつくり新たに変数を定義しなおし  $M_{cc}$  を正則にすることが可能であるが、非常に複雑な作業であり、この手法の限界であると言える。

最適成長モデルの際と同様に、 $\Lambda$  の発散根を消去し、収束していく経路のみを考えていく。差分方程式においては固有値の絶対値が 1 よりも大きいときは発散根、1 よりも小さいときは収束根であった。操作が楽になるように、 $\Lambda$  の固有値を、絶対値が小さい順にならべかえ、対応する行列  $P$  もまた並べ替える。そして

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (84)$$

$\Lambda_1$  は、対角成分の絶対値が 1 よりも小さく、 $\Lambda_2$  は絶対値が 1 よりも大きい対角行列である。ここで扱っているモデルでは、制約条件が凸であり、目的関数が凹になっているので、解はただ一つ常に存在するため、2 つの固有値の絶対値のいずれかは 1 よりも大きく、もうひとつは 1 よりも小さくなっている。しかし、外部性や公共財、収穫逓増等を含むモデルでは、一般に、 $\Lambda_1$  の次元が Predetermined Variables の次元に等しくなるとは限らない。もしも、 $\Lambda_1$  の次元のほうが Predetermined Variables の次元よりも大きい場合、この経済には収束解が連続的に存在し、モデルの解は一つに決まらない。このような現象を indeterminacy と呼ぶ。indeterminacy が発生している場合、均衡が非常に不安定になる可能性もあり、サンスポット均衡と呼ばれる現象が発生するかもしれない。逆に、 $\Lambda_1$  の次元が Predetermined Variables の次元よりも大きい場合、収束経路は存在せず、定常状態に収束する均衡が存在しない状況にある。ここでは、定常状態に収束する均衡が一意に決定される状況のみを考える。

$W$  と  $P, R, Q$  を、それぞれ  $\Lambda_1$  の次元に対応するように分割する。ここでは、単に 4 つに分割するだけである。

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_\lambda \end{pmatrix}, \quad (85)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_\lambda \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad (86)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} \\ P^{21} & P^{22} \end{pmatrix}. \quad (87)$$

すると、以下の関係があることが容易に確認できる。

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}\Lambda_1P^{11} + P_{12}\Lambda_2P^{21} & P_{11}\Lambda_1P^{12} + P_{12}\Lambda_2P^{22} \\ P_{21}\Lambda_1P^{11} + P_{22}\Lambda_2P^{21} & P_{21}\Lambda_1P^{12} + P_{22}\Lambda_2P^{22} \end{pmatrix}. \quad (88)$$

以上の行列の分解を用いると、(81) の第一式は、以下のように書くことが出来る。

$$E_t \tilde{x}_{t+1} = \Lambda_1 \tilde{x}_t + (P^{11}R_x + P^{12}R_\lambda) E_t z_{t+1} + (P^{11}Q_x + P^{12}Q_\lambda) z_t. \quad (89)$$

上の式は、来期の  $E_t \tilde{x}_{t+1}$  が、今期の  $\tilde{x}_t$  とショック項のみに依存していることを示しており、Policy Function に近い形状になっている。一方、第二式は

$$E_t \tilde{\lambda}_{t+1} = \Lambda_2 \tilde{\lambda}_t + (P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda) E_t z_{t+1} + (P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda) z_t, \quad (90)$$

になっている。ここで、 $\Lambda_2$  の対角成分の絶対値が 1 より大きいため (そのように  $\Lambda_2$  を定義したため)、 $\tilde{\lambda}_t$  は発散する経路であることがわかる。そこで、その発散経路を消去するために、上の式を Forward に解くことにする。ここで、Forward に解く、というのは、以下の作業を指す。

$$\tilde{\lambda}_t = \Lambda_2^{-1} E_t \tilde{\lambda}_{t+1} - \Lambda_2^{-1} [(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda) E_t z_{t+1} + (P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda) z_t], \quad (91)$$

$$\tilde{\lambda}_t = - \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} [(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda) E_t z_{t+1+j} + (P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda) E_t z_{t+j}]. \quad (92)$$

この右辺は  $\tilde{\lambda}_t$  が発散しないような水準であり、将来のショックに関する予測のみに依存している。なお、 $\Lambda_2^{-1}$  の絶対値は 1 よりも小さいため、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\Lambda_2^{-1})^j E_t \tilde{\lambda}_{t+j+1} = 0, \quad (93)$$

となることを利用している。

前節までのモデルのように、ショック項  $z_t$  が AR1 に従っている場合、その期待値に依存している  $\tilde{\lambda}_t$  は  $z_t$  の簡単な関数として書くことが可能であり、

$$z_{t+1} = \Pi z_t + \varepsilon_{t+1}, \quad (94)$$

$$E_t z_{t+1} = \Pi z_t, \quad (95)$$

ならば、

$$\tilde{\lambda}_t = \Psi z_t, \quad (96)$$

$$\Psi = - \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} [(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda) \Pi + (P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda)] \Pi^j z_t. \quad (97)$$

次に、 $\tilde{\lambda}_t, \tilde{x}_t$  を、元の系列、 $X_t = (k_t, \lambda_t)$  に戻すと、

$$\lambda_t = - (P^{22})^{-1} P^{21} x_t + (P^{22})^{-1} \tilde{\lambda}_t. \quad (98)$$

ところで

$$x_{t+1} = W_{11} x_t + W_{12} \lambda_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t, \quad (99)$$

であったから、

$$x_{t+1} = (P_{11}\Lambda_1 P^{11} + P_{12}\Lambda_2 P^{21})x_t + (P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22})\lambda_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t, \quad (100)$$

$$x_{t+1} = \left( P_{11}\Lambda_1 \left[ P^{11} - P^{12} (P^{22})^{-1} P^{21} \right] \right) x_t + (P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}) (P^{22})^{-1} \tilde{\lambda}_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t. \quad (101)$$

ここで、逆行列に関する公式を用いる。一般に、

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \quad (102)$$

の逆行列は、以下のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} D^{-1} & -D^{-1} F H^{-1} \\ -H^{-1} G D^{-1} & H^{-1} + H^{-1} G D^{-1} F H^{-1} \end{pmatrix}, \quad (103)$$

$$D = E - F H^{-1} G. \quad (104)$$

これを利用すると、

$$x_{t+1} = (P_{11}\Lambda_1 P_{11}^{-1})x_t + (P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}) (P^{22})^{-1} \tilde{\lambda}_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t. \quad (105)$$

$\tilde{\lambda}_t = \Psi z_t$  であり、

$$x_{t+1} = (P_{11}\Lambda_1 P_{11}^{-1})x_t + (P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}) (P^{22})^{-1} \Psi z_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t, \quad (106)$$

$$x_{t+1} = (P_{11}\Lambda_1 P_{11}^{-1})x_t + \left[ (P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}) (P^{22})^{-1} \Psi + R_x \Pi + Q_x \right] z_t, \quad (107)$$

新たに係数を定義すると、

$$x_{t+1} = \Gamma_{xx} x_t + \Gamma_{xz} z_t. \quad (108)$$

$\lambda_t$  に関しては、

$$\lambda_t = - (P^{22})^{-1} P^{21} x_t + (P^{22})^{-1} \Psi z_t, \quad (109)$$

もともとの Control Variables  $V_t = (c_t, l_t)$  に戻すと、

$$V_t = M_{cc}^{-1} M_{cs} \begin{pmatrix} I \\ - (P^{22})^{-1} P^{21} \end{pmatrix} x_t + \left[ M_{cc}^{-1} M_{cs} \begin{pmatrix} 0 \\ - (P^{22})^{-1} \Psi \end{pmatrix} + M_{cc}^{-1} M_{ce} \right] z_t, \quad (110)$$



新たに係数を定義すると、

$$V_t = \Gamma_{ux}x_t + \Gamma_{uz}z_t. \quad (111)$$

上記の式が Policy Functions になる。今期の消費と余暇は、今期の State Variables、すなわち資本水準と今期のショックおよび将来のショックに関する期待に関する線形の関数になっているのである。以上で、我々のモデルは解けたことになる。

## 8 Impulse Response Functions

前節で、我々はモデルの Policy Functions を導出した。本節ではその Policy Functions を用いて、シミュレーションを行う手法の一つ、Impulse Response Functions を説明する。これは時系列分析で広く採用されている手法であり、ある期にショックが生じた場合、そのショックが経済諸変数にどのような影響を与えていくか、時系列で追いかけるものである。例えば、今期、技術ショックが生じ、生産性が1%上昇したとする。この結果、今期以降の消費や投資、総生産にどのような影響が生じるかを Impulse Response は示すのである。Policy Functions が手元にある場合、この計算は非常にたやすい。

この経済のショック要因は  $z_{t+1} = \Pi z_t + \varepsilon_{t+1}$  における  $\varepsilon_{t+1}$  である。 $\varepsilon_{t+1}$  の変化が他の諸変数にどのような影響を与えるかを考察する。 $z_t$  が変化したとき、Predetermined Variables がどのように変化するかは、以下の式で与えられていた。

$$x_{t+1} = \Gamma_{xx}x_t + \Gamma_{xz}z_t. \quad (112)$$

また、Predetermined Variables が変化したとき、Control Variables がどのように変化するかは、Policy Functions で与えられる。

$$W_t = \Gamma_{ux}x_t + \Gamma_{uz}z_t. \quad (113)$$

以下のように新たに変数を定義する。

$$s_t = \begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix}. \quad (114)$$

すると、 $s_t$  の変化は、以下の式であたえられる。

$$s_{t+1} = M s_t + \hat{\varepsilon}_{t+1}, \quad (115)$$

$$M = \begin{pmatrix} \Gamma_{zz} & \Gamma_{zz} \\ 0 & \Pi \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}. \quad (116)$$

$\varepsilon_t$  が、 $t+1$  期に 1 になり、それ以外は全てゼロであるとする。すると、来期以降の Predetermined Variables の動きは、

$$s_{t+j} = M^j s_t + M^{j-1} \hat{\varepsilon}_{t+1}, \quad (117)$$

である。また、消費や余暇などの Control Variables は

$$V_{t+j} = (\Gamma_{ux}, \Gamma_{uz}) s_{t+j}, \quad (118)$$

で計算できる。以上の 2 式が Impulse Response Functions を作り出す。

## 9

## 10 Matlab Programs

本節では、前節までで説明したマクロモデルの Impulse-Response Functions を導出する Matlab プログラムを掲載する。プログラムは 2 つに分かれており、プログラム 1 はモデルの構造が格納されている The Main Program であり、プログラム 2 は、プログラム 1 で与えられた行列要素を元に、Policy Functions を計算するモジュールである。プログラム 2 は、モデルによらず一般的に利用可能である。なお、% で始まる各行は Matlab におけるコメント文である。

### [プログラム 1] (The Main Program)

```
%
%
%
%
clear all;
format short;
%
% Parameter Values
%
delta = 0.012; % Depeciation (annual)
beta = 0.987;
gam = 0.026;
eheta = 0.95;
alpha = 0.64;
ceta = 0.40;
%
% Special Values for our model
%
%
yovk = (1/ceta)*((1+gam)/beta - (1-delta));
covy = 1-(gam+delta)*(1/yovk);
le = ((1-alpha)/alpha)*(1-ceta)*(1/covy)/(1+((1-alpha)/alpha)*(1-ceta)*(1/covy));
mhu = ceta*yovk*beta/(1+gam);
%
n=1; % The number of the predetermined variables
```

```

%
iter1=30; % The number of iteration for Impulse-Responses
%
%
%
% Matrices For subroutine to solve dynamic optimization problem
%
%
% MCC matrix
%
mcc=zeros(2,2);
mcc(1,1) = 1;
mcc(1,2) = 1/(1-le) -1 +ceta;
mcc(2,1) = -1;
%
%
% MSC Matrix
%
mcs = zeros(2,2);
mcs(1,1) = ceta;
mcs(2,2) = 1;
%
%
% MCE Matrix - no stochastic elements
%
mce = zeros(2,1);
mce(1,1) = 1;
%
%
% MSS0 Matrix
%
mss0 = zeros(2,2);
mss0(1,1) = -mhu*(1-ceta);
mss0(1,2) = 1;
mss0(2,1) = -(1+gam)/(yovk);
%
%
% MSS1 Matrix
%
mss1 = zeros(2,2);
mss1(1,2) = -1;
mss1(2,1) = ceta+(1-delta)*(1/yovk);
%
%
% MSC0 Matris
%

```

```

msc0 = zeros(2,2);
msc0(1,2) = -mhu*(1-ceta);
%
%
% MSC1 Matrix
%
msc1 = zeros(2,2);
msc1(2,1) = covy;
msc1(2,2) = -1+ceta;
%
%
% MSE0 Matrix
%
mse0 = zeros(2,1);
mse0(1,1) = -mhu;
%
%
% MSE1 Matrix
%
mse1 = zeros(2,1);
mse1(2,1) = -1;
%
%
% PAI Matrix
%
pai = zeros(1,1);
pai(1,1)= ehta;
%
%
%
[GXX,GXZ,GUX,GUZ,M,Psi,V] = burns6(n,mcc,mcs,mce,mss0,mss1,msc0,msc1,mse0,mse1,pai);
%
%
% Drawing the impulse and response function
%
%
TSE=zeros(2,1); % The state and shock variables
%
TSE(2,1)=1;
%
%
%
T =zeros(iter1,8); % Impulse Response Matrix
%
T(1,1) = 1; % The first period's index
%

```

```

%
N = M;
%
%
for k=1:iter1
    %
    %
    k1 = k;
    %
    TCC = GUX*TSE(1,1) + GUZ*TSE(2,1);
    %
    TY = (1-ceta)*TCC(2,1)+ceta*TSE(1,1) + TSE(2,1);
    %
    TW = TY - TCC(2,1);
    %
    TR = TY - TSE(1,1);
    %
    T(k,:)= [k1 TCC(1,1) TCC(2,1) TSE(1,1) TSE(2,1) TY TW TR];
    %
    TSE=M*TSE;
    %
    %
end;
%
%
% Plot the results
%
%
figure;
%
subplot(4,2,1)
plot(T(:,1),T(:,2))
title(' (1) Consumption')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,2)
plot((T(:,1)),T(:,3))
title(' (2) Employment')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,3)
plot((T(:,1)),T(:,4))
title(' (3) Capital')
xlabel('Year')
%

```

```

subplot(4,2,4)
plot((T(:,1)),T(:,6))
title(' (4) GDP')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,5)
plot((T(:,1)),T(:,7))
title(' (5) Wage')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,6)
plot((T(:,1)),T(:,8))
title(' (6) r')
xlabel('Year')
subplot(4,2,7)
plot((T(:,1)),T(:,5))
title(' (7) shock')
xlabel('Year')

%%%%%%%%%% The End of the Program %%%%%%%%%%

```

## [プログラム 2]

```

function [GXX,GXZ,GUX,GUZ,M,Psi,V] = burns6(n,mcc,mcs,mce,mss0,mss1,msc0,msc1,mse0,mse1,pa
%
% n is the number of the predetermined variable.
%
%  $M_{cc} * u_t = M_{cs} * (x_t, r_{amt})' + M_{ce} * z_t$ ,
%  $M_{ss0} * (x_{t+1}, r_{amt+1})' + M_{ss1} * (x_t, r_{amt})' = M_{sc0} * u_{t+1} + M_{sc1} * u_t + M_{se0} * z_{t+1}$ 
+  $M_{se1} * z_t$ ,
%  $z_{t+1} = P_{ai} * z_t + e_t$ .
%
%
% Mss0 should be square.
%
% The outputs of this function are Gxx, Gxz, Gux, and Guz which are the
coefficients of
%
%  $x_{t+1} = G_{xx} * x_t + G_{xz} * z_t$ ,
%  $u_t = G_{ux} * x_t + G_{uz} * z_t$ .
%
% M is a transition matrix for both  $x_t$  and  $z_t$ .
% V is a diagonal matrix which shows the stability of the system.
% The number of the diagonal elements whose absolute values are

```

```

% smaller than one should be the same as the number of the state variables
% to get a unique solution.
%
%
Mss0 = mss0 - msc0*inv(mcc)*mcs;
Mss1 = mss1 - msc1*inv(mcc)*mcs;
Mse0 = mse0 + msc0*inv(mcc)*mce;
Mse1 = mse1 + msc1*inv(mcc)*mce;
%
W = -(Mss0)\Mss1;
R = (Mss0)\Mse0;
Q = (Mss0)\Mse1;
%
% This corresponds to  $(x_{t+1}, r_{amt+1})' = W*(x_t, r_{amt})' + Q*z_{t+1} + R*z_t$ ;
%
[PO,VO]=eig(W); % The eigensystem of this economy.
%
n1 = length(W); % The number of the endogenous variables in the reduced
model.
%
% Rearranging the matrices
%
alamb=abs(diag(VO));
[lambz, lambz]=sort(alamb);
V=VO(lambz,lambz);
P = PO(:,lambz);
%
% Partitioning the matrices
%
P11 = P(1:n,1:n);
P12 = P(1:n, n+1:n1);
P21 = P(n+1:n1,1:n);
P22 = P(n+1:n1,n+1:n1);
%
PP = inv(P);
PP11 = PP(1:n,1:n);
PP12 = PP(1:n, n+1:n1);
PP21 = PP(n+1:n1,1:n);
PP22 = PP(n+1:n1,n+1:n1);
%
V1 = V(1:n,1:n); % The Partition of the Jordan Matrix.
V2 = V(n+1:n1, n+1:n1);
%
Rx = R(1:n, :);
Rr = R(n+1:n1, :);
%

```

```

Qx = Q(1:n, :);
Qr = Q(n+1:n1,:);
%
Phi0 = PP21*Rx + PP22*Rr;
Phi1 = PP21*Qx + PP22*Qr;
Phi01 = Phi0*pai + Phi1;
%
n2 = size(mce);
n3 = n2(2);
%
% Making a Matrix, Psi
%
Psi=zeros(n1-n,n3);
%
for i = 1:n1-n;
%
for j=1:n3;
%
Psi(i,j)=-(Phi01(i,j)/(1-inv(V2(i,i))*pai(j,j)));
%
end;
%
end;
%
Psi = (V2)\Psi;
%
GUX0 = [eye(n);-(PP22)\PP21];
GUZ0 = [zeros(n,n3);(PP22)\Psi];
%
% Outputs, The Coefficients for the Policy Functions.
%
GXX = P11*V1*inv(P11);
GXZ = (P11*V1*PP12 + P12*V2*PP22)*inv(PP22)*Psi+Qx+Rx*pai;
GUX = inv(mcc)*mcs*GUX0;
GUZ = inv(mcc)*mcs*GUZ0+inv(mcc)*mce;
M = [ GXX GXZ; zeros(n3,n) pai];
%
%%%%%%%%%% The End of the Program %%%%%%%%%%%

```

## 11 結果

前節のプログラムで得られる Policy Functions は、以下の通りである。

$$\Delta c_t = 0.6013\Delta k_t + 0.4305\Delta z_t, \quad (119)$$



$$\Delta l_t = -0.2291\Delta k_t + 0.6481\Delta z_t, \quad (120)$$

$$\Delta k_{t+1} = 0.9427\Delta_t + 0.1362\Delta z_t. \quad (121)$$

資本が増大すると、消費は増大する。これは、資本が増大すれば、生産高が増大し、産出量が増大するためである。生産性への正のショック  $z_t$  の増大も、消費を増大させる。これは、当期の総生産を増大させることと、我々の仮定により、 $z_t$  は AR1 に従うため、将来の生産性もある期間は増大するためである。一方、労働供給は、資本の減少関数となっている。資本の 1% の増大は労働の限界生産性を  $\theta\%$  増加させる。しかし、今期の資本の増大は将来の資本も増加させるため、来期の労働の限界生産性も、ほぼ同程度増加する。すると、長期にわたり労働の限界生産性は増大することになり、所得効果が働く。我々の仮定では余暇は上級財であるため、所得の増加は余暇消費を増加させる。また、資本の増大は資本の限界生産性、すなわち金利を低下させる。金利の低下は、現在労働し、貯蓄するよりも、将来労働し貯蓄するように、合理的な消費者を誘導する。すなわち、今期の資本の増大は、労働供給を金利の低下と生涯所得の増加の 2 つの経路により、減少させるのである。

$z_t$  が 1 単位増加すると、消費、労働供給、いずれも増大する。消費が増加する理由は、生産性の上昇が総生産水準を増加させるためである。労働供給の場合は、多少複雑である。資本の増加と同様、 $z_t$  の増加は労働の生産性を増加させ、しかもその効果は持続する。その結果、生涯所得が増加し、資本の増大と同様に、労働供給を減少させる効果をもつ。だが、我々は  $z_t$  は AR1 であると仮定したため、将来の限界生産性の上昇分は、今期よりも小さいものとなっている。すなわち、今期の賃金は、将来の賃金よりも高いのである。合理的な消費者は、今期の高い賃金のもとで多く働き、将来は余暇を消費することを選択する。また、 $z_t$  の増大は資本の限界生産性、すなわち金利を上昇させる。資本の増大とは逆に、この場合、合理的な消費者は、今期に労働所得を得て貯蓄することを望むであろう。すなわち、金利の変化は労働供給を増加させる効果をもつ。以上の 2 つの効果は、生産性の向上による生涯所得の増加という所得効果を上回り、 $z_t$  の増大は、今期の労働供給を増加させるのである。賃金の将来水準と今期の水準の相対的な大きさ、および金利の変化による労働供給への効果のことを余暇の異時点間代替、といい、Lucas 以来、新古典派的なマクロ経済学において採用されているものである。

以上の効果は、実際に Impulse Response Functions を観察することで確認できる。1% の正の技術ショックが生じた場合のケースを図 4 は示している。技術ショックに対し、消費は Policy Functions が予告するように、0.43% 上方へジャンプする。労働供給も 0.65% 上昇する。労働供給の 1% の増加は、総生産高を  $(1 - \theta) = 0.6\%$  増加させる。結果として、労働供給の増加は、総生産を 0.389% 増加させる。技術ショックそのものは、総生産を 1% 増加させるため、合計して、当期の総生産は 1.389% 増大する。

賃金の増大は、金利に比べて小さい。いずれも、技術ショックの直接効果は 1% の増加であるが、今期の資本は前期の投資により決定されているため (Predetermined である)、資本水準は変化できない。変化させることができるのは労働力であり、労働供給は上昇している。その結果、限界生産性の増加は、労働供給の増加のために目減りする。一方、金利、すなわち資本の限界生産性は、労働力が増加するために、直接効果以上に上昇する。

他のパラメーターの下では、この Policy Functions はどうなるかは、各自で実験してもらいたい。例えば、 $z_t$  の持続度、 $\eta$  が非常に小さい場合は、余暇の異時点間代替が非常に強くなり、労働供給の Policy Functions の  $\Delta z_t$  の係数は大きくなることが予想される。一方、消費に関しては、恒常所得の増分が小さくなるため、消費の  $z_t$  への感応度は低下することが予想される。

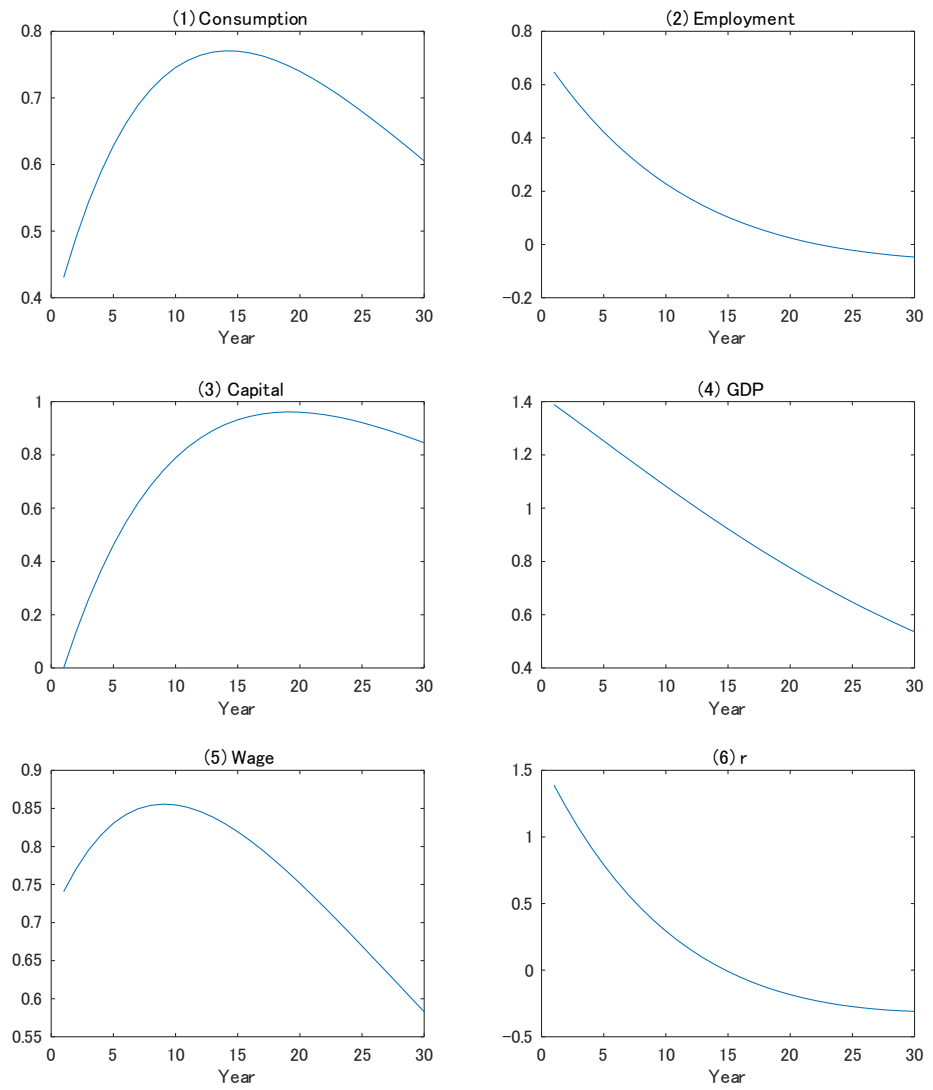


Figure 4: Impulse-Response of the standard RBC model.