

地域経済各論(日本)講義ノート

家計消費2 AIDSモデル

Naohito Abe

April 2026

1 Introduction

前回の講義ノートでは、静学モデルにおける需要関数として、下記を導出した。

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln \left(\frac{y}{P} \right) + \sum_{k=1}^N \varepsilon_{ki}^* \ln p_k + e_i.$$

この式では、補償需要の代替効果を推計可能であるため、パラメターの経済学的解釈が容易であり、かつ推計もデータさえあれば簡単である。しかしながら、上式に対応するデータを見つけることは容易ではない。家計レベルの消費データでは、通常は数量の情報が存在しない。総務省「家計調査」のような詳細な家計簿に基づくデータであったとしても、例えばアイスクリームに対して一か月にいくら支出したかはわかっても、そこにいくつ何個のアイスクリームが含まれているか、どの程度異なるアイスクリームを買ったかは通常、わからない。また、たとえわかっても、それが高級アイスクリームなのか、特売で購入した格安品なのかも多くの場合不明である。これは家計調査に基づいてWeightが作成される物価指数においても同様である。支出金額から数量に関する情報を得る際、支出総額をなんらかの価格で割り、「実質化」し、それを数量情報とみなすことが広く行われている。そして、効用関数や物価指数に対してある種の仮定をおくと、デフレートにより得られた「実質」消費を数量指数とみなすことが可能になるが、そのような変換をせずに済む式のほうが推計上では有利である。物価指数計測においては、通常は数量ではなく支出シェアを用いる公式が用いられている。需要関数においても、一般に利用不可能な数量ではなく、支出シェアに関する関数として表記可能であれば便利であろう。支出シェアを用いる第二の利点は、家計や企業レベルデータで一般に観察される、規模による異質性の影

響を緩和できることにある。年収5000万円の家計と500万円の家計をサンプルに含むと、家計の規模により需要量の違いがほとんど説明できてしまうが、シェアにすると、そうした一次の規模効果は消えることになる。

より根源的な問題は、上記の式は、価格弾力性と所得弾力性が常に一定であると仮定していることにある。これは非常に強い仮定であり、往々にして棄却されてしまう。たとえば、ミカンやリンゴの所得弾力性が1であると仮定しよう。この場合、年収500万の家計と比較して、年収2000万の家計のみかん消費量は4倍、年収1億の家計の場合は20倍になるが、これは非現実的であろう。理論的にも一定の所得弾力性というのは問題がある。ある財の所得弾力性が1を超えていると、所得を無限大に増加させていくと、その財への支出額は所得総額を超えてしまい、予算制約式を満たさなくなる。したがって、大域的に所得弾力性が1を超えることはありえない。また、標準的なミクロ経済理論に従うと、需要関数は所得と価格に関してゼロ次同次でなければならない。したがって、パラメータ間で制約が必要になる。また、対数を用いることで、数量や価格、所得がゼロになることを排除している点が挙げられる。これは、対数を用いるモデルは、非常に細かい商品レベルの高頻度データの描写には適さないことを意味している。

価格弾力性や所得弾力性が一定でない場合、上記の推計式より一般的な、柔軟な需要関数を考える必要があるが、需要が効用最大化行動から導かれていると考える場合、仮定している需要関数が効用最適化と整合的である必要があり、勝手な関数形を仮定すると、経済理論に反したものになる危険性があるのである。上記の式に様々な変数を追加していく際、各変数およびその係数の背後にどのような効用関数を想定しているのか、最適化行動の諸条件と整合的であるかを常に意識する必要があるのである。ミクロ理論との整合性を確保する一つの確実な手法は、効用関数を単純なコブ・ダグラス型やCESから開始し、それらを徐々に一般化していき、そこから需要関数を導出することであろう。効用関数による定式化が複雑であれば、双対性を用い、支出(費用)関数を用いて需要関数を導出することも可能であろう。取り扱い可能な限界まで一般化された支出関数を用い、そこから導かれる需要関数の推計を行うことは確かに可能である。しかしながら、支出関数や効用関数がClosed formで描写できるとは限らないし、たとえ可能であっても、そこからClosed formで需要関数を解き切ることができるとは限らない。解析的に需要関数を導き出す作業は、少しでも支出関数を一般化させようとする、すぐに前に進めなくなる。

ミクロの家計理論と整合的な形で、より「柔軟」かつ *Tractable* な需要関数として、これまで多くの提案がなされてきたが、今日最も広く用いられているのは、Deaton and Muellbauer (1980)によるAlmost Ideal Demand System (AIDS)およびその拡張であるBanks et al. (1997)によるQuadratic Almost Ideal Demand System (QUAIDS)であ

る。これは、特定の支出関数を仮定するのではなく、「任意」の支出関数に対する需要関数を考えるものである。観察不可能な真の支出関数は、凹性や一次同次性のような理論的要請の他に、二回連続微分可能であるという制約はつくものの、原則、どのような形状であっても構わない。その真の支出関数を、ある点において二次の近似を与える関数で近似し、それに対応する需要関数を考えるのである。近似する関数は、十分に沢山のパラメータを有する、柔軟(Flexible)である必要がある。どんな支出関数(二回連続微分可能に限定されるが)にも対応する需要関数がAlmost Ideal Demand Systemなのである。無論、AIDSがよい近似になるのはあくまで局所的なものであり、大域的(Global)な近似にはならないことには留意する必要がある。しかし、二次の近似というのは経済学的には強い意味がある。支出関数の一回微分は補償需要関数であり、その微分は補償需要の傾きになる。すなわち、AIDSの需要関数は、需要関数の水準と傾きの二点において、(連続微分可能であれば)どんな支出関数にも対応する一般的なものとなっているのである。AIDSの局所性という限界の一部については、Banks et al. (1997)により拡張され、所得の二次項が含まれるQUAIDSが提案されている。便利なSTATA codeが提供されていることもあり、QUAIDSは、今日ではオリジナルのAIDSよりも活用される機会が増えている。本講義ノートでは、ミクロ経済理論の基本を振り返りながら、AIDSおよびQUAIDS等の需要システムおよびその推計に関わる諸問題について議論する。

2 ミクロ経済理論の復習

下記の効用最大化問題を考える。

$$\begin{aligned} \max_q & u(q) \\ \text{s.t.} & \sum p_i q_i \leq y \end{aligned}$$

単純化のため、ここでは常にユニークな内点解があることにしよう。この仮定により、シェファード・マッケンジーの補題など、双対性に伴う様々な性質が使えることになる。POSデータのように、取引のない、すなわち数量がゼロになるような観察値を含むデータには使うことができなくなるが、商品単位ではなく、カテゴリー単位の支出データであればそれほど強い制約にはならないだろう。ミクロ経済理論に基づく方程式をカテゴリー単位で扱うことに抵抗を感じるかもしれないが、前回の講義ノートで議論したように、効用関数が弱分離可能でカテゴリー単位で効用がまとまっており、かつそのカテゴリー単位の効用関数がホモセティックである場合は、カテゴリー単位の数量指数を効用関数とみな

すことが可能になり、カテゴリー単位での支出金額と価格指数からカテゴリー需要を導くことが可能になる。さて、効用最大化問題をラグランジュ関数を用いて描写すると、

$$\max_{q, \lambda} L(q, \lambda) = u(q) + \lambda \left(y - \sum p_i q_i \right)$$

一階条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} &= p_i \lambda, \\ y &= \sum p_i q_i \end{aligned}$$

求められた需要関数を $q_i(p, y)$ とすると、

$$\sum p_i q_i(p, y) = y.$$

上式は p, y に関する恒等式であり、 p_j と y で微分すると、次の方程式が常に成立する。

$$\begin{aligned} q_j(p, y) + \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial p_j} &= 0, \\ \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial y} &= 1. \end{aligned}$$

双対問題を考えると、支出(費用)関数は

$$\begin{aligned} E(u, p) &= \min_q \sum p_i q_i \\ s.t. & u(q) \geq u \end{aligned}$$

ラグランジュ関数を考えると、

$$\min_{q, \mu} L = \sum p_i q_i - \mu (u(q) - u)$$

一階条件は

$$\begin{aligned} p_j &= \mu \frac{\partial u(q)}{\partial q_j}, \\ u(q) &= u \end{aligned}$$

この解は補償需要であり、

$$q_i = h_i(u, p)$$

定義より、

$$E(u, p) = \sum p_i h_i(u, p)$$

p_j で微分すると、

$$\frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} = h_j(u, p) + \sum_i p_i \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j}$$

ところで、定義より、

$$u(h(u, p)) = u$$

これは u, p に関する恒等式だから、価格に関して微分しても等式が成立せねばならない。
すなわち、右辺は価格に依存していないので、右辺の価格微分はゼロになる。

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = 0$$

支出最小化の一階条件より、

$$\sum_{i=1}^m \frac{p_i}{\mu} \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = 0$$

したがって、

$$\sum p_i \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j} = 0$$

これは、シェファード・マッケンジーの補題、すなわち、

$$\frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} = h_j(u, p)$$

を意味する。

次に、間接効用を

$$V(p, y) = u(q(p, y))$$

と定義すると、所得で微分することで、下記を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(p, y)}{\partial y} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial y} \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \lambda \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial y} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

この結果のため、効用最大化問題のラグランジュ乗数は所得の限界効用とも呼ばれる。一方、間接効用関数を価格に関して微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(p, y)}{\partial p_j} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial p_j} \\ &= \lambda \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial p_j} \\ &= \lambda(-q_j)\end{aligned}$$

これから、ロワの恒等式と呼ばれる、

$$-\frac{\frac{\partial V(p, y)}{\partial p_j}}{\frac{\partial V(p, y)}{\partial y}} = q_j(p, y)$$

を得ることができる。

次に、支出関数の対数微分を考えよう。すなわち、

$$\frac{\partial \ln E(u, p)}{\partial \ln p_j}$$

を考える。一般に、 $f(x)$ 、 $\ln x = z$ とすると、 $x = \exp(z)$ であり、

$$\frac{d \ln f(x)}{d \ln x} = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

と、 f の x に関する弾力性となる、したがって、支出関数の対数微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln E(u, p)}{\partial \ln p_j} &= \frac{p_j}{E(u, p)} \frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} \\ &= \frac{p_j h_j(u, p)}{E(u, p)}\end{aligned}$$

となる。これは、総支出に占める第 j 財の支出シェアである。これは、支出関数があるとき、その対数微分により支出シェアを求めることが可能であることを意味する。

3 柔軟な関数

AIDSの特徴は、どんな支出関数に対しても二次の近似になるような、柔軟な関数を用いることであった。ここでは関数の柔軟性、Flexibilityについて議論する。二つの関数 f と $f^* : \mathbf{R}_{++}^n \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ を考える。どちらも二回連続微分可能性を仮定する。われわ

これは、任意の関数 f^* の近似として、 $x^* \in \mathbf{R}_{++}^n$ における局所的な二次の近似を与える関数 f を知りたい。 f が f^* の二次の近似を与えるためには、

$$f(x^*) = f^*(x^*) \quad (1)$$

$$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*) \quad (2)$$

$$\nabla^2 f(x^*) = \nabla^2 f^*(x^*) \quad (3)$$

が成立せねばならない。各条件で課される方程式の数は、(1)は1つ。(2)は n 次元なので n 個。(3)は n なので n^2 である。ここで、さらに f と f^* のいずれも連続微分可能性を仮定するとYoungの定理が成立するため、 $\nabla^2 f(x^*)$ は対称行列になる。したがって、 $n \times n$ 行列であることを考慮すると、(3)の制約の数は、 $n(n+1)/2$ である。したがって、制約の数は全部で $1+n+n(n+1)/2$ である。例えば、実対称行列 A を用い、

$$f(x) = \alpha_0 + a'x + \frac{1}{2}x'Ax \quad (4)$$

という関数 $f(x)$ を考えれば、自由なパラメーターの数は $1+n+n(n+1)/2$ となる。具体的な対応は、(1)-(3)を実際に計算することにより、

$$\begin{aligned} \alpha_0 + a'x^* + \frac{1}{2}x^{*'}Ax^* &= f^*(x^*) \\ a + Ax^* &= \nabla f^*(x^*) \\ A &= \nabla^2 f^*(x^*) \end{aligned}$$

とすれば、パラメーターの数と同数の連立方程式となり、 A, a, α_0 を得ることが可能である。すなわち、任意の二回連続微分可能な関数 $f^*(x)$ は、(4)で定義された関数 $f(x)$ により二階まで近似可能となっている。^{*1}

経済学では、効用関数や生産関数において、 $f^*(x)$ に対して一次同次性が仮定されることが多い。選好関係のホモセシティは所得拡張経路が原点を通る直線になるという特殊な状況であったが、支出関数や費用関数は、価格に関する一次同次性を特殊な仮定なしに満たす。価格がすべて二倍になれば、同一の効用水準を得るには二倍の所得が必要になるのは自明であろう。すなわち、支出関数を用いる場合、全ての二回連続微分可能な関数を考

^{*1} 柔軟な関数に関しては阿部修人 (2023)が詳しく説明している。

えるのではなく、あくまで二回連続微分可能な一次同次関数の中に限定することができる。すなわち、関数 $f(x)$ が近似せねばならない関数の範囲を狭くすることが可能である。ところが、一次同次性をみたす関数を二階まで近似する関数 $f(x)$ を見つけることはそれほど自明ではない。例えば、(4)の関数形のままで一次同次性を課すと

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, A = 0 \\ f(x) &= a'x \end{aligned}$$

となってしまうが、これだと(3)も(1)も満たさなくなる。すなわち、(4)の形では経済学上意味のある近似にはならないのである。

関数 $f^*(x)$ が一次同次であるとき、一階、および二階の微係数については、下記の制約を課することができる。すなわち、任意の $x \in \mathbf{R}_{++}^n$ に関して、

$$x' \nabla f(x) = f(x) \quad (5)$$

$$\nabla^2 f(x) x = 0 \quad (6)$$

$$\nabla^2 f(x) = [\nabla^2 f(x)]' \quad (7)$$

なお、上の制約の導出には、オイラーの公式より、 n 次同次関数を一回微分は $n-1$ 次同次になる性質を利用している。制約の数は、それぞれ $1, n, n(n-1)/2$ である

さて、二回連続微分可能な一次同次関数、 f と $f^* : \mathbf{R}_{++}^n \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ を考えよう。すると、両関数とも(5) – (7)を満たす。さらに、 f が f^* の二階の近似になるためには、

$$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f^*(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq n \quad (9)$$

を満たさねばならない。必要な制約の数は、それぞれ n と $n(n-1)/2$ 、すなわち、 $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ である。なお、 $\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*)$ であれば、両関数とも一次同次であるため、 $\nabla f(x^*) x^* = \nabla f^*(x^*) x^* = f(x^*) = f^*(x^*)$ となっていることに注意されたい。また、(9)は対角成分を除外している。これは、非対角成分が定まり、かつ、 $\nabla^2 f(x^*) x^* = \nabla^2 f^*(x^*) x^* = 0$ が成立していれば、そこから対角成分もまた決定

されるためである。したがって、(5) – (7)を満たす関数 f が、(8)と、(9)を満たすとき、 f^* の x^* における二階の近似となる。

4 Translog型支出関数

柔軟な関数としてよく用いられるのはTranslog型関数である。具体的には、一次同次性を保証する下記のパラメーター制約が課されているTranslog型関数を考えよう。

$$\ln E(p, u) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_i \ln p_k + b_0 \ln u + \sum_{i=1}^n b_i \ln p_i \ln u + \frac{1}{2} b_{00} (\ln u)^2$$

$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0, \sum_{i=1}^n b_i = 0$$

ここで、観察不能な効用水準 u を含む項を捨象し、変数名を p から x に変えると、

$$\ln f(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln x_i \ln x_k$$

$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0,$$

これが任意の関数 $f^*(x)$ の二階の近似になることを示すには*2、グラディエントとヘシアンを並べて両者を一致させるように a_{ik}, a_i, a_0 を選択することが可能であることを示す必要がある。この証明は、Christensen et al. (1971)で与えられている。なお、パラメーターの数は、 a_i 及び a_0 が $1+n$ 個。 a_{ik} が n^2 個であるが、総和に関する制約より、 a_i 及び a_0 は n 個となる。また、対称性の仮定より $n(n-1)/2$ 個、及び n 個がなくなり、 $n^2 - n(n-1)/2 - n$ となる。両者の和は $n^2 - n(n-1)/2 = (n^2 + n)/2 = n(n+1)/2$ であり、一次同次関数に関する二階の近似のために必要かつ十分な数のパラメーターが存在している。

Flexible関数は、このほかにも下記のQuadratic Mean of Order r が知られている。

*2 今回は、一次同次性の制約は課しているが、制約を課さずに二階の近似になることを示すことも、もちろん可能である。これは、物価指数理論において重要な役割を果たす。

$$f(p) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)^{1/r}$$

$$a_{ij} = a_{ji}, r \neq 0$$

この関数は、フィッシャー指数やWalsh指数の経済学的解釈の際に用いられる。なお、Quadratic Mean of Order r で $r = 1$ のとき、すなわち、

$$f(p) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i^{1/2} p_k^{1/2}$$

$$a_{ik} = a_{ki}$$

のケースはGeneralized Leontief Cost Functionと呼ばれる有名なものであり、Diewert (1971)はこの支出関数をもとに需要関数を導出している。もっとも、柔軟な関数に基づく需要分析は、Diewert (1971)によるものよりも、次に説明するAlmost Ideal Demand Systemのほうがこの分野における標準となっている。

5 Almost Ideal Demand System (AIDS)

Deaton and Muellbauer (1980)によるAIDSは下記の支出関数(対数)を仮定する。

$$\ln E(u, p) = u \ln b(p) + (1 - u) \ln a(p)$$

$$\ln a(p) = \alpha_0 + \sum \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m$$

$$\ln b(p) = \ln a(p) + \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}$$

この、 $b(p)$ 関数の仮定は一見不自然に思われるかもしれないが、後で、支出関数の価格に関する微分、すなわちシェファード・マッケンジーの補題を用いることで、この仮定の意味はわかるだろう。

なお、対応する(対数)間接効用は下記のようなになる。

$$\ln V(p, y) = \frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)}$$

AIDSが想定する支出関数と間接効用関数の形状は単純であるが、それらに対応する直接効用関数の形状を導き出すのは容易ではなく、少なくとも筆者はみたことがない。すぐ

にわかるように、 $\ln a(p)$ はTranslog型であり、価格ベクトル p に関してFlexibleになっている。そのため、任意の支出関数の形状に対する二次の近似となるので、特に支出関数の関数形に(局所的には)こだわる必要はない。

効用水準が0のときの支出は $\ln a(p)$ であり、1の時の支出が $\ln b(p)$ となる。支出関数における効用の水準そのものには意味はなく、相対的な大きさのみが問題になる。なぜなら、効用水準そのものは単調増加変換によって、需要関数を不変に保ちつつどんな値にもなりうるためである。効用のとりうる最小値を0、最大値を1としても、実質的には強い制約にはならない。Deaton達は効用水準0を極めて低い水準の効用と仮定し、 $\ln a(p)$ を生存水準支出と解釈している。

前にみたように、(対数)支出関数を対数微分すると、支出シェア w_i になるはずである。すなわち、

$$\begin{aligned}\ln E(u, p) &= \ln a(p) + u(\ln b(p) - \ln a(p)) \\ &= \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{\partial \ln E(u, p)}{\partial \ln p_i} \\ &= \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_k \gamma_{ki}^* \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \gamma_{ik}^* \ln p_k + \beta_i u \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \\ &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i u \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}\end{aligned}$$

$$\gamma_{ki} = \frac{1}{2} (\gamma_{ki}^* + \gamma_{ik}^*)$$

ところで、

$$u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} = \ln E(u, p) - \left(\alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m \right)$$

したがって、物価指数 P を

$$\ln P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m \quad (10)$$

と定義すると、

$$u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} = \ln E(u, p) - \ln P$$

したがって、

$$\begin{aligned}\omega_i &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i (\ln E(u, p) - \ln P) \\ &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i (\ln y - \ln P) \\ &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln \frac{y}{P} \right)\end{aligned}$$

これが、AIDSによる支出シェアで表現された需要関数(システム)である。 $b(p)$ として奇妙な関数形が出てきたが、その形状により所得効果が自然に導出されていることがわかるだろう。また、数量ではなく支出シェアの関数とすることにより、数量の情報が必要なくなること、名目所得を物価指数 P で割っていることから、実質所得の関数となっていること、さらにその物価指数がTranslogで与えられ、柔軟になっていること、等が直ちにわかる。支出関数が価格に関して一次同次関数であること、および二回連続微分可能の仮定から、パラメーターには下記の制約が課せられる。

$$\begin{aligned}\sum_i \alpha_i &= 1, \sum_k \gamma_{ki} = 0, \sum_i \beta_i = 0 \\ \sum_i \gamma_{ki} &= 0, \gamma_{ki} = \gamma_{ik}\end{aligned}$$

各制約は、支出関数が価格に関して一次同次であり、二階連続微分可能という理論的要請から導かれる。

5.1 1. 加法性制約 (Adding-up restriction)

$$\sum_i \alpha_i = 1$$

解釈：すべての財の支出シェアの合計が常に1になることを保証する。家計が全所得を全財に支出するという予算恒等式 (budget exhaustion) から直接導かれる*³。

*³ α_0 は集計しないことに注意されたい。

5.2 2. 加法性制約 (γ に関する部分)

$$\sum_i \gamma_{ki} = 0 \quad (\forall k)$$

解釈：各価格 p_k の変化に対する全財の支出シェアの反応の合計が0になることを保証する。価格項がシェア合計に影響を与えないよう、加法性を維持するための制約 ($\sum w_i = 1$ が価格に依存せず恒等的に成り立つ)。

5.3 3. 加法性制約 (β に関する部分)

$$\sum_i \beta_i = 0$$

解釈：実質所得 $\ln(m/P)$ の変化に対する全財の支出シェアの反応の合計が0になることを保証する。所得効果の合計がゼロとなり、シェア合計が常に1を保つための制約。

5.4 4. 一次同次性制約 (Homogeneity restriction)

$$\sum_k \gamma_{ki} = 0 \quad (\forall i)$$

解釈：すべての価格と名目所得が同率で変化した場合（実質所得は不変）、各財の支出シェアが変化しないことを保証する。需要関数が価格・所得に関して次数0の同次性を持つための条件。

5.5 5. 対称性制約 (Symmetry restriction)

$$\gamma_{ki} = \gamma_{ik}$$

解釈：Slutsky代替行列が対称であることを保証する。財 i の価格変化が財 k の需要に与える効果と、その逆効果が等しくなる（代替・補完関係の整合性）を意味する。

これらの制約をすべて課すことで、AIDSモデルは理論的に整合性を持ち、推定結果が経済学的に意味のあるものになる。したがって、推定の際にはこれらの制約を課すことが望ましい*4。

AIDSはFlexible関数から導出されているものの、あくまで、ある一点における二次の近似である。支出シェアの関数に出てくる係数は一定であるが、これらはあくまで局所的なものであることに注意する必要がある*5。なお、後述するように所得弾力性や価格弾力性そのものは、支出シェアに依存するために家計間で一定にはならない。

6 AIDSの推計とIterated Linear Least Squares Estimator

6.1 Stone IndexとMeasurement Unit

AIDSの推計の際、物価指数をシェア方程式に代入し、各財*i*に関して、

$$\omega_i = \alpha_i - \beta_i \alpha_0 + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln y - \sum_k \alpha_k \ln p_k - \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m \right)$$

で、パラメーターを残差が正規分布に従うと仮定し最尤法、あるいは非線形最小二乗(NLSUR)法、GMM等で解くことになる。各財に関して上記の方程式があるので、通常は、価格が地域間で異なることを利用した地域間、あるいは異なる時点間、あるいは両者とも用いた価格と支出シェアのデータを用いて推計される。

上記の方程式は複雑な非線形連立方程式であり、多数の財がある場合は推定が著しく困難になる。そのためDeaton and Muellbauer (1980)は、より簡素な物価指数を用いることで推計を単純にできることを指摘しており、今日でも、それら単純化された式が用いられることがある。ただし、 α_0 は定数項の一部となっており、需要システムからは一般に識別不可能である。*6 α_0 は、価格が1の時に必要な最小限の支出、いわゆる生存支出とみなすことも可能である。そこで、Deaton and Muellbauer (1980)は、観察される所得の最小値、もしくはそれよりも若干小さい値を仮定し、最適化の際には外生とみなすことを提案している。AIDSの推計を行う際には、今では便利なSTATAのコードが利用可能であ

*4 これらに加え、支出関数の価格に関する凹性を課す必要もあるが、これを課して推定することは通常はとも困難である。

*5 AIDSは複数財の需要関数を推計する際の標準であり、AIDSを用いた分析は大量にある。松田 (2001)はコンサイスでまとめた日本語による解説である。筆者による阿部修人 et al. (2026)は2024年秋以降の米価格上昇を扱った分析であり、AIDSシステムを実践する際には参考になるだろう。

*6 Deaton and Muellbauer (1980)は識別が困難、と書いているが、 α_0 を識別するには需要システム以外の情報が必要である。詳しくはAbe and Sato (2026)を参照されたい。

る*7。

Deaton and Muellbauer (1980)のように、物価指数を下記のStone indexと呼ばれる単純化されたものを用いたAIDS推計は今日でもたまに行われる。

$$\ln P = \sum_{k=1}^N \omega_k \ln p_k$$

すなわち、価格指数は、その支出シェアの加重算術平均で定義されている。この場合、推計式は、定数項を単純化させた場合は、

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln y - \sum_{k=1}^N \omega_k \ln p_k \right)$$

と、価格に関する線形方程式となり、推計は線形連立方程式という、とても簡単な式となる。ただ、この場合、AIDSモデルは、価格の計測単位、measurementに依存してしまう、という大きな問題を有している。これは深刻な問題なので、Moschini (1995)に即して、少し説明しよう。いま、数量がすべてアメリカ式のポンドとガロンで測られている、すなわち、牛乳は一ガロンの価格、牛肉や豚肉は1ポンドの価格で表示されているとしよう。いま、単位を1リットルと100グラムに変化させたとする。データは共通であり、支出シェアは不変であるが、価格の単位のみが変化し、新たな価格を $\bar{p}_k = \theta_k p_k$ で表すとする。すると、

$$\begin{aligned} \omega_i &= \bar{\alpha}_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln \bar{p}_k + \beta_i \left(\ln y - \sum_{k=1}^N \omega_k \ln \bar{p}_k \right) \\ \bar{\alpha}_i &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln \theta_k - \beta_i \sum_{k=1}^N \omega_k \ln \theta_k \end{aligned}$$

となる。このとき、 $\bar{\alpha}_i$ は支出シェアの関数となり、定数項ではなくなってしまう。そのため、線形AIDSモデルで推計を行う場合、その需要システムの推計結果は、価格の単位に依存してしまう、という非常にこまった性質を有してしまうのである。なお、非線形の物価指数を用いる場合は

$$\ln P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln \bar{p}_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln \bar{p}_k \ln \bar{p}_m$$

*7 Poi (2012)のコードは、後で触れるQUAIDSに対応し、システム推計も可能な便利なものである。

となり、新たに

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 + \sum \alpha_k \ln \theta_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln \theta_k \ln \theta_m$$

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln \theta_k$$

となり、今度は、 $\bar{\alpha}_0$ も $\bar{\alpha}_i$ も支出シェアに依存せず、定数項のままである。したがって、定数項を推計する場合は、計測単位の変更は弾力性の推計結果に影響を与えない。もっとも、前述のように、 α_0 を、価格が1の時に必要な最小限の支出、いわゆる生存支出とみなし、観察される所得の最小値よりも若干小さい値を仮定した場合は、非線形推計を行う場合でも、やはり計測単位に依存してしまう。これがどの程度深刻な問題を作るか否かは、今後検証していかねばならないものである。Stone Indexを用いた推定は線形であるため容易に計算可能であるが、後述するBlundell and Robin (1999) Iterated Linear Least Squares Estimator (ILLE)による推計のほうがStone Indexを用いるものよりも多くの点で優れているため、今後はStone Indexを用いた推計は減っていくと思われる。

6.2 ILLE by Blundell and Robin (1999)

実際にAIDSモデルを推計する際には、名目所得として家計所得ではなく、総支出額を利用することが多い。これは、支出シェアを足し合わせると1になり、予算制約のもとでは総支出と整合的に需要体系を記述できるためである。しかし、理論的には家計は消費と貯蓄を同時に決定しているので、総支出は単なる外生変数ではない。とくに動学的な家計行動を背後に考えるならば、総支出額は家計の最適化行動の結果として決まり、需要方程式の誤差項と相関しうる。したがって、総支出をそのまま説明変数として用いると、推定結果には内生性バイアスが生じる。

このため、AIDSの実証分析では、総支出に対して操作変数を用いることが一般的である。来期に価格上昇が見込まれれば、今期は貯蓄を取り崩してでも支出総額を増やすだろうし、選好の分離可能性を仮定して食料総支出に対する需要システムを考える場合は、エンゲル係数は食料価格の関数であることを考えると、食料総支出は内生変数になるだろう。そのような場合は、たとえば、所得、所得の二乗、世帯属性と所得の交差項、あるいは資産保有や就業状態に関する変数など、総支出には影響するが当該財の需要方程式の攪乱項とは独立であると考えられる変数を用いて、総支出の内生性に対処する。したがって、AIDSの推計は、単に非線形な需要体系を解けばよいという問題ではなく、総支出の内生性をどのように扱うかという計量経済学の問題を同時に含んでいる。また、価格も家

計属性により異なることが考えられる。例えば、小売店から遠く離れた地域に住む人は、通信販売を多用し、送料込みのより高い価格で購入する傾向があり、一方、地方に住んでいることにより、特定の商品への支出シェアが大きい、あるいは小さい傾向があるかもしれない。そのような時には価格に内生性問題が生じ、誤差項と相関を持つことで推定結果にバイアスが生じる可能性がある。

コンピューターの計算力が向上している現在では、こうした内生性を考慮しつつ、対数総支出やその二乗項を含む巨大な非線形連立方程式を、操作変数法やGMMによって推計することは原理的には可能である。しかし、財の種類が多い場合には計算負担が非常に大きく、実際上はきわめて困難である。

このような状況のもとで、財の種類が多いときにStone Indexを用いず推計する手法として、Blundell and Robin (1999)は、Iterated Linear Least Squares Estimator (ILLE)を提唱している。この論文の重要な点は、AIDSにおける価格指数部分の非線形性を処理するだけでなく、総支出や価格の内生性を考慮した操作変数推定の枠組みも含めて議論していることである。すなわち、AIDSの推計において問題となるのは、価格指数の非線形性と総支出・価格の内生性であり、Blundell and Robin (1999)はその双方を視野に入れた大規模需要体系の推定法を提示している。

AIDSの支出シェア方程式は

$$w_{ih} = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \ln p_{jh} + \beta_i \ln \left(\frac{x_h}{P_h} \right) + u_{ih},$$

ただし

$$\ln P_h = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \ln p_{jh} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \ln p_{jh} \ln p_{kh}$$

である。ここで非線形性は、 $\ln(x_h/P_h)$ の中に、未知パラメーター $\alpha_0, \alpha_j, \gamma_{jk}$ が入っていることから生じている。

ILLEの基本的な着想は、ある反復段階 r において価格指数

$$\ln P_h^{(r)}$$

を所与とみなせば、支出シェア方程式は

$$w_{ih} = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \ln p_{jh} + \beta_i (\ln x_h - \ln P_h^{(r)}) + u_{ih}$$

となり、 $\alpha_i, \gamma_{ij}, \beta_i$ に関して線形になる、という点にある。したがって、この段階では通常の線形回帰、あるいは総支出 $\ln x_h$ の内生性を考慮するならば操作変数法により、各方程式を推定することができる。

ここで重要なのは、AIDSの支出関数

$$\ln E(u, p) = (1 - u) \ln a(p) + u \ln b(p)$$

を特徴づけるパラメターのうち、 α_0 を除く $\alpha_i, \gamma_{ij}, \beta_i$ は、支出シェア方程式の係数として直接現れるため、条件付き線形回帰の推定値から更新可能であるという点である。すなわち、反復 r における線形あるいはIV推定から

$$\hat{\alpha}_i^{(r)}, \quad \hat{\gamma}_{ij}^{(r)}, \quad \hat{\beta}_i^{(r)}$$

が得られれば、それを用いて次の反復で用いる価格指数を

$$\ln P_h^{(r+1)} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j^{(r)} \ln p_{jh} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \hat{\gamma}_{jk}^{(r)} \ln p_{jh} \ln p_{kh}$$

として更新できる。すなわち、前回のシェア方程式推定から得られたパラメターを価格指数に代入し、その新しい価格指数を用いて再び線形回帰を行うのである。

このとき、 α_0 は支出シェア方程式には独立には現れないため、通常は正規化あるいは外生的な与件として扱われる。したがってILLEでは、 α_0 を除く支出関数のパラメターが、シェア方程式の推定値と整合的になるまで反復を続けることになる。より具体的には、 $\ln P_h^{(r)}$ を用いて推定した係数から再構成した $\ln P_h^{(r+1)}$ が、十分小さな誤差の範囲で $\ln P_h^{(r)}$ と一致するまで、

$$(\hat{\alpha}^{(r)}, \hat{\gamma}^{(r)}, \hat{\beta}^{(r)}) \mapsto \ln P^{(r+1)} \mapsto (\hat{\alpha}^{(r+1)}, \hat{\gamma}^{(r+1)}, \hat{\beta}^{(r+1)})$$

という更新を繰り返す。収束時には、シェア方程式を推定して得られるパラメターと、それらから構成される価格指数とが相互に整合的になっている。この意味でILLEは、非線形AIDSシステムを、価格指数を逐次更新しながら一連の線形IV回帰として解く方法だと理解できる。

操作変数を用いる場合にも考え方は同じである。たとえば $\ln x_h$ が内生的であるなら、各反復段階で

$$\ln x_h = z_h' \pi + v_h$$

という第一段階を考え、 z_h を操作変数ベクトルとして用いた線形IV推定により

$$w_{ih} = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \ln p_{jh} + \beta_i (\ln x_h - \ln P_h^{(r)}) + u_{ih}$$

を推定する。その結果得られた $\hat{\alpha}_i^{(r)}, \hat{\gamma}_{ij}^{(r)}, \hat{\beta}_i^{(r)}$ により価格指数を更新し、再び同じIV推定を行う。したがってILLEは、単なる非線形最小二乗の近似ではなく、各反復で内生性を考慮したIV推定を組み込むことのできる反復アルゴリズムである。

なお、物価指数の初期値にはStone Indexを用いることをLecocq and Robin (2015)は推奨している。非線形の需要体系を直接推計する場合には、通常は4-5程度のカテゴリーにとどまることが多いが、Blundell and Robin (1999)は22カテゴリーの推計を行っている。この手法は、複雑な非線形性と内生性を同時に扱いながら、大規模なAIDS需要体系を推計することを可能にした点で特に重要である。この推定に必要なSTATAのコードはLecocq and Robin (2015)が提供しており、多数のカテゴリーを含むデータを扱う場合には、Stone Indexを用いる簡易推計よりも、このBlundell and Robin (1999)によるILLEの利用が望ましいと言えるだろう。

6.3 推定されたパラメーターと各種弾力性

ILLE や非線形推定によって

$$\hat{\alpha}_i, \quad \hat{\gamma}_{ij}, \quad \hat{\beta}_i$$

が得られたとき、これらは支出シェア方程式の係数そのものであるが、通常、需要分析で関心があるのは所得弾力性や価格弾力性である。AIDS の利点の一つは、推定されたパラメーターと観察された支出シェアから、それらの弾力性を明示的に計算できる点にある。

AIDS の支出シェア方程式を

$$w_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln \left(\frac{x}{P} \right)$$

と書こう。ただし

$$w_i = \frac{p_i q_i}{x}$$

であるから、通常需要は

$$q_i = \frac{w_i x}{p_i}$$

と表される。したがって

$$\ln q_i = \ln w_i + \ln x - \ln p_i$$

である。よって、各種弾力性は、まず支出シェア w_i の微分を求め、それを用いて導出することができる。

まず、総支出 x に関する微分を考える。価格を固定すると、

$$\frac{\partial w_i}{\partial \ln x} = \beta_i$$

であるから、

$$\frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln x} = \frac{1}{w_i} \frac{\partial w_i}{\partial \ln x} + 1 = 1 + \frac{\beta_i}{w_i}.$$

したがって、AIDS における総支出弾力性は

$$\eta_i = 1 + \frac{\beta_i}{w_i}$$

となる。推定値を用いると、

$$\hat{\eta}_i = 1 + \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{w}_i}$$

である。ここで \hat{w}_i には、各観察値の実際の支出シェアを用いてもよいし、標本平均シェア \bar{w}_i を用いて代表的家計における弾力性を計算してもよい。

次に、価格弾力性を求めよう。価格 p_j に関して微分すると、AIDS では価格指数 P も p_j に依存するため、

$$\frac{\partial w_i}{\partial \ln p_j} = \gamma_{ij} - \beta_i \frac{\partial \ln P}{\partial \ln p_j}$$

となる。ここで、AIDS の価格指数は支出関数から導かれているので、シェファードの補題より

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \ln p_j} = w_j$$

が成立する。したがって

$$\frac{\partial w_i}{\partial \ln p_j} = \gamma_{ij} - \beta_i w_j.$$

この式を用いると、マーシャル需要 q_i の非補償価格弾力性は

$$\varepsilon_{ij}^M = \frac{\partial \ln q_i}{\partial \ln p_j} = \frac{1}{w_i} \frac{\partial w_i}{\partial \ln p_j} - \delta_{ij} = -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{w_i} - \frac{\beta_i}{w_i} w_j$$

となる。ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 $i = j$ のとき 1、 $i \neq j$ のとき 0 である。したがって、自己価格弾力性は

$$\varepsilon_{ii}^M = -1 + \frac{\gamma_{ii}}{w_i} - \beta_i,$$

交差価格弾力性は

$$\varepsilon_{ij}^M = \frac{\gamma_{ij}}{w_i} - \frac{\beta_i}{w_i} w_j \quad (i \neq j)$$

である。

さらに、スルツキー方程式

$$\varepsilon_{ij}^H = \varepsilon_{ij}^M + w_j \eta_i$$

を用いれば、補償価格弾力性は

$$\varepsilon_{ij}^H = -\delta_{ij} + \frac{\gamma_{ij}}{w_i} + w_j$$

となる。すなわち、AIDS では補償価格弾力性もまた、推定された γ_{ij} と観察された支出シェア w_i, w_j から直接再現できる。

以上を推定値で書けば、

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^M = -\delta_{ij} + \frac{\hat{\gamma}_{ij}}{\hat{w}_i} - \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{w}_i} \hat{w}_j,$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^H = -\delta_{ij} + \frac{\hat{\gamma}_{ij}}{\hat{w}_i} + \hat{w}_j,$$

$$\hat{\eta}_i = 1 + \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{w}_i}$$

となる。

弾力性は一定ではなく、評価するベクトルに依存する。たとえば、弾力性を各観察値ごとに計算してから平均をとる、あるいはある種の「平均」支出シェアを用いて「代表的家計」に対する弾力性を計算することも考えられる。前者は家計間の異質性を反映できる一方、後者は結果の報告が簡潔になるという利点がある。いずれの場合も、AIDS の推定係数そのものは直ちに弾力性ではなく、推定された β_i, γ_{ij} と支出シェア w_i を組み合わせて初めて弾力性が得られることに注意する必要がある。

7 集計問題

AIDSや需要関数の初期の文献では、家計間の集計問題に多くのスペースが割かれている。そこでは、家計レベルではなく産業レベルや市場レベルの情報しか観察できないとき、その集計量から家計レベルの構造パラメータをどこまで識別できるか、という問題が中心的であった。

この集計問題を考えるうえで出発点となるのが、Gorman (1953) による需要の集計可能性の理論である。Gorman の原論文は、与えられた個人効用配分を達成するのに必要な最小の総消費ベクトルの集合である community indifference surface と、与えられた総消費ベクトルのもとで達成可能な個人効用配分のフロンティアである utility possibility

surface との一意対応という幾何学的言葉で集計可能性を特徴づけている。経済的含意に富む美しい議論が展開されるが、その証明は平易とは言いがたい。他方で、その経済学的含意はより素直に述べることができる。すなわち、市場で観察される集計需要が、所得分布そのものではなく総所得のみに依存する代表的個人の需要関数として表現できるのはどのような場合か、という問いである。

以下では、この問題を二つの軸に沿って整理する。第一の軸は、何を集計するかという軸である。Gorman 型集計可能性では、市場需要そのものが総所得のみに依存する代表的個人需要として表現できることを要求するのに対し、Generalized Linear (GL) 集計では、需要全体ではなく平均支出シェアが単一の代表的支出水準を通じて表されることのみを要求する。この意味で、Gorman 型集計可能性の方が GL より強い要請である。

第二の軸は、GL のもとで代表的支出水準にどこまで追加的な制約を課するかという軸である。一般の GL では代表的支出水準は価格や所得分布に依存する複雑な関数でありうるが、Price Independent Generalized Linear (PIGL) ではそれが価格から独立であることを要求する。さらに、Price Independent Generalized Logarithmic (PIGLOG) は、PIGL の中でも対数型の表現をもつ重要な特殊ケースである。

Gorman Polar Form は、代表的個人需要が成立するための古典的かつ本質的な条件であり、今日でも集計問題を理解するうえで中心的な役割を果たす。他方で、GL や PIGL の必要条件の厳密な証明は技術的に煩雑であり、本講義ノートの主眼である需要システムの実証的利用からはやや離れるため、ここではその経済的含意と実践的意義に焦点を当てる。

7.1 Gorman 型需要と Gorman polar form

Gorman の定理の核心は、異質な家計を許しても、市場需要が所得分布 (y_1, \dots, y_H) そのものではなく総所得

$$Y = \sum_{h=1}^H y_h$$

のみに依存する代表的個人需要として表現できるのはどのような場合か、という点にある。

この問題を述べる際には、二つの水準を区別するのが有用である。第一は、需要関数そのものについての条件であり、各家計のマーシャル需要が所得に関してアフィンで、しかもその傾きが家計間で共通であるという意味での Gorman 型需要である。第二は、そのような需要体系が積分可能であるときに対応する支出関数の双対表現であり、これが通

常 *Gorman polar form* と呼ばれる。

本稿ではまず需要側の条件を命題として述べ、その後で、積分可能性のもとでこれが支出関数の Gorman polar form と同値であることを述べる。

命題 1 (Gorman 型需要と代表的個人需要). 異質な家計を許すある選好クラス \mathcal{C} を考える。このとき、 \mathcal{C} に属する任意の経済について、市場需要が所得分布 (y_1, \dots, y_H) ではなく総所得

$$Y = \sum_{h=1}^H y_h$$

のみに依存する代表的個人の需要関数

$$X(p, \mathbf{y}) = x^R(p, Y)$$

として常に表現できるための必要十分条件は、各家計のマーシャル需要が

$$x_h(p, y_h) = a_h(p) + b(p)y_h$$

と書け、しかも $b(p)$ が家計間で共通であることである。

なお、需要関数の価格・所得に関するゼロ次同次性より $a_h(p)$ は価格に関して零次同次、 $b(p)$ は価格に関して -1 次同次である。

Proof. まず十分性を示す。各家計 h の需要が

$$x_h(p, y_h) = a_h(p) + b(p)y_h$$

で与えられ、しかも $b(p)$ がすべての家計で共通であるとする。このとき市場需要は

$$X(p, \mathbf{y}) = \sum_{h=1}^H x_h(p, y_h) = \sum_{h=1}^H a_h(p) + b(p) \sum_{h=1}^H y_h$$

であるから、

$$X(p, \mathbf{y}) = A(p) + b(p)Y, \quad A(p) := \sum_{h=1}^H a_h(p),$$

と書ける。したがって市場需要は所得分布 (y_1, \dots, y_H) そのものには依存せず、総所得 Y のみの関数として

$$x^R(p, Y) := A(p) + b(p)Y$$

と表現できる。

次に必要性を示す。市場需要が任意の所得分布についてつねに

$$X(p, \mathbf{y}) = x^R(p, Y)$$

と書けると仮定する。価格 p を固定し、二つの家計 $h \neq h'$ の間で総所得を不変に保つ微小再分配

$$dy_h = \varepsilon, \quad dy_{h'} = -\varepsilon$$

を考える。総所得 Y は不変だから、市場需要も不変でなければならない。したがって任意の財 i について

$$0 = dX_i = \left(\frac{\partial x_{ih}(p, y_h)}{\partial y_h} - \frac{\partial x_{ih'}(p, y_{h'})}{\partial y_{h'}} \right) \varepsilon$$

である。よって

$$\frac{\partial x_{ih}(p, y_h)}{\partial y_h} = \frac{\partial x_{ih'}(p, y_{h'})}{\partial y_{h'}}$$

が任意の h, h' と任意の所得水準について成り立つ。したがって、ある関数 $b_i(p)$ が存在して

$$\frac{\partial x_{ih}(p, y_h)}{\partial y_h} = b_i(p)$$

と書ける。これを y_h について積分すれば、

$$x_{ih}(p, y_h) = a_{ih}(p) + b_i(p)y_h$$

を得る。財をまとめて書けば

$$x_h(p, y_h) = a_h(p) + b(p)y_h$$

であり、しかも $b(p)$ は家計間で共通である。

□

命題 1 は、代表的個人需要の存在条件を 需要関数の側から述べたものである。これに対し、双対的な 支出関数の側では、積分可能性を仮定すると同じ内容は Gorman polar form として表現される。これを示す命題その証明に入る前に、積分可能性という単語の意味を、数学的な意味も含めて簡単に説明しておこう。一般に、需要関数

$$x(p, y)$$

を先に書くことはできるが、それが本当にある効用関数の最大化、あるいは支出関数

$$E(p, u)$$

の最小化から導かれているとは限らない。経済学では、与えられた需要体系がそのような「背後にある目的関数」から導けるとき、その需要体系は積分可能であるという。

この言葉は、微分された情報を積み上げて、もとの関数に戻せることを意味している。たとえば、支出関数 $E(p, u)$ が存在すれば、Shephard の補題により補償需要は

$$h_i(p, u) = \frac{\partial E(p, u)}{\partial p_i}$$

と書ける。つまり、補償需要は支出関数の偏導関数である。逆に言えば、ある補償需要関数 $h(p, u)$ が与えられたとき、それが本当にどこかの支出関数の偏導関数として書けるかどうかは積分可能性の問題である。

数学的には、あるベクトル値関数

$$h(p, u) = (h_1(p, u), \dots, h_n(p, u))$$

が、あるスカラー関数 $E(p, u)$ の勾配

$$\nabla_p E(p, u)$$

になっているためには、単に連続であるだけでは足りず、混合偏導関数が一致すること、すなわち

$$\frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_i} \quad (i \neq j) \quad (11)$$

が必要になる。これは

$$h_i = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \quad h_j = \frac{\partial E}{\partial p_j}$$

であるならば、

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial p_i}, \quad \frac{\partial h_j}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j}$$

となり、 E が十分になめらかであれば

$$\frac{\partial^2 E}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j}$$

が成り立つからである。これが、偏導関数の対称性である。

より直観的に言えば、価格 p_i を少し変え、その後で p_j を少し変える場合と、先に p_j を変えてから p_i を変える場合とで、最終的な支出の変化が一致しなければ、その需要体系はひとつの支出関数から導かれたものとは言えない。どの順序で小さな変化を積み重ねても同じ結果になることが、「もとの関数に積分できる」ための条件なのである。

経済学では、この対称性はスルツキー行列の対称性として現れる。したがって、積分可能性とは単に技術的な条件ではなく、需要体系が一貫した最適化行動から導かれていることを保証する条件だと理解できる。

以下の命題では、この積分可能性を仮定することで、需要関数の側で述べた Gorman 型需要の条件を、支出関数の側での Gorman polar form に言い換える。

命題 2 (積分可能性のもとでの Gorman polar form). 命題 1 の需要体系が積分可能であるとす。このとき各家計の支出関数は

$$E_h(p, u_h) = \alpha_h(p) + \beta(p)u_h$$

という *Gorman polar form* をもつ。ただし $\beta(p)$ は家計間で共通である。

さらに、支出関数の価格に関する一次同次性

$$E_h(tp, u_h) = t E_h(p, u_h) \quad (\forall t > 0)$$

より、

$$\alpha_h(tp) = t \alpha_h(p), \quad \beta(tp) = t \beta(p)$$

が成り立つ。したがって $\alpha_h(p)$ と $\beta(p)$ はともに価格に関して一次同次である。

Proof. 命題 1 により、各家計のマーシャル需要は

$$x_h(p, y_h) = a_h(p) + b(p)y_h$$

と書ける。ここで $b(p)$ は家計間で共通である。

支出関数 $E_h(p, u_h)$ が存在するとき、補償需要は

$$x_h^c(p, u_h) = x_h(p, E_h(p, u_h))$$

で与えられるから、

$$x_h^c(p, u_h) = a_h(p) + b(p)E_h(p, u_h)$$

となる。

Shephard の補題より

$$\nabla_p E_h(p, u_h) = x_h^c(p, u_h)$$

が成り立つので、

$$\nabla_p E_h(p, u_h) = a_h(p) + b(p)E_h(p, u_h)$$

を得る。各成分で書けば

$$\frac{\partial E_h(p, u_h)}{\partial p_i} = a_{ih}(p) + b_i(p)E_h(p, u_h), \quad i = 1, \dots, n.$$

これは未知関数 $E_h(p, u_h)$ に関する一次線形偏微分方程式である。すなわち、各方向 p_i に関する微分が

$$\partial_{p_i} E = a_{ih}(p) + b_i(p)E$$

という形で与えられており、右辺に E が一次で現れる。

次に、この方程式の可積分性条件を調べる。 E_h が C^2 級であれば混合偏微分、すなわちスルツキ-行列の対称性より

$$\partial_{p_j} \partial_{p_i} E_h = \partial_{p_i} \partial_{p_j} E_h$$

が成り立つ。上の偏微分方程式を代入すると

$$\partial_{p_j} (a_{ih}(p) + b_i(p)E_h) = \partial_{p_i} (a_{jh}(p) + b_j(p)E_h)$$

すなわち

$$\partial_j a_{ih} + (\partial_j b_i)E_h + b_i(a_{jh} + b_j E_h) = \partial_i a_{jh} + (\partial_i b_j)E_h + b_j(a_{ih} + b_i E_h).$$

これが任意の E_h について成立するためには、係数比較により

$$\partial_j b_i = \partial_i b_j$$

および

$$\partial_j a_{ih} + b_i a_{jh} = \partial_i a_{jh} + b_j a_{ih}$$

が必要である。

第一式より、ベクトル場 $b(p)$ は回転がゼロであるから、定義域が単連結であれば、あるスカラー関数 $B(p)$ が存在して

$$\nabla B(p) = b(p)$$

と書ける。

ここで

$$\mu(p) := \exp(-B(p))$$

とおくと、

$$\nabla \mu(p) = -\mu(p)b(p)$$

である。

この $\mu(p)$ を用いて元の偏微分方程式に積をかけると

$$\nabla(\mu(p)E_h(p, u_h)) = \mu(p)a_h(p)$$

となる。これは積の微分公式

$$\nabla(\mu E) = \mu \nabla E + E \nabla \mu$$

を用いて直接確認できる。

さらに上の第二の可積分条件は

$$\partial_j(\mu a_{ih}) = \partial_i(\mu a_{jh})$$

を意味するので、Poincaré の補題より、ある関数 $A_h(p)$ が存在して

$$\nabla A_h(p) = \mu(p)a_h(p)$$

と書ける。

したがって

$$\nabla(\mu E_h) = \nabla A_h(p)$$

より、

$$\mu(p)E_h(p, u_h) = A_h(p) + c_h(u_h)$$

となる。ここで $c_h(u_h)$ は p に依存しない任意関数である。

ゆえに

$$E_h(p, u_h) = e^{B(p)} A_h(p) + e^{B(p)} c_h(u_h)$$

と表される。

最後に

$$\alpha_h(p) := e^{B(p)} A_h(p), \quad \beta(p) := e^{B(p)}$$

とおけば

$$E_h(p, u_h) = \alpha_h(p) + \beta(p)c_h(u_h)$$

となる。

効用は順序のみが意味を持つため、単調変換により

$$\tilde{u}_h := c_h(u_h)$$

と再定義すれば、

$$E_h(p, \tilde{u}_h) = \alpha_h(p) + \beta(p)\tilde{u}_h$$

となり、Gorman polar form を得る。□

この二つの命題を区別しておく、Gorman の結果の意味が明確になる。命題 1 は、市場需要が総所得のみで代表できるための 需要側の必要十分条件であり、命題 2 は、その需要体系が積分可能であるときに対応する 双対的な支出関数表示である。したがって、「Gorman 型需要」と「Gorman polar form」は密接に関係するが、概念上は区別して述べる方がよい。

この命題の含意は明快である。集計需要が総所得だけで記述できるためには、追加的な 1 単位の所得が誰に与えられても、その限界的な支出配分が同じでなければならない。Gorman 自身もこの点を、“an extra unit of purchasing power should be spent in the same way no matter to whom it is given” と述べている。これはまさに、個人別 Engel 曲線が同一価格の下で平行であることの経済学的意味である。

なお、Gorman polar form

$$E(u, p) = a(p) + u b(p)$$

は、集計可能性の定理から導かれるだけでなく、各財のマーシャル需要の所得効果

$$\frac{\partial x_i(p, y)}{\partial y}$$

が所得水準 y に依存しない、すなわち Engel 曲線が y に関して線形であることから特徴づけられる。この見方は、Gorman polar form を「市場需要の集計可能性」の結果としてだけでなく、「個人需要の所得方向の線形性」の双対表現として理解するうえで有用である。

7.1.1 Gorman polar form の具体例：homothetic 選好と定数シフト CES

まず、homothetic 選好は Gorman polar form の最も基本的な特殊例である。

命題 3 (支出シェアが支出水準に依存しない場合). すべての財について

$$\omega_i(y, p)$$

が支出水準 y に依存しないとする。このとき支出関数は

$$E(u, p) = u b(p) \tag{12}$$

の形に限られる。

Proof. 支出関数 $E(u, p)$ について、Shephard の補題より

$$\omega_i(u, p) = \frac{\partial \ln E(u, p)}{\partial \ln p_i}$$

が成り立つ。仮定より ω_i は u に依存しないから、

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \ln E(u, p)}{\partial \ln p_i} \right) = 0 \quad (\forall i).$$

したがって $\partial \ln E(u, p) / \partial u$ は価格 p に依存しない。よってある関数 $\phi(u)$ と $\psi(p)$ が存在して

$$\ln E(u, p) = \phi(u) + \psi(p)$$

と書ける。指数を取れば

$$E(u, p) = h(u)b(p)$$

である。効用は順序のみが意味を持つので、効用指標の単調変換により $h(u) = u$ と正規化できる。したがって (12) を得る。□

homothetic 選好のもとでは Engel 曲線は原点を通る直線となる。これに対し、Gorman 型需要では Engel 曲線はなお支出に関して線形であるが、一般にはゼロでない切片をもつ。したがって、homothetic 選好は Gorman polar form の特殊ケースであり、Gorman 型需要はそれを non-homothetic な方向へ拡張したものと理解できる。

その具体例として、定数シフトを伴う CES 型効用関数を考えよう。

命題 4 (定数シフト CES と Gorman 型需要). 定数シフトを伴う CES 型効用関数

$$U^h(x) = \left[\sum_{j=1}^N (x_j - \xi_j^h)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (13)$$

を考える。ここで $\sigma > 0$ は代替の弾力性、 ξ_j^h は家計 h に固有の基準消費量を表す定数である。

このとき各家計のマーシャル需要は

$$x_j^h(p, y_h) = \xi_j^h + \frac{y_h - \sum_{m=1}^N p_m \xi_m^h}{P(p)} \frac{p_j^{-\sigma}}{\sum_{m=1}^N p_m^{1-\sigma}}, \quad P(p) := \left(\sum_{m=1}^N p_m^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad (14)$$

と書ける。したがって

$$x^h(p, y_h) = a_h(p) + b(p)y_h \quad (15)$$

の形で

$$a_j^h(p) = \xi_j^h - \frac{\sum_{m=1}^N p_m \xi_m^h}{P(p)} \frac{p_j^{-\sigma}}{\sum_{m=1}^N p_m^{1-\sigma}}, \quad (16)$$

$$b_j(p) = \frac{1}{P(p)} \frac{p_j^{-\sigma}}{\sum_{m=1}^N p_m^{1-\sigma}} \quad (17)$$

とおける。ここで $a_h(p)$ は零次同次、 $b(p)$ は -1 次同次であり、家計ごとの差異は切片項 $a_h(p)$ にのみ現れ、所得係数 $b(p)$ は家計間で共通である。したがって、これは *Gorman* 型需要の具体例である。

Proof. (13) において

$$z_j := x_j - \xi_j^h$$

とおくと、効用関数は通常の CES

$$\left[\sum_{j=1}^N z_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

に帰着する。一方、予算制約式は

$$\sum_{j=1}^N p_j x_j = y_h$$

であるから、

$$\sum_{j=1}^N p_j z_j = y_h - \sum_{j=1}^N p_j \xi_j^h$$

となる。したがって、 z_j については通常の CES 需要

$$z_j(p, y_h) = \frac{y_h - \sum_m p_m \xi_m^h}{P(p)} \frac{p_j^{-\sigma}}{\sum_m p_m^{1-\sigma}}$$

が得られる。元の変数 $x_j = z_j + \xi_j^h$ に戻せば (14) を得る。

次に (14) を y_h について整理すると

$$x_j^h(p, y_h) = \left[\xi_j^h - \frac{\sum_{m=1}^N p_m \xi_m^h}{P(p)} \frac{p_j^{-\sigma}}{\sum_{m=1}^N p_m^{1-\sigma}} \right] + \left[\frac{1}{P(p)} \frac{p_j^{-\sigma}}{\sum_{m=1}^N p_m^{1-\sigma}} \right] y_h.$$

よって (15) が成り立ち、切片項と所得係数はそれぞれ (16), (17) で与えられる。

さらに、価格を tp にスケールすると

$$P(tp) = tP(p), \quad (tp_j)^{-\sigma} = t^{-\sigma} p_j^{-\sigma}, \quad \sum_m (tp_m)^{1-\sigma} = t^{1-\sigma} \sum_m p_m^{1-\sigma}.$$

したがって (17) の右辺全体は t^{-1} 倍されるから、 $b(p)$ は -1 次同次である。また

$$\sum_m (tp_m)\xi_m^h = t \sum_m p_m \xi_m^h$$

と $P(tp) = tP(p)$ を用いると、(16) の第2項は t に依存しない。よって $a_h(p)$ は零次同次である。

以上より、(15) は Gorman 型需要であり、しかも $\xi_j^h \neq 0$ によって non-homothetic な切片を含む。□

以上のように、homothetic 選好も定数シフト CES も、いずれも Engel 曲線が支出に関して線形であるという意味で Gorman 型需要のクラスに属する。したがって、対応する支出関数は Gorman polar form をもつ。

この線形性はとても強い仮定である。Muellbauer (1975) は、市場需要そのものではなく平均支出シェアの集計可能性に着目することで、より一般的な Generalized Linear (GL) 形を導いた。

7.2 Muellbauer (1975) による GL と PIGL の必要十分条件

Gorman 型集計可能性の議論は、その後 Muellbauer (1975) によってより一般的な *Generalized Linear* (GL) 集計として拡張された。ここで要求される集計可能性の水準は、Gorman polar form より弱い。すなわち、市場需要そのものが総所得だけで表されることまでは要求せず、平均支出シェアが単一の代表的支出水準を通じて表されることを要求する。以下で扱う GL モデルの議論は、市場需要ベクトルそのものではなく、平均支出シェアの集計可能性を特徴づけるものである。

この節では、Muellbauer (1975) にしたがって、家計間集計の *consistency problem* を考える。問題は、家計ごとの支出シェア関数

$$\omega_i(y_h, p)$$

を支出額で加重平均して得られる市場全体の支出シェアが、再び同じ関数形を用いてある代表的支出水準 y_0 で評価したものとして書けるのはどのようなときか、というものである。

価格ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$ を所与とし、家計 $h = 1, \dots, H$ の総支出を $y_h > 0$ とする。財 i の家計 h における支出シェアを

$$\omega_i(y_h, p) := \frac{p_i x_i^h(p, y_h)}{y_h}$$

と書く。市場全体の加重平均支出シェアを

$$\bar{\omega}_i := \frac{\sum_{h=1}^H y_h \omega_i(y_h, p)}{\sum_{h=1}^H y_h} \quad (18)$$

と定義する。また、総支出を

$$Y := \sum_{h=1}^H y_h \quad (19)$$

と書く。

ここで考えたいのは、加重平均支出シェア $\bar{\omega}_i$ が、もとのミクロの支出シェア関数 $\omega_i(y, p)$ を用いて

$$\bar{\omega}_i = \omega_i(y_0, p) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (20)$$

と同時に見えるような y_0 が存在するのはどのような場合か、という問題である。この y_0 は Gorman Polar Case のような単なる総支出(総所得)に限らず、より一般に、所得分布 (y_1, \dots, y_H) と価格ベクトル p の関数として定まる 代表的支出水準と呼ぶ。したがって、(20) を満たす $y_0 = y_0(y_1, \dots, y_H, p)$ が常に存在するかどうか、この節の中心問題である。

7.2.1 GL の必要性

Gorman Polar Form の拡張として Generalized Linear Model がある。以下の定理は代表的支出水準が存在するならば支出シェア関数が GL 形であることが必要であることを示す。

定理 1 (GL の必要性). 任意の所得分布 (y_1, \dots, y_H) と価格ベクトル p に対して、(20) を満たす代表的支出水準 $y_0 = y_0(y_1, \dots, y_H, p)$ が存在するとする。このとき、あるスカラー関数 $v(y, p)$ と価格関数 $A_i(p), B_i(p)$ が存在して、各財の支出シェアは

$$\omega_i(y, p) = v(y, p)A_i(p) + B_i(p), \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

と書ける。さらに

$$\sum_{i=1}^n A_i(p) = 0, \quad \sum_{i=1}^n B_i(p) = 1 \quad (22)$$

が成り立つ。

この証明は Muellbauer (1975) で与えられている。それほど容易ではないが本格的に需要システムの研究を進めたい者にはじっくりと読む価値はあると思われる。必要条件は困難だが十分条件を示すことは比較的容易である。

7.2.2 GL の十分性

定理 2 (GL の十分性). 各財の支出シェアが *GL* 形 (21) を満たすとする。このとき、(20) を満たす代表的支出水準 y_0 が存在する。

Proof. 市場平均支出シェア $\bar{\omega}_i$ の定義 (18) に (21) を代入すると

$$\bar{\omega}_i = \frac{\sum_h y_h (v(y_h, p) A_i(p) + B_i(p))}{\sum_h y_h}.$$

$A_i(p)$ と $B_i(p)$ は家計 h に依存しないので、

$$\bar{\omega}_i = A_i(p) \frac{\sum_h y_h v(y_h, p)}{\sum_h y_h} + B_i(p).$$

ここで

$$\bar{v} := \frac{\sum_h y_h v(y_h, p)}{\sum_h y_h} \tag{23}$$

とおけば

$$\bar{\omega}_i = A_i(p) \bar{v} + B_i(p).$$

もし $v(\cdot, p)$ が y に関して単調であれば、 \bar{v} に対応する y_0 が存在して

$$v(y_0, p) = \bar{v} \tag{24}$$

と書ける。この y_0 を (24) によって定義すれば

$$\bar{\omega}_i = A_i(p) v(y_0, p) + B_i(p) = \omega_i(y_0, p).$$

したがって (20) が成り立ち、代表的支出水準が存在する。 \square

7.2.3 GL と relative marginal share 条件の同値性

GL は、各財の支出シェアの支出微分の比が支出水準に依存しないという条件と同値である。

定理 3 (GL と relative marginal share 条件の同値性). 支出シェア関数が十分滑らかであるとする。このとき、次の二条件は同値である。

(i) *GL* 形

$$\omega_i(y, p) = v(y, p) A_i(p) + B_i(p)$$

が成り立つ。

(ii) 任意の i, j について

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega_i(y, p) / \partial y}{\partial \omega_j(y, p) / \partial y} \right) = 0 \quad (25)$$

が成り立つ。

Proof. まず (i) \Rightarrow (ii) を示す。GL 形より

$$\frac{\partial \omega_i(y, p)}{\partial y} = A_i(p) \frac{\partial v(y, p)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_j(y, p)}{\partial y} = A_j(p) \frac{\partial v(y, p)}{\partial y}.$$

したがって

$$\frac{\partial \omega_i / \partial y}{\partial \omega_j / \partial y} = \frac{A_i(p)}{A_j(p)},$$

右辺は支出水準 y に依存しない。よって (25) が従う。

次に (ii) \Rightarrow (i) を示す。(25) より

$$\frac{\partial \omega_i(y, p) / \partial y}{\partial \omega_j(y, p) / \partial y} = A_{ij}(p)$$

とおける。ここで $A_{ij}(p)$ は p のみの関数である。よって

$$\frac{\partial}{\partial y} (\omega_i(y, p) - A_{ij}(p) \omega_j(y, p)) = 0.$$

したがって

$$\omega_i(y, p) - A_{ij}(p) \omega_j(y, p) = B_{ij}(p)$$

となる。基準財 $j = r$ を固定すると

$$\omega_i(y, p) = A_i(p) v(y, p) + B_i(p)$$

と書ける。これは GL 形である。 □

7.2.4 GL と支出関数の形の同値性

Muellbauer (1975) の重要な点は、GL が単なる支出シェア方程式の関数形ではなく、支出関数の形

$$E(u, p) = G(u, H(p))B(p)$$

と同値であることを示した点にある。

定理 4 (GL と支出関数の同値性). 個人が効用最大化行動を行い、支出関数 $E(u, p)$ が存在するとする。このとき、 GL は次の支出関数形と同値である：

$$E(u, p) = G(u, H(p))B(p), \quad (26)$$

ここで $B(p)$ は価格に関して一次同次、 $H(p)$ は価格に関してゼロ次同次である。

この証明も容易ではない。Muellbauer (1975)を参照されたい。

7.2.5 PIGL : 代表的支出水準が価格に依存しない場合

GLでは代表的支出水準 y_0 が価格ベクトル p に依存することを許容している。しかし、実際に価格ベクトルに依存すると、集計需要を考える際に、代表的家計の所得(総支出)の計算が著しく複雑になる。そこで代表的支出が価格に依存しない特殊ケースを考える。これは GL の特殊ケースであり、Muellbauer (1975)の命名に従いPrice Independent Generalized Linear (PIGL) と呼ばれている。

定義 1 (PIGL). GL 形 (21) のもとで、代表的支出水準 y_0 が価格ベクトル p に依存せず、所得分布 (y_1, \dots, y_H) のみの関数として定義できるとき、これを *Price Independent Generalized Linearity* (PIGL) と呼ぶ。このとき GL 形は

$$\omega_i(y, p) = v(y)A_i(p) + B_i(p) \quad (27)$$

と書ける。

定理 5 (PIGL の必要十分条件). 各支出シェアが GL 形 (21) を満たすとする。このとき、次の二条件は同値である。

- (i) 代表的支出水準 y_0 は価格ベクトル p に依存せずに定義できる。すなわち GL 形は (27) の形をもつ。
- (ii) 支出シェアは、ある定数 ε を用いて、つぎのいずれかの形に限られる：

$$\omega_i(y, p) = y^\varepsilon A_i(p) + B_i(p) \quad (\varepsilon \neq 0), \quad (28)$$

または

$$\omega_i(y, p) = \ln y A_i(p) + B_i(p). \quad (29)$$

Proof. (i) \Rightarrow (ii) の証明は長いのでここでは省略する。Muellbauer (1975)を参照されたい。(ii) \Rightarrow (i) を示すことは容易である。どちらの形でも v は価格 p に依存しない。

したがって、代表的支出水準 y_0 は

$$v(y_0) = \frac{\sum_h y_h v(y_h)}{\sum_h y_h}$$

によって価格とは独立に定義できる。ゆえに PIGL が成り立つ。 \square

7.2.6 PIGL / PIGLOG と支出関数の同値性

最後に、PIGL / PIGLOG の支出シェア形が、それぞれ支出関数の特定の形と同値であることを示す。

定理 6 (PIGL / PIGLOG と支出関数の同値性). *PIGL* の *power* 形 (28) は支出関数

$$E(u, p) = (a(p)^{-\varepsilon} + u b(p)^{-\varepsilon})^{-1/\varepsilon} \quad (\varepsilon \neq 0) \quad (30)$$

と同値であり、*PIGLOG* 形 (29) は支出関数

$$E(u, p) = H(p)^u B(p) \quad (31)$$

と同値である。

Proof. GL の一般結果より、支出関数は (26) の形

$$E(u, p) = G(u, H(p))B(p)$$

をもつ。したがって支出シェアは

$$\omega_i(u, p) = \frac{\partial \ln G(u, H(p))}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln B(p)}{\partial \ln p_i} \quad (32)$$

と書ける。

■(a) *power* 形の場合 (28) と $y = E(u, p)$ から

$$\omega_i(u, p) = E(u, p)^\varepsilon A_i(p) + B_i(p)$$

である。これを (32) に代入して整理すると、

$$\frac{\partial \ln G(u, H(p))}{\partial \ln p_i} = G(u, H(p))^{-\varepsilon} B(p)^{-\varepsilon} A_i(p)$$

の形を得る。左辺は $\ln G$ の価格微分であり、右辺は $G^{-\varepsilon}$ に比例している。したがって

$$\frac{1}{\varepsilon} G(u, H(p))^\varepsilon = H(p) + F(u)$$

と書ける。これを $E(u, p) = G(u, H(p))B(p)$ に戻すと

$$E(u, p)^\varepsilon = \varepsilon B(p)^\varepsilon (H(p) + F(u)).$$

関数の再定義により、これは

$$E(u, p) = (a(p)^{-\varepsilon} + u b(p)^{-\varepsilon})^{-1/\varepsilon}$$

と書ける。これが (30) である。

■(b) PIGLOG の場合 (29) と $y = E(u, p)$ から

$$\omega_i(u, p) = \ln E(u, p) A_i(p) + B_i(p)$$

である。ここで

$$z := \frac{\partial \ln G(u, H(p))}{\partial u}$$

とおく。Muellbauer の計算に従うと

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \ln p_i} = A_i(p)$$

が従う。したがって

$$\ln z = A(p) + F(u)$$

と書けるので

$$\frac{\partial \ln G(u, H(p))}{\partial u} = e^{A(p)} e^{F(u)}.$$

これを u について積分すると

$$\ln G(u, H(p)) = u \ln H(p) + K(p)$$

と書ける。 $K(p)$ は $\ln B(p)$ に吸収できるので

$$\ln E(u, p) = u \ln H(p) + \ln B(p).$$

したがって

$$E(u, p) = H(p)^u B(p),$$

すなわち (31) を得る。 □

7.3 nhCES は一般に GL でも PIGL でもない

Gorman Polar Caseよりは一般的とはいえ、依然、GL / PIGL は強い制約であることには変わりはない。例えば、近年Comin et al. (2021)などにより提唱されている、CES効用関数をノンホモセティックに拡張した効用関数、nhCESはGLでもPIGLでもない。

non-homothetic CES (nhCES) の標準的な支出シェア表現として、家計 h の財 i に対する支出シェアが

$$w_{ih}(x_h, p) = \frac{\alpha_i(p) x_h^{\eta_i}}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(p) x_h^{\eta_j}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

と書ける場合を考える。ここで $\alpha_i(p) > 0$ は価格に依存する係数であり、 η_i は財ごとに異なる所得弾力性パラメータを表す。非同次性は、一般に

$$\eta_i \neq \eta_k \quad (i \neq k)$$

によって表現される。

他方、もしこの需要体系が Generalized Linear (GL) であれば、支出シェアは

$$w_{ih}(x_h, p) = V_h(x_h, p)A_i(p) + B_i(p) + C_{ih}(p)$$

と書ける。したがって、所得 x_h による微分は

$$\frac{\partial w_{ih}(x_h, p)}{\partial x_h} = A_i(p) \frac{\partial V_h(x_h, p)}{\partial x_h}$$

である。ゆえに、任意の二財 i, k について

$$\frac{\partial w_{ih}(x_h, p) / \partial x_h}{\partial w_{kh}(x_h, p) / \partial x_h} = \frac{A_i(p)}{A_k(p)}$$

となり、この比率は所得 x_h に依存してはならない。したがって、これは GL であるための必要条件である。

そこで nhCES の支出シェアを微分すると、

$$\frac{\partial w_{ih}(x_h, p)}{\partial x_h} = \frac{w_{ih}(x_h, p)}{x_h} \left(\eta_i - \bar{\eta}_h(x_h, p) \right),$$

ただし

$$\bar{\eta}_h(x_h, p) := \sum_{j=1}^n w_{jh}(x_h, p) \eta_j$$

である。したがって、任意の二財 i, k について

$$\frac{\partial w_{ih}(x_h, p)/\partial x_h}{\partial w_{kh}(x_h, p)/\partial x_h} = \frac{w_{ih}(x_h, p)}{w_{kh}(x_h, p)} \cdot \frac{\eta_i - \bar{\eta}_h(x_h, p)}{\eta_k - \bar{\eta}_h(x_h, p)}.$$

さらに

$$\frac{w_{ih}(x_h, p)}{w_{kh}(x_h, p)} = \frac{\alpha_i(p)}{\alpha_k(p)} x_h^{\eta_i - \eta_k}$$

であるから、

$$\frac{\partial w_{ih}(x_h, p)/\partial x_h}{\partial w_{kh}(x_h, p)/\partial x_h} = \frac{\alpha_i(p)}{\alpha_k(p)} x_h^{\eta_i - \eta_k} \cdot \frac{\eta_i - \bar{\eta}_h(x_h, p)}{\eta_k - \bar{\eta}_h(x_h, p)}.$$

右辺は、一般に $\eta_i \neq \eta_k$ である限り、明らかに所得 x_h に依存する。したがって、GL の必要条件

$$\frac{\partial w_{ih}/\partial x_h}{\partial w_{kh}/\partial x_h} \text{ が } x_h \text{ に依存しない}$$

は満たされない。

ゆえに、non-homothetic CES (nhCES) は、特殊な退化ケース

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$$

を除けば、一般には Generalized Linear (GL) ではない。さらに、PIGL は GL の特殊ケースであるから、nhCES は同じ退化ケースを除けば一般には PIGL でもない。したがって、non-homothetic CES (nhCES) を家計レベルの選好として採用する限り、市場需要を単一の代表的個人需要として厳密に集計することはできない。すなわち、nhCES の下では代表的個人は一般には存在しない。この場合、マクロモデルを構築するには、代表的家計を仮定するのではなく、個人レベルの選好を明示的に集計した異質家計モデルとする必要がある。

7.4 PIGLOGの意義

いま複数財の需要システムの分析を行うと仮定しよう。価格は全ての家計で同一と仮定する。このとき、数量に関しては、市場レベルでの総需要の情報しかないと仮定しよう。家計間で支出水準が異なっていることを許容すると、推計可能なものでは Gorman Polar Formのみである。むしろ、CESなどのhomothetic効用関数はGorman Polar Formの一種であり、一般にホモセティック選好は許容されるが、ノンホモセティック選好は非常に限定された状況でしか市場レベルの情報からは推定できない。PIGLOGに拡張すると、概念として代表的個人が存在すると想定することは可能になる。すなわち、代表的個人が

存在するマクロモデルを構築し、の代表的個人の意思決定から得られる需要量が複数の家計から構成される経済における市場均衡配分と一致するようモデル化することが可能である。代表的個人の選好がわからず、推定することが必要な時には、しかしながら、市場レベルの支出シェアを用いることは可能だが、代表的支出の計算は市場レベルの情報のみからは不可能であり、追加の情報か仮定が必要になる。その追加の情報は、えてして個票データから作成せねばならない。

もしも個票データが利用可能であれば、構造モデルを構築する際に、構造パラメータの識別のために集計可能性を考慮する必要はなくなる。後述するように、たとえある家計グループでの集計的な需要システムの推計を行う場合でも、個票データから推計に必要な情報、対数をとったあとの総支出の加重平均やその分散を計算することで、推定が可能になる。具体的に説明しよう。

いま、推計モデルが下記で与えられるとする。

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln \frac{y}{P} \right)$$

データの集計量しかないと、私たちは上記の平均しか観察することができない。価格は家計間で同一であると仮定し期待値オペレーターを用いると

$$E[\omega_i] = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} E[\ln p_k] + \beta_i E\left[\left(\ln \frac{y}{P}\right)\right]$$

となる。問題は右辺の $E\left[\left(\ln \frac{y}{P}\right)\right]$ である。Jensenの不等式より $E[\ln y] \leq \ln(E[y])$ となり、マクロの集計量である $\ln E[y]$ と一致しない。またその不一致は対数関数が凹関数であるため、システムティックな動きを示す。したがって、AIDSモデルを集計量のみから推計するとシステムティックなバイアスが推定量にかかることになる。しかし、いま個票データがあるなら、 $E[\ln y]$ を個票から作成することが可能であり、モデルに対応した変数を得ることが可能である。

7.5 PIGLOGとAIDS

前節までに見たように、Muellbauer の集計理論では、価格独立な代表的所得が存在する Price Independent Generalized Linear (PIGL) の特殊ケースとして、支出シェアが

$$w_i(y, p) = A_i(p) \log y + B_i(p)$$

と表される *PIGLOG* が導かれる。このとき、支出シェアは所得の対数に対して線形であり、家計間の異質性を許しても、集計された市場シェアがなお整った形を保つという重要な性質をもつ。

この *PIGLOG* の考え方は、Deaton and Muellbauer (1980) による Almost Ideal Demand System (AIDS) の理論的出発点と密接に関係している。AIDS では支出関数を

$$\log E(u, p) = (1 - u) \log a(p) + u \log b(p)$$

と仮定する。これは、対数支出関数が二つの価格関数 $\log a(p)$ と $\log b(p)$ のあいだを、効用水準 u に応じて線形に補間する形になっていることを意味する。この形は、Muellbauer の意味での *PIGLOG class* に属する支出関数の具体的表現とみなすことができる。

実際、上式を価格で対数微分し、Shephard の補題を用いると、支出シェアは

$$w_i = \frac{\partial \log E(u, p)}{\partial \log p_i}$$

で与えられるから、 $\log a(p)$ と $\log b(p)$ の形に応じて $\log(y/P(p))$ に線形なシェア方程式が導かれる。AIDS はさらに、

$$\log a(p) = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km} \log p_k \log p_m$$

という *translog* 型価格関数を採用することにより、任意の支出関数に対する局所的な二次近似という「柔軟性」と、*PIGLOG* 型の「対数実質支出に線形なシェア方程式」とを両立させている。

したがって、AIDS は単に経験的に便利な需要システムではない。その背後には、Gorman に始まり、Muellbauer によって GL, PIGL, *PIGLOG* として整理された集計理論の系譜がある。もっとも、AIDS そのものは市場需要の厳密な集計可能性を直接仮定するというより、*PIGLOG* 型支出関数を特定の柔軟な価格関数で具体化した需要システムである。この意味で、AIDS は集計理論の応用そのものというよりも、*PIGLOG* の構造を実証分析に適した形で具現化したモデルとして理解するのが適切である。

7.6 AIDSにおける市場集計量と分散情報

前節まで、AIDSが*PIGLOG*型支出関数に基づく理論的に整合的な需要システムであることを確認した。しかし、理論的整合性が保証されていても、実際の推計においては別の

問題が生じる。AIDSは家計レベルの選好から導出されているが、多くの場合、利用可能なデータは家計個票ではなく市場単位の集計量である。このとき、集計データから家計レベルの構造パラメータをどこまで回復できるか、という問題が生じる。

AIDSの家計 h に対するシェア方程式を

$$\omega_{ih} = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i (\ln x_h - \ln P) + u_{ih} \quad (33)$$

と書こう。ここで x_h は家計 h の総支出、 P は共通の物価指数、 u_{ih} は観察されない異質性や測定誤差を表す攪乱項である。いま同じ市場に属する家計に対して価格ベクトル p が共通であるとすると、家計間で変動するのは主として $\ln x_h$ と u_{ih} である。

市場全体の総支出を

$$X := \sum_{h=1}^H x_h$$

とし、各家計の支出額シェアを

$$s_h := \frac{x_h}{X}$$

と定義する。すると、市場平均シェアは支出加重平均として

$$\bar{\omega}_i := \sum_{h=1}^H s_h \omega_{ih} = \frac{\sum_{h=1}^H x_h \omega_{ih}}{\sum_{h=1}^H x_h} \quad (34)$$

で与えられる。同様に、 $\ln x_h$ の支出加重平均を

$$\overline{\ln x}^x := \sum_{h=1}^H s_h \ln x_h = \frac{\sum_{h=1}^H x_h \ln x_h}{\sum_{h=1}^H x_h} \quad (35)$$

と書き、攪乱項の支出加重平均を

$$\bar{u}_i^x := \sum_{h=1}^H s_h u_{ih} \quad (36)$$

と書く。

このとき、(33) の両辺を s_h で加重平均すると

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_i &= \sum_{h=1}^H s_h \left[\alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i (\ln x_h - \ln P) + u_{ih} \right] \\ &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i \left(\overline{\ln x}^x - \ln P \right) + \bar{u}_i^x \end{aligned} \quad (37)$$

を得る。したがって、平均式だけを見れば、AIDSは市場レベルでも家計レベルと同じ係数 $\alpha_i, \gamma_{ik}, \beta_i$ をもつ線形シェア方程式として書ける。しかし、この平均式だけでは、家計間の異質性は観察されない攪乱項の中に吸収されてしまう。したがって、その異質性が総支出や属性変数と相関しているときには、平均式に基づく構造パラメターの推定は一般にバイアスをもつ。

ここで強調したいのは、AIDS を市場レベルの集計量だけで推定しようとする、本来必要な説明変数があるままでは観察できないという点である。実際、(37) に現れるのは

$$\overline{\ln x}^x = \sum_{h=1}^H s_h \ln x_h$$

であって、通常市場統計から得られる

$$\ln \bar{x}, \quad \bar{x} := \sum_{h=1}^H s_h x_h$$

ではない。対数関数は凹関数であるから、Jensen の不等式により

$$\overline{\ln x}^x \leq \ln \bar{x}$$

が成り立ち、両者は一般には一致しない。したがって、市場平均シェアを被説明変数とし、説明変数として単純に $\ln \bar{x}$ を用いると、AIDS の理論式とはずれた回帰式を推定してしまうことになる。

しかし、このずれは 2 次近似により市場内の分散情報を用いて補正できる。実際、 $\ln x_h$ を平均支出 \bar{x} のまわりで 2 次まで展開すると

$$\ln x_h \approx \ln \bar{x} + \frac{x_h - \bar{x}}{\bar{x}} - \frac{1}{2} \frac{(x_h - \bar{x})^2}{\bar{x}^2}$$

である。両辺を s_h で加重平均すると、一次の項は消えるので、

$$\overline{\ln x}^x \approx \ln \bar{x} - \frac{1}{2} \frac{\text{Var}^x(x)}{\bar{x}^2} \tag{38}$$

を得る。ただし

$$\text{Var}^x(x) := \sum_{h=1}^H s_h (x_h - \bar{x})^2$$

は支出加重分散である。

これを (37) に代入すると、

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_i &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i \left(\overline{\ln x^x} - \ln P \right) + \bar{u}_i^x \\ &\approx \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i (\ln \bar{x} - \ln P) - \frac{\beta_i \text{Var}^x(x)}{2 \bar{x}^2} + \bar{u}_i^x.\end{aligned}\quad (39)$$

したがって、2 次近似のもとでは、市場レベルで AIDS を推定する際の説明変数として、通常の

$$\ln \bar{x} - \ln P$$

に加えて、

$$\frac{\text{Var}^x(x)}{\bar{x}^2}$$

を追加すればよいことになる。すなわち、推定式は

$$\bar{\omega}_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i (\ln \bar{x} - \ln P) + \delta_i \frac{\text{Var}^x(x)}{\bar{x}^2} + \varepsilon_i \quad (40)$$

の形で書け、AIDS の 2 次近似に従えば係数には

$$\delta_i \approx -\frac{\beta_i}{2}$$

という制約がかかる。

この式の意味は明確である。本来、集計データだけでは $\overline{\ln x^x}$ が観察できないため、AIDS の理論式をそのまま推定することはできない。しかし、市場内の支出分散が利用可能であれば、Jensen の不等式によるずれを 2 次近似で補正できる。その結果、 $\ln \bar{x} - \ln P$ だけではなく、市場内の支出分散を表す追加変数

$$\frac{\text{Var}^x(x)}{\bar{x}^2}$$

を回帰式に含めることで、市場集計量に基づく実行可能な AIDS 推定式を構成することができるのである。

さらに、変動係数の二乗

$$CV_x^2 := \frac{\text{Var}^x(x)}{\bar{x}^2}$$

を用いれば、(40) は

$$\bar{\omega}_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i (\ln \bar{x} - \ln P) + \delta_i CV_x^2 + \varepsilon_i \quad (41)$$

とも書ける。したがって、実証分析では、市場平均総支出だけでなく、その市場内分散ないし変動係数も説明変数として加えることが、AIDS を集計量から近似的に推定するうえで重要になる。

なお、家計個票データそのものが利用できず、市場内の支出分散

$$\text{Var}^x(x)$$

を直接計算できない場合であっても、支出分布に関する分位点情報が公表されていれば、その情報から分散を近似的に点推定することが可能である。たとえば、十分に細かい分位階級ごとの代表値または境界値が利用できる場合には、それらを用いて grouped data として分布を近似し、平均と分散を復元できる。より粗い情報しかない場合でも、四分位点や十分位点から、対数正規分布などのパラメトリック分布を仮定して分布のパラメータを推定し、そこから $\text{Var}^x(x)$ を点推定することができる。したがって、家計個票が利用できない場合でも、分位点情報が入手可能であれば、市場平均総支出に加えて市場内分散を近似的に回帰式へ組み込むことができ、AIDS の集計推定における Jensen の不等式によるずれを一定程度補正することが可能である。

7.7 ゼロ支出問題と集計による回避

AIDSやQUAIDSのような需要システムは、通常、内点解を前提として双対性理論に基づいて導出される。すなわち、ある効用水準を達成するための最小支出問題を考え、その支出関数を価格で微分することで需要関数、あるいは支出シェア方程式を導く。このため、ある財への支出がゼロである場合、通常の意味でのシェファードの補題をそのまま適用することはできず、双対性に基づく標準的な需要システムの導出は崩れる。したがって、ゼロ支出は単なるデータ上の欠損や端点の問題ではなく、需要システムの理論的基礎そのものに関わる問題である。

ゼロ支出への対処法としては、大きく分けて三つの考え方がある。第一は、クーン＝タッカー条件に基づく方法である。これは、消費量の非負制約を明示的に組み込んだ効用最大化問題を考え、内点解だけでなく端点解も含めて需要体系を導出する方法であり、Wales and Woodland (1983) によって提示されている。第二は、未購入財に対して留保価格（仮想価格）を導入する双対アプローチである。これは、観察されたゼロ支出を、その財の市場価格が当該家計の留保価格を上回っている状態として解釈するものであり、Lee and Pitt (1986) により提案された。これらを実際の需要システム推計に適用した例として Gould et al. (2002) がある。第三は、購入するか否かという参加決定と、購入

した条件のもとでの購入量決定とを分離して扱う二段階推定法であり、Shonkwiler and Yen (1999) が代表的である。

クーン=タッカー条件や留保価格に基づく方法の利点は、ゼロ支出を需要理論の内部で扱っており、構造モデルと整合的である点にある。とくに、これらの方法では、端点解を含む最適化問題から需要関数を導くため、支出関数や間接効用関数との対応が維持されやすく、補償変分や等価変分といった厚生指標にも理論的な意味づけを与えやすい。しかしその反面、未購入財に対応する留保価格を解かなければならず、さらにどの財が正に消費され、どの財がゼロとなるかというレジームの切替を尤度評価に組み込む必要があるため、多数財の場合には計算負荷が非常に大きい。とりわけ、QUAIDSのように実質支出項が非線形に入るモデルでは、この計算はさらに不安定になりやすい。

これに対して、Shonkwiler and Yen (1999) の二段階推定法は、第一段階で購入の有無を、第二段階で購入量または支出シェアを推定するため、計算負荷が比較的小さいという利点をもつ。しかし、この方法はゼロ支出を参加方程式と条件付き需要方程式に分解して扱う誘導形的な方法であり、クーン=タッカー条件や留保価格を明示的に通じて支出関数から導かれたものではない。そのため、推定された需要体系が支出関数や間接効用関数とどのように対応するかは自明ではなく、補償変分などの厚生指標を解釈するためには追加の仮定が必要となる。

このように、ゼロ支出問題に対しては構造的に整合的な方法と計算上扱いやすい方法が存在するが、両者のあいだには明確なトレードオフがある。本講義ノートでは、構造的な整合性をできるだけ保ちつつ、現実の多数財データに対して計算可能な形でAIDSを適用するため、家計単位データを属性別に集計するという方法を採用。具体的には、家計を(1)年齢(6カテゴリー)、(2)居住地域(4カテゴリー)、(3)等価消費(5カテゴリー)によって分割し、合計120グループに集計する。こうしてグループ単位で支出を集計すると、個々の家計ではしばしば観察されるゼロ支出が大幅に減少し、双対性に基づく需要システムを適用しやすくなる。

8 動学化

AIDSを動学モデルに応用する試みには二種類あり、Blundell (1998)のように、異時点間に関して分離可能な効用関数を考え、AIDSは各期における静学モデルとして推計し、その推計結果をもとに一財モデルのEuler方程式の推計に移行する二段階推計と、Karagiannis et al. (2000)のように、特に動学理論を考えず、シェア方程式の時間階差をとる手法である。Blundellの手法は標準的なミクロ経済理論に即したものであるが、

Karagiannisの手法はマクロ時系列モデルに即し、シェアの時間階差のラグ項が被説明変数に加えられており、AIDSにあるミクロ経済学的な構造があいまいになっている印象をうける。シェア方程式のad hocな動学化はたまにみかけるものの、主流になっているとはいいがたい。

動学モデルにはせずに、単純に時間階差をとることも考えられる。Deaton and Muellbauer (1980)Dに従い、下記のようなシェア方程式の階差を考えてみよう。

$$\begin{aligned}\omega_i &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_{kt} + \beta_i \left(\ln \frac{y_t}{P_t} \right) + u_{it} \\ \Delta \omega_{it} &= \sum_k \gamma_{ki} \Delta \ln p_{kt} + \beta_i \Delta \left(\ln \frac{y_t}{P_t} \right) + u_{it} - u_{it-1} \\ \Delta \ln P_t &= \sum \alpha_k \Delta \ln p_{kt} + \Delta \left(\frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m \right)\end{aligned}$$

物価方程式の階差は複雑となるので、Deaton and Muellbauer (1980)による単純化を仮定すると、

$$\ln P_t = \sum_k \omega_k \ln p_{kt}$$

となる。 ω_k がサンプル期間において一定と仮定すると、推計式は、

$$\begin{aligned}\Delta \omega_{it} &= \sum_k \gamma_{ki} \Delta \ln p_{kt} + \beta_i (\Delta \ln y_t - \Delta \ln P_t) + \Delta u_{it} \\ &= \sum_k \gamma_{ki} \Delta \ln p_{kt} + \beta_i \left(\Delta \ln y_t - \sum_k w_k \Delta \ln p_{kt} \right) + \Delta u_{it}\end{aligned}$$

となり、パラメーター制約を加えても線形回帰で推計可能である。時間階差をとることができれば、必要な情報は水準ではなく変化率となるので、価格データ収集において非常に大きなアドバンテージとなる。多くの場合、価格データは水準ではなく、前期からの変化率で与えられている。また、前述のような、価格の計測単位への依存、という問題もなくなる。なお、パネルデータが存在する場合、Banks et al. (1997)のように、様々なバイアスを除去するためにGMMを行うことも可能である。

AIDSモデルをパネル、あるいは時系列データで分析することで、物価水準の情報が不要になり、物価変化率のデータを用いることができるのは大きなメリットである(物価指数の定義を簡素化する必要があるが)。しかし、AIDSの大きな利点である、人々の選好関係、あるいは支出関数から出発する、というメリットが小さくなってしまふ点には注意が必要である。AIDSの基になる支出関数は静学モデルであり、そこには将来や過去の消費

は考慮されていない。もしも支出される財の一部が耐久消費財、あるいは保存可能であるなら、現在の支出は将来の価格や過去の購入行動に依存してくる。また、旅行や美容院、医療・健康関連の支出、さらには高級外食などは、たとえ保存は不可能なサービスであっても、過去や将来の予定から現在の支出が独立であるとは考えにくい。AIDSを本格的に動学を導入するためには、時点間分離可能性の仮定を廃する必要があるが、それは非常に複雑になってしまう。どれだけの消費財が時点間分離可能という仮定を満たすのか、をまず推計する必要があるが、多くの財は時点間で分離可能になっていないことを示唆する研究は多い。これは第四回の講義ノート(習慣形成仮説と家計内在庫モデル、で触れる予定である。

9 経済厚生計測

時系列、あるいはパネルデータがあり、そのサンプル期間中に税制変化や大きな相対価格の変化が生じたとしよう。そのような変化が経済厚生にどのような影響を与えたかをAIDSでは計測可能である。異なる二つの価格ベクトルの経済厚生の違いは、両者の効用水準を一定に保つ場合の最小支出水準の違い、すなわちCost of Living Indexにより計測可能である。具体的には、

$$\begin{aligned} COLI &= \ln E(u_0, p_1) - \ln E(u_0, p_0) \\ &= \sum \alpha_k \Delta \ln p_k + \frac{\Delta}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m + u_0 \beta_0 \Delta \prod_k p_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

を計算すればよい。固定する効用水準を0期とするか1期とするかで値は若干異なる。

なお、ミクロ理論によく出てくる補償変分CVと等価EVは

$$CV = \ln E(u_1, p_1) - \ln E(u_0, p_1)$$

$$EV = \ln E(u_1, p_0) - \ln E(u_0, p_0)$$

であり、生計費指数とよく似ているが異なる概念であることに注意されたい。

効用の水準そのものは

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\ln E(u, p) - \ln P}{\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}} \\ &= \frac{\ln y_0 - \ln P}{\ln b(p) - \ln a(p)}. \end{aligned}$$

で求めることができる。この厚生評価の利点の一つは、家計属性、具体的には所得水準により、家計間で厚生がどう変化したかを分析可能なことである。例えば、食料品の相対価格が急激に変化したとき、家計の需要関数の構造を考慮しながら、その変化が異なる家計にどのように帰着したのか、金銭によりその大きさを表現できるのである。

10 家計属性を取り込んだAIDS

これまでのAIDSでは、すべての家計が同一の選好を持つものとして、支出関数を

$$\ln c(u, p) = (1 - u) \ln a(p) + u \ln b(p)$$

と書いてきた。しかし実際には、家族人数、子どもの有無、世帯主年齢、就業状態などの家計属性により、同じ価格と同じ総支出のもとでも需要構成は体系的に異なる。こうした異質性を需要体系に取り込むため、AIDSではしばしば家計属性ベクトル z を支出関数に組み込む拡張が用いられる。

最も単純な方法は、支出関数の $\ln a(p)$ の部分に家計属性による定数シフトを導入することである。すなわち、

$$\ln c(u, p, z) = (1 - u) \ln a(p, z) + u \ln b(p)$$

とし、

$$\ln a(p, z) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \gamma_{km} \ln p_k \ln p_m + \sum_{r=1}^R \delta_r z_r$$

と書く。このとき、 $\ln a(p, z)$ を価格で微分しても $\delta_r z_r$ の項は消えるため、支出シェア方程式には直接現れない。したがって、属性変数が効用水準の原点や基準的な厚生水準のみを動かす場合には、需要システムには影響しない。これは、家計属性を導入するには、単なる定数シフトだけでは不十分であることを意味する。

そこで実証研究では、家計属性が価格体系との相互作用を通じて需要構成を変えるように、 $\ln a(p, z)$ に価格と属性の交差項を導入することが多い。たとえば、

$$\ln a(p, z) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \gamma_{km} \ln p_k \ln p_m + \sum_{r=1}^R \delta_r z_r + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^R \rho_{kr} z_r \ln p_k$$

とする。このとき、シェファードの補題より、第*i*財の支出シェアは

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{\partial \ln c(u, p, z)}{\partial \ln p_i} \\ &= (1 - u) \frac{\partial \ln a(p, z)}{\partial \ln p_i} + u \frac{\partial \ln b(p)}{\partial \ln p_i}. \end{aligned}$$

AIDSの場合と同様の整理を行うと、

$$w_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \ln p_j + \sum_{r=1}^R \rho_{ir} z_r + \beta_i \ln \left(\frac{x}{P(p, z)} \right)$$

という形のシェア方程式が得られる。ただし、 x は総支出、 $P(p, z)$ は属性変数を含む価格指数である。ここで

$$\alpha_i(z) := \alpha_i + \sum_{r=1}^R \rho_{ir} z_r$$

と書けば、

$$w_i = \alpha_i(z) + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln \left(\frac{x}{P(p, z)} \right)$$

となる。すなわち、家計属性の効果は、シェア方程式においては主として定数項の一部を家計ごとに変化させる形で現れる。これがいわゆる demographic translating の基本的な考え方である。

より一般には、 $\ln b(p)$ の側にも属性効果を入れて

$$\ln b(p, z) = \ln a(p, z) + \beta_0 \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_k}$$

あるいは

$$\ln b(p, z) - \ln a(p, z) = \beta_0(z) \prod_{k=1}^n p_k^{\beta_k}$$

のように書くことも可能であるが、講義ノートではまず、属性変数が主として $\ln a(p, z)$ を通じて基礎的な需要構成に影響する場合を考えれば十分であろう。

家計属性を含む場合に重要なのは、需要方程式の推定と厚生評価とで、属性変数の扱いが異なることである。需要方程式の推定においては、上のように $\sum_r \rho_{ir} z_r$ がシェア方程式の定数項の一部として現れるため、各財の需要構成に対する家計属性の影響を比較的容易に推定できる。しかし、補償変分や等価変分、生計費指数といった厚生指標を計算する

際には、推定された属性効果をシェア方程式だけで処理してはならず、必ず元の支出関数の中に戻さなければならない。

実際、属性変数を含む支出関数

$$c(u, p, z)$$

が得られていれば、基準状態 (p^0, z^0, x^0) と比較状態 (p^1, z^1, x^1) の間の補償変分や等価変分は、通常と同様に支出関数を用いて定義される。たとえば、基準状態の効用水準を

$$u^0 = v(p^0, x^0, z^0)$$

とすると、比較状態への価格変化に対する補償変分は

$$CV = c(u^0, p^1, z^1) - c(u^0, p^0, z^0)$$

で与えられる。ここで、もし家計属性が変化しないなら $z^1 = z^0$ と置けばよいが、家族人数の増加や子どもの誕生のように家計属性そのものが変化する場合には、その変化も支出関数の中で評価しなければならない。したがって、家計属性を含むAIDSでは、シェア方程式において属性変数を単なる追加説明変数として扱うだけでは不十分であり、厚生分析の際には、それがどのような支出関数を背後に持つのかを明示しておく必要がある。

この点は、AIDSやQUAIDSに家計属性を導入する際の重要な利点でもある。すなわち、属性変数を理論的に整合的な形で支出関数に組み込んでおけば、需要方程式の推定だけでなく、異なる家計属性を持つ世帯間の厚生比較や等価尺度の計算にも同一の枠組みで対応できるのである。

11 QUAIDS

Translog型の支出関数はFlexible関数であり、なだらかな「任意」の支出関数の近似となる。これは確かに魅力的な特徴であるが、あくまで近似、それもある一点における近似にすぎないため、近似点から大きく乖離すると、精度が低くなってしまう。例えば、AIDSにおける支出シェアの(実質)所得弾力性は一定であるが、低所得者と超高所得者の弾力性が同じであると仮定することは非現実的である。多様な家計がデータに含まれている場合、需要システムの局所的な近似ではなく、大域的な近似が必要な場合が出てくる。ホモセティック選好に対応するコブ・ダグラス型やCES型は、非常に制約が強いが、大域的に成立するものであった。AIDSはあくまで局所的な成立するものにすぎず、大域的には原則成立しないものである。Banks et al. (1997)は、イギリスの家計調査を用い、食料を対象とする場合はシェアの所得弾力性は所得水準によらず一定であるが、酒や衣類のシ

シェアは山形になる、すなわち、中所得者のシェアが高額所得者や低額所得者よりも高くなっていることを指摘した。AIDSではこのシェアと所得の関係を描写できない。そこで、彼らは、AIDSを拡張し、下記のように、AIDSの間接効用と新たな価格関数 $\lambda(p)$ の調和平均として新たな間接効用関数を仮定した。

$$\ln V(p, y) = \left[\left(\frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)} \right)^{-1} + \lambda(p) \right]^{-1}$$

整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln V(p, y)} - \lambda(p) &= \left(\frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)} \right)^{-1} \\ &= \frac{1 - \ln V(p, y) \lambda(p)}{\ln V(p, y)} \end{aligned}$$

$$\frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)} = \frac{\ln V(p, y)}{1 - \ln V(p, y) \lambda(p)}$$

$$\ln y = \frac{\ln V(p, y) (\ln b(p) - \ln a(p))}{1 - \ln V(p, y) \lambda(p)} + \ln a(p)$$

$$\begin{aligned} \ln E(u, p) &= \frac{u (\ln b(p) - \ln a(p))}{1 - u\lambda(p)} + \ln a(p) \\ &= \frac{u (\ln b(p) - \ln a(p)) + \ln a(p) - u\lambda(p) \ln a(p)}{1 - u\lambda(p)} \\ &= \frac{u \ln b(p) + (1 - u) \ln a(p) - u\lambda(p) \ln a(p)}{1 - u\lambda(p)} \end{aligned}$$

したがって、QUAIDSの支出関数は

$$\begin{aligned} \ln E(u, p) &= \frac{u \ln b(p) + (1 - u) \ln a(p) - u\lambda(p) \ln a(p)}{1 - u\lambda(p)} \\ &= \frac{u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} + a_0 + \sum \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m - u\lambda(p) \ln a(p)}{1 - u\lambda(p)} \end{aligned}$$

無論、 $\lambda(p) = 0$ であれば、この支出関数はAIDSと一致する。 $u\lambda(p)$ が分母にも来ていることから、対数微分により得られる支出シェアには二次項が生じる。導出はBanks et

al. (1997)を参照してもらいたいが、この対数微分により、下記のQUAIDSを導出可能である。ただし、 $\lambda(p)$ は対数価格の線形関数と仮定している。すなわち、

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln \frac{y}{P} \right) + \frac{\lambda_i}{\ln b(p) - \ln a(p)} \left(\ln \frac{y}{a(p)} \right)^2$$

$$\lambda(p) = \sum_i \lambda_i \ln p_i, \sum_i \lambda_i = 0$$

AIDSと比較すると、対数実質所得の二次の項が生じていることがわかる。その分、パラメター λ_i が増えている。このQUAIDSも便利なSTATA codeが利用可能であり、簡単に推計可能である。なお、AIDS同様にQUAIDSは α_0 の識別ができず、外生的に値を入れねばならない。QUAIDSを用いた分析にはそれこそ無数に存在するが、Banks et al (1997)は経済厚生評価も含めた非常にわかりやすい論文であり、熟読を勧める。

12 Exact Affine Stone Index (EASI) 需要体系

AIDS では、支出シェア方程式は実質支出

$$y := \ln \left(\frac{x}{P} \right)$$

に関して線形であり、

$$w_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i y$$

と書かれる。これに対し、Banks et al. (1997) による QUAIDS では、実質支出の二次項を導入することで Engel 曲線の柔軟性を高め、

$$w_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ik} \ln p_k + \beta_i y + \lambda_i y^2$$

のような形を許容する。しかし、QUAIDS においても所得効果の形状はなお二次関数に制約されており、十分に柔軟とは言えない場合がある。

この点をさらに一般化したのが、Lewbel and Pendakur (2009) による Exact Affine Stone Index (EASI) 需要体系である。Lewbel and Pendakur (2009) の出発点は、通常の Marshallian 需要を間接効用から closed form で導出する代わりに、観察可能な変数から構成される *implicit utility* を用いる点にある。すなわち、対数支出関数

$$x = C(p, u, z, \varepsilon)$$

を考え、通常のように間接効用

$$u = V(p, x, z, \varepsilon)$$

を明示的に求めるのではなく、支出シェア w 、価格 p 、名目支出 x 、属性 z の関数として

$$y = g(w, p, x, z)$$

を構成し、これを Hicksian 需要に代入することにより *implicit Marshallian demand* を定義する。この y は効用の一つの cardinalization に対応し、多くの場合、対数実質支出として解釈できる。

Lewbel and Pendakur (2009) は、まず単純な例として

$$C(p, u, z, \varepsilon) = u + p' m(u, z) + p' \varepsilon$$

という対数支出関数を考える。ここで $m(u, z)$ は J 次元ベクトル値関数であり、

$$i' m(u, z) = 1$$

を満たすとする。シェファードの補題より Hicksian 支出シェアは

$$w = m(u, z) + \varepsilon$$

となるので、これを支出関数に代入すると

$$x = u + p' w$$

を得る。したがって、

$$u = x - p' w$$

であり、

$$y := x - p' w$$

とおけば、これは名目支出を Stone の対数価格指数 $p' w$ で deflate した対数実質支出そのものになる。AIDS では Stone index は通常、非線形価格指数の近似として導入されるが、この場合には Stone index が実質支出を与える *exact* な deflator になっている。

さらに Lewbel and Pendakur (2009) は、より一般に

$$C(p, u, z, \varepsilon) = u + p' m(u, z) + T(p, z) + S(p, z)u + p' \varepsilon$$

というクラスを考える。このとき implicit utility は

$$y = \frac{x - p' w - T(p, z) + p' \nabla_p T(p, z)}{1 + S(p, z) - p' \nabla_p S(p, z)}$$

で与えられ、これは

$$x - p'w$$

すなわち Stone index で deflate した名目支出のアフィン変換になっている。この意味で EASI とは、Stone index を近似値としてではなく、効用の基準化と整合的な実質支出指標の一部として用いる体系である。

EASI の大きな利点は、所得効果を極めて柔軟に表現できる点にある。Lewbel and Pendakur (2009) の基本仕様では、各財の支出シェアは

$$w_j = \sum_{r=0}^R b_{rj} y^r + \sum_{\ell=1}^L C_{\ell j} z_{\ell} + \sum_{\ell=1}^L D_{\ell j} z_{\ell} y + \sum_{\ell=0}^L \sum_{k=1}^J A_{\ell k j} z_{\ell} p_k + \sum_{k=1}^J B_{k j} p_k y + \varepsilon_j$$

のように書かれる。したがって、AIDS の一次、QUAIDS の二次にとどまらず、 y の高次多項式や spline を導入することで、財ごとにきわめて柔軟な Engel 曲線を許容することができる。AIDS では Engel 曲線は実質支出に関して線形であり rank 2 に制約され、QUAIDS では二次となり rank 3 まで拡張されるが、EASI ではこれよりもはるかに一般的な所得効果を表現できる。この柔軟性の意義は Pendakur (2009) によりあらためて整理されており、EASI が exact model と approximate model の双方をもちつつ、高次の Engel 曲線や選好異質性を tractable に扱う枠組みとして理解できることが示されている。さらに、その後の研究では EASI の考え方を拡張した Generalized EASI (GEASI) も提案され、Bakhtavoryan and Hovhannisyan (2022) や Hovhannisyan et al. (2023) は precommitted consumption を含むより一般的な需要構造の分析にこの系統のモデルを用いている。

また、EASI は支出関数に基づく体系であるため、推定されたパラメーターのもとで補償需要や厚生指標を計算できる。したがって、AIDS と同様に、補償変分 (CV) や等価変分 (EV) を理論的には計算可能である。この点で EASI は、柔軟な Engel 曲線を許容しながら、依然として厚生分析と結びついた需要体系である。実際、Norris and Pendakur (2013) は帰属家賃を含む消費貧困の測定に EASI を応用し、Hovhannisyan and Shanoyan (2020) は中国都市部における食料価格上昇の厚生効果を EASI 系の需要体系を用いて分析している。また、Chakrabarty et al. (2015) は EASI に基づく exact price index を用いて空間価格と不平等の関係を検討しており、EASI が単なる需要推計の手段ではなく、厚生分析や価格指数の構築にも応用可能であることを示している。

もっとも、EASI にも重要な留意点がある。まず、EASI では AIDS や QUAIDS のよ

うに非線形価格指数

$$\ln P = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km} \ln p_k \ln p_m$$

の定数項 α_0 を明示的に選ぶ問題は現れない。AIDS や QUAIDS では、この α_0 が需要システムからは十分に識別されず、実質支出や厚生水準がその選択に依存しうる。これに対し EASI では、実質支出に対応する指標 y を implicit utility として直接構成するため、 α_0 を外から選んで実質支出を定義する必要はない。

しかし、これは基準化の問題そのものが消滅したことを意味しない。むしろ EASI では、効用の cardinalization を一つに固定することにより、基準化の問題を別の形に埋め込んでいると理解すべきである。実際、Lewbel and Pendakur (2009) は online appendix の “Closure under Unit Scaling” において、本論文で提案する parametric EASI models が unit scaling に対して厳密には closed ではないことを認めている。したがって、価格の計測単位変更は理論的に無害な表示変更ではなく、需要体系の表現や弾力性、厚生比較に影響しうる操作である。

この点からみると、実証で基準時の価格ベクトルを

$$p = 0$$

すなわち各価格が 1 となるように正規化することも、単なる便宜的な記法ではない。その点では

$$y = x$$

となるため、実質支出の尺度はこの基準時の価格体系に依存して固定されている。したがって、EASI は α_0 という形で基準化の恣意性を露出させない代わりに、基準時価格をすべて 1 にするという別の基準化の中にその問題を埋め込んでいるのである。換言すれば、AIDS や QUAIDS では基準化の恣意性が α_0 の選択として現れるのに対し、EASI ではそれが「どの価格ベクトルを基準として各財価格を 1 にするか」という形で現れている。したがって、EASI は α_0 問題を解決したというよりも、基準化の問題を別の形で抱え込んでいると理解するほうが適切である。この意味で、EASI の α_0 非依存性は確かに魅力的であるが、それは基準化の自由度が不要になったことを意味しない。

さらに、EASI では exact model において

$$y = \frac{x - p'w - T(p, z) + p' \nabla_p T(p, z)}{1 + S(p, z) - p' \nabla_p S(p, z)}$$

のような非線形な実質支出指標を用いるため、AIDS の線形近似モデルよりも推計と厚生計算の実装が複雑になる。Lewbel and Pendakur (2009) は、exact model を nonlinear 3SLS や GMM で推計し、一方で近似モデルとして

$$y \approx x - p'w$$

を用いれば線形回帰でも推計できることを示している。その後、Ramírez-Hassan (2021) は EASI のベイズ推定を提示し、Lewbel and Pendakur (2009) の結果の再現とあわせて、推計法の選択が実証的にどのような含意をもつかを検討している。したがって、理論的には CV や EV の計算は可能であるものの、実務上は implicit utility y の構成や非線形推計に数値計算を要するため、AIDS や QUAIDS に比べて厚生分析の実装は容易ではない。

以上のように、EASI は AIDS や QUAIDS では十分に表現できない柔軟な所得効果を許容し、Stone index を実質支出の exact な deflator として位置づけ、 α_0 の明示的選択を不要にするという重要な利点をもつ。さらにその後の研究では、厚生分析への応用、空間価格指数の構築、GEASI への拡張、さらにはベイズ推定など、理論・実証の両面で展開が進んできた。しかしその一方で、基準化の問題を別の形で埋め込んでおり、しかも体系自体は commensurable ではないため、基準時価格をすべて 1 にするという正規化を理論的に無害な操作として扱うことはできない。したがって、EASI は非常に魅力的で強力な需要体系ではあるが、基準化と計測単位の問題が解決済みであると考えべきではない。

13 まとめ:マーシャルの需要関数と補償需要

AIDSの需要関数をもう一度見てみよう。支出関数の形状を具体的に仮定し、

$$\begin{aligned} \ln E(u, p) &= \ln a(p) + u(\ln b(p) - \ln a(p)) \\ &= \alpha_0 + \sum \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln p_k \ln p_m + u\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

そこに、シェファード・マッケンジーの補題を用い、補償需要(正確には対数線形微分)を得ている。

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{\partial \ln E(u, p)}{\partial \ln p_j} \\ &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_k u \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \\ &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln \frac{y}{P} \right) \\ \gamma_{ki} &= \frac{1}{2} (\gamma_{ki}^* + \gamma_{ik}^*)\end{aligned}$$

我々が市場やサーベイで観察可能なのは、所与の所得と価格の下での購買行動であり、マーシャルの需要関数に基づくものである。支出関数から導出される補償需要はマーシャルの需要ではないが、物価水準を用いることで、実質所得が、補償需要関数において効用水準が果たすのと同様の役割を果たしている。物価水準に対して強い意味合いを持たせるのがAIDSの重要な特徴になっている。一般に、関数形に強い仮定をおかずに、補償需要関数を推定することはできない。AIDSもまた、関数形に仮定を置いているが、AIDSはFlexibleな関数であり、任意の二回連続微分可能な関数の局所的な二次階の近似になっている。その点において、局所的には、AIDSは非常に一般的な形状ということが出来る。そして、AIDSを用いることでマーシャルの需要関数から補償需要に変換することが可能になり、間接効用と支出関数を求めることができる。そのため、AIDSから生計費指数を求めることが可能になっている。Blundell and Robin (1999)によるILLEを用いると、消費の構造モデルを線形システムのiterationで容易に推計することが可能である。

もっとも、AIDSやQUAIDSが需要体系の終点というわけではない。その後の理論的発展として、Lewbel and Pendakur (2009) は implicit Marshallian demand の考え方に基づき、Stone index を単なる近似ではなく実質支出を与える exact affine Stone index として用いる EASI 需要体系を提案した。EASI では、AIDSの一次、QUAIDSの二次にとどまらず、実質支出に関する高次多項式や spline を通じて、はるかに柔軟な Engel 曲線と高 rank の需要体系を許容できる。さらに Pendakur (2009) は、この枠組みを AIDS に近い形で理解できるよう整理し、exact model と approximate model の関係、選好異質性の導入、推計上の実用性を明確にしている。近年では、Ramírez-Hassan (2021) が EASI のベイズ推定を提示し、非線形性や内生性、単調性・凹性などの理論制約を取り込みながら推定を行う枠組みを与えている。また、Bakhtavoryan and Hovhannisyan (2022) や Hovhannisyan et al. (2023) は、EASI をさらに一般化した Generalized EASI

(GEASI) 系のモデルを用い、precommitted consumption を含むより柔軟な需要構造の分析を行っている。したがって、需要体系の理論は AIDS や QUAIDS にとどまらず、近年においても、より柔軟な所得効果、選好異質性、厚生分析、さらには理論制約を伴う推計法の発展という方向で着実に拡張されている。

残念ながら日本における AIDS 推計は、農業経済学の一部ではよく行われているものの、広く行われているとはいえない。カテゴリ単位での需要の価格弾力性や所得弾力性は財政学や産業組織論、さらにはマクロ経済学において非常に多くの経済学的含意があり、その推計が広く行われていくことを願っている。

参考文献

- Abe, Naohito and Hideyasu Sato**, “The Unidentified Parameter that Matters: Identification and Calibration of α_0 in the Almost Ideal Demand System,” 2026. Presented at 2026 the Japanese Agricultural Economics Meeting at Tottori.
- Bakhtavoryan, Rafael and Vardges Hovhannisyan**, “Quantifying the Structure of Residential Water Demand in the United States: A Generalized Exact Affine Stone Index Demand Framework,” *Agricultural and Resource Economics Review*, 2022, 51 (1), 68–85.
- Banks, James, Richard Blundell, and Arthur Lewbel**, “Quadratic Engel Curves and Consumer Demand,” *Review of Economics and Statistics*, 1997, 79 (4), 527–539.
- Blundell, Richard**, “Consumer Demand and Intertemporal Allocations: Engel, Slutsky, and Frisch,” in Steinar Strøm, ed., *Econometrics and Economic Theory in the 20th Century: The Ragnar Frisch Centennial Symposium*, Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
- **and Jean-Marc Robin**, “Estimation in large and disaggregated demand systems: an estimator for conditionally linear systems,” *Journal of Applied Econometrics*, 1999, 14 (3), 209–232.
- Chakrabarty, Manisha, Amita Majumder, and Ranjan Ray**, “Preferences, Spatial Prices and Inequality,” *The Journal of Development Studies*, 2015, 51 (11), 1488–1501.
- Christensen, Laurits R., Dale W. Jorgenson, and Lawrence J. Lau**, “Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Production Function,” *Econo-*

- metrica*, 1971, *39* (4), 255–256.
- Comin, Diego, Danial Lashkari, and Mart. Mestieri**, “Structural Change With Long-Run Income and Price Effects,” *Econometrica*, 2021, *89* (1), 311–374.
- Deaton, Angus and John Muellbauer**, “An Almost Ideal Demand System,” *American Economic Review*, 1980, *70* (3), 312–326.
- Diewert, W. Erwin**, “An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function,” *Journal of Political Economy*, 1971, *79* (3), 481–507.
- Gorman, William Moore**, “Community Preference Fields,” *Econometrica*, 1953, *21* (1), 63–80.
- Gould, Brian W., Yoonjung Lee, Diansheng Dong, and Hector J. Villarreal**, “Household Size and Composition Impacts on Meat Demand in Mexico: A Censored Demand System Approach,” in “2002 Annual Meeting, American Agricultural Economics Association (AAEA), Selected Paper” Long Beach, CA May 2002. Conference paper (AgEcon Search).
- Hovhannisyan, Vardges and Aleksan Shanoyan**, “An Empirical Analysis of the Welfare Consequences of Rising Food Prices in Urban China: The Easi Approach,” *Applied Economic Perspectives and Policy*, 2020, *42* (4), 796–814.
- , **Christopher T. Bastian, and Oral Capps**, “New Insights into the Structure of Consumer Preferences for Natural and Artificial Sweeteners in the United States,” *American Journal of Agricultural Economics*, 2023, *105* (5), 1491–1515.
- Karagiannis, Giannis, Stelios Katranidis, and K. Velentzas**, “An Error Correction Almost Ideal Demand System for Meat in Greece,” *Agricultural Economics*, 2000, *22* (1), 29–35.
- Lecocq, Sébastien and Jean-Marc Robin**, “Estimating Almost-Ideal Demand Systems with Endogenous Regressors,” *Stata Journal*, 2015, *15* (2), 554–573.
- Lee, Lung-Fei and Mark M. Pitt**, “Microeconomic Demand Systems with Binding Nonnegativity Constraints: The Dual Approach,” *Econometrica*, September 1986, *54* (5), 1237–1242.
- Lewbel, Arthur and Stefan Pendakur**, “Tricks with Hicks: The EASI Demand System,” *American Economic Review*, 2009, *99* (3), 827–63.
- Moschini, Giancarlo**, “Units of Measurement and the Stone Index in Demand System Estimation,” *American Journal of Agricultural Economics*, 1995, *77* (1),

63–68.

- Muellbauer, John**, “Aggregation, Income Distribution and Consumer Demand,” *The Review of Economic Studies*, None 1975, 42 (4), 525–543.
- Norris, Sam and Krishna Pendakur**, “Imputing Rent in Consumption Measures, with an Application to Consumption Poverty in Canada, 1997–2009,” *Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d’Économique*, 2013, 46 (4), 1537–1570.
- Pendakur, Krishna**, “EASI Made Easier,” in Daniel J. Slottje, ed., *Quantifying Consumer Preferences*, Vol. 288 of *Contributions to Economic Analysis*, Emerald Group Publishing Limited, 2009, pp. 179–206.
- Poi, Brian P.**, “Easy Demand-System Estimation with QUAIDS,” *The Stata Journal*, 2012, 12 (3), 433–446.
- Ramírez-Hassan, Andrés**, “Bayesian Estimation of the Exact Affine Stone Index Demand System: Replicating the Lewbel and Pendakur (2009) Results,” *Journal of Applied Econometrics*, 2021, 36 (4), 484–491.
- Shonkwiler, J. Scott and Steven T. Yen**, “Two-Step Estimation of a Censored System of Equations,” *American Journal of Agricultural Economics*, November 1999, 81 (4), 972–982.
- Wales, T.J. and A.D. Woodland**, “Estimation of consumer demand systems with binding non-negativity constraints,” *Journal of Econometrics*, 1983, 21 (3), 263–285.
- 松田, 敏信, 食料需要システムのモデル分析, 東京: 農林統計協会, February 2001.
- 阿部修人, 物価指数概論: 指数・集計理論への招待, 東京: 日本評論社, October 2023.
- , 稻倉典子, and 外木暁幸, “近年の米価格上昇とその需要システムの分析,” Technical Report DP26-1, 一橋大学経済研究所経済社会リスク研究機構 January 2026.