2026年度応用マクロ経済学講義ノート
家計消費1 分離可能性

Naohito Abe

2026 年 4 月 8 日

1 Introduction

家計消費に関する経済分析の出発点は、一日における自分の様々な選択、意思決定に関して考えることである。朝晴れていればジョギングするかもしれないし、ギリギリまで寝ているか、家族のために朝食をつくるかもしれない。これは、自分の体力温存、すなわち休息という形の余暇と、心身の健康という人的資本の一種の蓄積、さらには家庭内の消費および資源配分に関する様々なトレードオフの結果として選択される。朝食をとる際、棚や冷蔵庫から食材を取り出し、朝食を作るなり、すでに加工されているものを食することになるが、何をどの程度食べるかは、朝食から得られる効用(美味しい食事)および医学的栄養摂取に必要な時間・労力、および金銭的費用の間の選択となる。また、家族のために食事を作る場合は、家庭内の資源配分、すなわち家庭内でどのように必要な労力および便益を配分するか、に関する集合的意思決定の結果である。朝食後、出勤する場合の多くは、当日においては選択の余地が少ないケースがほとんどであろう。すなわち、日々の労働に関しては事前にコミットされていて、当日できる意思決定は、突然の休暇を取るか否かに限定されることが多い。

しかし、例えば、10年後の自分の労働環境に関しては、自分である程度の選択する余地があるだろう。出勤する場合は、職場で食事をとるか否か、退社後、どこかに遊びに行くか、何時に自宅に戻るか、自宅に戻った後の時間をどのように過ごすか、入浴にどの程度の時間をかけるか、等など。私達の一日の間に、多くの選択がなされている。そして、今日、家計消費分析とされる研究分野は、上記の選択のほとんどを研究対象としている。より厳密には、家計消費分析は、労働経済学や医療経済学の範疇と被ることになるが、そも

そも家計消費は医療や労働と分離することができないものである。たとえば労働供給を、余暇と消費選択の問題と考えるならば、労働供給に関する労働経済学の諸側面は、家計消費分析の対象になる。

研究対象が膨大な範囲に広がる家計消費分析ではあるが、現在においても、その中心は依然として購買による家計消費支出行動であり、多くの研究が毎年発表されている。しかし、家計消費支出分析の対象もまた広大である。私達は、買い物をする場合、どこの店にいくのだろうか。各店には膨大な種類の商品・サービスが販売されているが、それらのうち、何をいくらで購入するのだろうか。ミクロ経済学の入門書では、予算制約線上で、限界代替率が価格比に等しい点で最適消費量が決定される。しかし、現実には多くの商品は購入されず、コーナー解となる。また、多くの場合、購入と消費のタイミングは異なる。例え生鮮食料品であっても、一週間くらいのは冷蔵庫で保存可能なケースがほとんどであろう。実際には、商品・サービスの実際の消費と購買のタイミングはどの程度ずれるのだろうか?そうしたずれは、家計消費分析を考える場合、どのような問題を作るのだろうか?こう考えると、家計消費分析はかなり複雑なものになることがわかるだろう。

次に、日々の購買行動から距離をとり、年単位の行動を考えると、海外旅行などの高額かつ長時間必要なサービス消費、住宅や車などの高額耐久財・固定資産の購入、貯蓄の運用方法、結婚・離婚、子供の教育、病気や事故のリスクと保険の購入、人間ドックなどの医療サービスの購入、休日の余暇と区分される時間の配分、親との同居の有無・・・。まさに無数の意思決定を行いながら、そして明日を、一か月先を、10年先を考えながら、私達は今日を生きている。家計消費の経済分析は、家計の意思決定に関する総合的な分析にならざるを得ないのである。実際、20世紀初頭の消費関数論争以降、急速に拡大する家計レベルのミクロデータをもとに、家計消費研究は余暇時間配分、健康・医療、育児、所得変動リスク等、多くの方向に分析対象を拡大していった。

家計消費の経済分析には、二つの潮流がある。一つは、複数財の間での選択を中心とする、伝統的なミクロ経済学のフレームワークによるものである。1980年に出版されたDeaton and Muellbauer (1980)は、この伝統的なミクロ経済学的分析において今なお色あせない、その当時の消費研究のほぼ全範囲を扱う大著である。そこでの主要な課題は需要関数、あるいは需要システムの推計であり、いかに一般的な選好関係を仮定し、そこにどのような構造を与え推計していくか、詳細に論じている。現在の消費研究は彼らの教科書の範囲をはるかに超えて拡大している。特に、Time Use Surveyによる、細かい時間の使い方に関する統計データが整備され、ビッグデータとも呼ばれる詳細な家計購買履歴、さらには携帯電話の異動履歴データは、物理的な移動情報も加味した分析を可能にしており、家計消費分析の対象は、今日、飛躍的に増加している。

家計消費の分析のもう一つの流れは1980年以降に急速に拡大した動学分析に基づくものである。 Hall (1978)を嚆矢とする家計消費の動学分析は、標準的なマクロ成長モデルに即し、各時点における消費はマクロ消費として一財であるとされ、その財の異時点間の配分が重要となる。動学分析により、消費と貯蓄の決定が重視され、さらに耐久消費財や缶詰等の保存可能な商品の分析が可能になる。ライフサイクルにおける消費と貯蓄の決定は家計消費分析における最重要テーマの一つであり、動学モデルの進展により、この分野における私たちの知見は急速に拡大している。一方Gorman (1959), Deaton and Muellbauer (1980)で強調された、極力一般的な、関数形に強い仮定を課さない、より多くの財・サービスを含めた消費分析、という視点は動学分析ではそれほど重視されておらず、一般性のない、ある特定の扱いやすい関数形への依存が高まっていることは否定できない。

今回の講義シリーズの目標は、1980年代に確立した、Almost Ideal Demand System (AIDS)等の、関数形に強い仮定を課さない、ほぼすべての関数の近似となる多数財の消費分析モデルから、近年の、不確実性下の余暇・貯蓄選択に関する一連の研究について紹介し、その基本的な技術を身に着け応用することである。現在の最先端、家計内在庫や余暇時間配分、ビッグデータの活用など、最先端の家計消費分析に関しても極力触れるよう努力するが、この辺りは急速に進化している分野でもあり、講義の後半で触れることにする。最初の二回の講義ノートは、古典的な消費理論、特に静学分析において1980年代までにGorman, Muellbauer, Deaton, Diewert達が確立した消費理論について議論する。具体的には、膨大な種類のある商品の中から、どのようにして人々は普段の消費財購入の意思決定を行っているのか、その分析手法について紹介していく。必然的に、その内容はマクロ動学分析ではなく、ミクロの消費理論が中心となる。

2　需要関数の推計

ある商品に対する、特定の個人(家計)の需要関数が存在し、下記のように書けるとしよう。

$$q_i = g_i\left(p, y\right),$$

ただし、pは価格ベクトル、yはその個人の所得である。静学分析とし、さらに所得と価格は所与と仮定しよう。私達の知る経済理論は、g_iにどのような制約を課す、あるいは特長を生み出すだろうか?そして、私たちはその需要関数をどのようにすれば推計できるだろうか? 需要関数の背後にある、効用関数最大化問題を考えてみよう。静学分析なので、効用関数が局所非飽和を満たすなら、所得は全て使い果たすことになるので、効用最大化

は下記のように定式化される。

$$\max u\left(q\right)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{N} p_i q_i = y$$

したがって、予算制約をみたすには、g_iは

$$\sum_{i=1}^{N} p_i g_i\left(p, y\right) = y,$$

を満たさねばならない。予算制約は所得と価格に関して一次同次だから、価格と所得に正の定数θを乗じても予算制約は変わらないはずである。したがって、効用最大化問題は予算制約の定数倍をしてもしなくても変わらないため、その解である需要関数もまた不変なはずである。したがって、

$$q_i = g_i(p, y) = g_i(\theta p, \theta y), \quad \text{for all } \theta > 0.$$

次に、予算制約式に需要関数を代入したものは、所得と価格に関する恒等式になるので、

$$\sum_{i=1}^{N} p_i g_i(p, y) \equiv y$$

したがって、価格p_kに関する偏微分をとると、

$$\begin{aligned} g_k\left(p, y\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial g_i\left(p, y\right)}{\partial p_k} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial g_i\left(p, y\right)}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

を得る。これを弾力性の形式に書き直すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{p_k}{p_k}g_k+\sum_{i=1}^{N}\frac{g_i}{g_i}\frac{p_k}{p_k}p_i\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial p_k}&=0\\
\frac{p_k}{p_k}g_k+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ik}\frac{g_i}{p_k}p_i&=0\\
\frac{p_k}{y}g_k+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ik}\frac{g_i}{y}p_i&=0\\
\omega_k+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ik}\omega_i&=0,
\end{aligned}
$$

$$
\omega_k=\frac{p_k g_k\left(p,y\right)}{y},\varepsilon_{ik}=\frac{p_k}{g_i\left(p,y\right)}\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial p_k}
$$

ただし、ω_kはk財への支出シェア、ε_{ik}はk財のi価格の変化に対する価格弾力性である。また、予算制約式の恒等式を所得に関して偏微分し、整理すると、

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial y}&=1\\
\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{y}{y}\frac{g_i}{g_i}\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial y}&=1\\
\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{g_i}{y}\varepsilon_{iy}&=1\\
\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{iy}&=1,
\end{aligned}
$$

ただし、ε_yはi財所得弾力性である。所得弾力性に関する制約式の意味を考えてみよう。所得弾力性の支出シェアによる加重平均が1、ということは、様々な財の平均的な所得弾力性が1であることを示している。すなわち、ある財の所得弾力性が1より大きければ、必然的に、少なくとも他の一つの財の所得弾力性は1よりも小さくなっている。以上を踏まえたうえで、需要関数に戻ってみよう。

以上を踏まえたうえで、需要関数に戻ってみよう。

$$
q_i=g_i\left(p,y\right)
$$

この需要関数の定数項や各種パラメターを推計する際には、内点解を仮定して、

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln y + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{ki} \ln p_k + e_i$$

とするのが最も単純かつ直感的であり、各種弾力性を線形回帰により容易に得ることができて便利である。さて、N財があるなら、これはN個の需要関数のシステム、すなわち連立方程式になり、推定するパラメータは定数項N個、所得弾力性N個に価格弾力性$N \times (N-1) \times 1/2$の和、だけ存在する。十分な数のサンプルサイズを確保できれば、この推計は今日のコンピューターであれば決して難しくない。しかし、複数の異なる個人のデータ、クロスセクションデータを用いて上式を推計するときには、いくつか注意する必要がある。まず、上式は、所得、価格弾力性は一定であると仮定している。ある財の所得弾力性が1を超えていると仮定しよう。すると、所得が増加していくと、その財の所得弾力性は1を超えているため、その財への支出シェアは増加していく。そして、十分に所得が増加すると、その財への支出シェアは1を超えることになる。すなわち、所得弾力性一定という仮定は、globalな領域では明らかに誤りであり、あくまで局所的なケースにのみ正当化されるのである。上の需要関数は、ある消費、価格ベクトル、所得の局所的な対数線形近似とみなすべきであり、globalな構造モデルではない。しかし、そうであるなら、クロスセクションデータを用い、大金持ちから貧乏人までプールしたデータを用いて局所線形近似の需要関数を推計することには問題があることになる。また、価格弾力性に関して導出した、前述の制約に関しても考慮されていないこともまた問題である。

第二に、ある特定の財、例えばi財の需要にのみ興味がある場合でも、推定するパラメターの数は$N+2$個存在する。それらのパラメターの中で、特に価格弾力性について、なんらかの先験的な知識を反映させることが可能であるか否か考えてみよう。例えば、オレンジとミカンであれば、代替財であるから価格弾力性はマイナスになるだろうし、オレンジと新聞の価格であれば、お互いはほぼ無関係であることが想定される。しかし、上の需要関数はマーシャルの需要関数、すなわち補償需要ではないため、価格弾力性には代替効果と所得効果の二つの効果が含まれている。二つの財の間の代替性という選好関係における「距離」に加え、所得効果を通じる効果も反映しているのである。そこで、スルツキー方程式を利用しよう。補償需要関数をhとすると、スルツキー方程式は

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial h_i}{\partial p_k} - q_k \frac{\partial q_i}{\partial y}.$$

これを弾力性で書き換えると、

$$\frac{p_k}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{p_k}{q_i}\frac{\partial h_i}{\partial p_k} - \frac{p_k}{q_i} q_k \frac{\partial q_i}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{ki} = \varepsilon^*_{ki} - \omega_k \varepsilon_{iy}$$

ただし、ε^*_{ki}は補償需要に関する価格弾力性であり、

$$\varepsilon^*_{ki} = \frac{p_k}{q_i}\frac{\partial h_i}{\partial p_k}.$$

需要関数に代入すると、

$$\begin{aligned}\ln q_i &= \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln y + \sum_{k=1}^{N} (\varepsilon^*_{ki} - \omega_k \varepsilon_{iy}) \ln p_k + e_i \\ &= \alpha_i + \varepsilon_{iy} \left(\ln y - \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln p_k \right) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^*_{ki} \ln p_k + e_i\end{aligned}$$

ここで、対数価格の支出シェアによる加重平均を物価指数Pとする、すなわち、

$$\ln P = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln p_k,$$

とすると、

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln \left(\frac{y}{P} \right) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^*_{ki} \ln p_k + e_i.$$

この式は、名目所得yを物価水準Pで割ったもの、すなわち実質所得を含んでいる。この実質所得は効用水準とみなすことが可能である。補償需要関数に含まれる効用水準が実質所得として、名目所得を物価で割ることで得られるのである。この式に出てくる価格弾力性は補償需要に関する弾力性であるから、対称性をみたし、かつ、所得効果を含まないため、代替性もしくは補完性が弱い、距離の離れた商品間の弾力性はゼロと仮定することができる。支出シェアは回帰分析を用いずに計算することができるため、物価指数Pは容易に計算可能である。直感的には、所得弾力性を実質所得に対する弾力性とすることで、価格効果を代替効果のみにすることが可能なのである。

3　数量から支出へ

補償需要の価格弾力性を含む需要関数は経済理論に即して結果を解釈することが容易にできる点が魅力であるが、実際にミクロデータを用いて推計する際には、財の数量の情報が必要になる。数量の情報は、えてして精度が低くなるか、そもそも存在しないケースが多い。スーパーマーケットで販売されている多くの生鮮食料品は、一山いくら、のような形で販売されているし、鮪の刺身にしても、正確なグラムで量り売りしているところは少ない。現代社会の複式簿記には数量の情報が重視されておらず、金銭情報が中心である。家計簿でも、購入額の情報はあっても、そこに何グラムの魚やニンジンが入っていたか記録する人は少ないだろう。日本の総務省が行っている『家計調査』には数量情報が含まれているが、残念ながらその対象はごく限られた商品のみであり包括的なデータセットになっていない。数量情報が含まれるデータとして代表的なPoint of Sales (POS)データでも、生鮮食料品の数量は多くの場合含まれていない。

数量の情報を真剣に考えていくと、家計消費の分析は極めて困難になる。スーパーマーケットや住宅、車、雑誌、なんでも、商品単位となると非常に細かく分類されている。パスタをとっても、メーカーによって、グラム数によって、太さによって異なる商品となる。厳密に数量を考えると、特定の商品の数量となるが、小さなスーパーマーケットでも、取扱商品は数千種類に上るだろう。ある特定の商品を、特定の個人が購入する確率は限りなくゼロに近くなってしまう。また、そのような商品の数量単位の家計別データは、HomescanやPersonalscanのような、スキャナーを用いたデータでもない限り収集は極めて困難になるし、またスキャナーを用いる場合でも、本質的に困難な問題は残ってしまう。経済理論を具体的な購入行動に用いようとすると生じる問題を具体的に考えてみよう。

今晩は四人分のカレーライスを作ることに決定し、その食材を買いにスーパーマーケットにきたと仮定しよう。米やフライパンなどの調理器具はあるとし、必要なのはカレーライスの具とルーであると仮定する。このときの仮想的な意思決定プロセスを考えてみよう。まず、肉を鶏・豚・肉の中から選ぶとする。むろん、これらを混合させたものも考えることができる。売り場を見ると、肉は量り売りではなく、パッケージされているものの中から選ぶことになる。パッケージは100グラム単位の小分けから400グラム単位の大きなものまであるが、大きなものの方が中の肉の質は同一でも容量単価は安いようである。また肉の種類も、牛肉に限定しても和牛、国産牛、海外産、国内ブランド牛など多様であり、部位も切り方もさまざまである。経済学的には、ここでは離散選択の問題に直面す

る。標準的な先ほど紹介した効用最大化モデルは一階条件、すなわち連続微分可能な解が存在することを念頭に置いていたが、ここでは0,1,2という整数の中から自分にとって最も望ましい一つあるいは二つを選ぶという問題になっており、美しい双対性の理論を使うことができない。多数の肉商品の選択肢の中から一つ、あるいはいくつかを選ぶ、という問題になっている。和牛切り落とし10.5グラム、輸入牛肩ロース12.3グラム、などのように自由にすきな量を指定して購入することが可能であれば、選好の凹性を仮定している場合、一つの商品に特化するよりも多数の商品を少しずつ消費するほうが望ましい場合が多い。しかしながら、そのような自由がない場合、いやがおうでも、私たちは数ある肉のパッケージの中から一つ、あいは二つを選択せざるを得ないのである。この離散選択は、個人の商品レベルの購買行動を分析する際には非常に重要な制約となる。残念ながら、家計消費分析では、購買タイミング（買う／買わない）は離散として扱いつつ、セール時の購入量（まとめ買い）は連続量として近似し、在庫を通じて反応を分析する研究が多い(Hendel and Nevo (2006)等)。異なる商品間でのブランド選択問題としては、McFadden (1974)等によるRandom Utilityモデルに依拠するものが多く、これは買うならどれか、という問題を主に扱うものである。これは、一つの講義全体を用いるべき豊富な内容があり、本講義ではこれ以上は踏み込まない。

さて、肉をみていると、安い輸入牛と高い国産ブランド牛、さらには地鶏とかなり高級なものと、安い海外産の豚や鶏肉の差が大きいことがどうしても気になってしまう。果たして、今回カレーにかける予算としていくら用いるべきだろうか?肉を高級にする代わりに、野菜やカレーのルー等の調味料の支出を下げることは可能だろうか?それはカレーをおいしくするだろうか?これらの問題は、今晩はカレーライスを購入することは所与として(1)はたしていくらカレーライスのために支出するべきか(2)カレーライスの中で、どの食材にいくら用いるべきか?(3)各食材の中で、なにをいくら購入するべきか?という三種類の問題に分けることができる。問題は、この三種類の問題は、相互に密接に関連していて、独立していないのである。スーパーに行って、普段とても買えないとても高級な牛肉が通常の半額で売られていたら、カレーライスへの支出総額を上昇させるかもしれない。あるいは、買い物の途中で子供の学校の授業料が値上げされたことを思い出して、牛肉はやめてやすい鶏肉にするかもしれない。ミクロ経済学の教科書に出てくる家計モデルに従い、カレーライスの食材の一つである肉を買う意思決定の際には、肉の値段のみならず、野菜やルーの価格、さらにはカレーの食材には含まれないおよそ全ての商品価格の情報が考慮されることになる。

しかしながら、全ての消費支出行動がつながっていると、カレーライスの購買行動の分析はまず不可能であろう。カレーライスを購入すると決めたら、次は、肉にいくら、野菜

にいくら購入するか決め、次に肉を買うとしたら何を買うか、という段階的意思決定にモデルを変換することができれば、例えば肉を買うステージでは、野菜はむろん、カレーライスとは無関係の商品価格もまた無視してよいことになる。これを可能にするのが分離可能性という仮定である。分離可能性と、追加の仮定を加えることで、家計の意思決定は著しく単純にすることができるのである。分離可能性については1950年代のGorman以降、非常に多くの研究がありクロとマクロを問わず、今日の消費研究の基礎にあるといえる重要なものである。

4 分離可能性

家計消費モデルにおける分離可能性とは、効用関数・選好関係に対して課す仮定・構造であり、商品をグループ分けし、そのグループをあたかも一つの財、集合財のように扱うことを可能にする構造である。分離可能性の仮定は家計消費分析において非常に基本的なものであり、さきほどのカレーライスの食材購入をモデル化する際に重宝する。また、ミクロの分析にとどまらず、マクロ経済学における異時点間の消費・貯蓄決定モデルにおいても重要な役割を果たしている。

Deaton and Muellbauer (1980) に従い，6 財に依存する効用関数

$$u = v(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

を例に考えてみよう。例えば q_1 はシリアル，q_2 は肉，q_3 は家賃，q_4 は燃料， q_5 はテレビ観戦，q_6 はスポーツとする。これらを「食料（$F = (q_1, q_2)$)」「住宅関連（$H = (q_3, q_4)$)」「余暇（$E = (q_5, q_6)$)」の三つのグループに分類する。[*1]

カレーライスの例に即して考えると、私たちは、まず食料、住宅、余暇の三グループのそれぞれにいくら用いるか、という問題を考え、例えば食料にY_F円を使う、という意思決定を行う。次に、食料である肉とシリアルに対して、どのようにY_Fを用いるか、というサブの効用最大化問題を考えたい。この二段階の効用最大化を考えることができれば、スーパーマーケットにカレーの食材を買いに行った段階で、もうカレー以外の商品価格について憂う必要はない。また肉への支出金額を決定すれば、その肉への支出額を所与とする場合は、肉として高級ブランド和牛を買うか安い鶏肉を買うかは、野菜の価格に依存しなくなる。すなわち、家計の最適化に必要な情報の集約が行われ、カレーや肉以外の情報は全て無視することが可能になるのである。この非常に便利な二段階の意思決定の解は、二段階を経ない、通常の効用最大化問題の解とどのような時に一致するのだろうか?

[*1] ここでは、各グループが2財ずつになっているが、財の数は1を含み、異なっていても議論に変更はない。

本節の目的は，消費者の意思決定を

第1段階 総支出（所得）y をグループ支出 (Y_F, Y_H, Y_E) に配分する，
第2段階 各 Y_I を所与としてグループ内の数量ベクトルを選ぶ，

という *two-stage budgeting* として整合的に記述できる条件を整理することである。なお，この「二段階」には

(A) 第2段階（グループ内）の整合性　　と　　(B) 第1段階（配分）の集計可能性

というに側面がある。重要なのは第二段階、すなわちカレーに対する支出金額を決めた後の行動であり、カレーに対しいくら用いるか、という意思決定に際し必要な価格情報の集約を可能にするには、後述するように追加の仮定が必要となる。

4.1　弱分離可能性と二段階意思決定：何が保証されるか

弱分離可能性（weak separability）を，効用関数が次の形で表現できることとして導入する：

$$u \;=\; f[v_F(q_1, q_2), v_S(q_3, q_4), v_E(q_5, q_6)]\,, \tag{1}$$

ただし f は各成分について単調増加とし，v_I はグループ $I \in \{F, H, E\}$ の部分効用である。（さらに各 v_I が弱分離可能なサブグループに分解できれば，三段階以上の意思決定モデルにも拡張できる。）

弱分離可能性は**第2段階** での意思決定を保証する。すなわち，グループ I への支出 Y_I が所与であれば，グループ内の最適化は当該グループの価格ベクトル p_I と Y_I のみによって完結する（条件付き需要の存在)。より形式的に述べるため，以下では Barten and Böhm (1982)に従い、k 個グループ一般で記述する[*2]。

定義 1 (（全体）予算集合)**.** 価格ベクトル $p = (p_1, \ldots, p_k)$ と総支出 $y \in \mathbb{R}_+$ が与えられたとき，（全体の）予算集合を

$$B(p, y) \;:=\; \{\, q = (q_1, \ldots, q_k) \in S \mid p \cdot q \le y \,\} \tag{2}$$

と定義する。ここで $S = S_1 \times \cdots \times S_k$，また内積はブロックごとに

$$p \cdot q \;=\; \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot q_j \tag{3}$$

*2 Barten and Böhm (1982)は40年以上前のサーベイであるが、とてもコンサイスに、しかしわかりやすく家計消費の基本を整理しており、現在でも有用である。

とする。

仮定 1 (弱分離可能性（一般形）)**.** 効用関数が

$$u(q) \;=\; V\big(v_1(q_1), \ldots, v_k(q_k)\big) \tag{4}$$

と表せるとする。ここで $v_j : S_j \to \mathbb{R}$ は各グループ内の部分効用，$V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ は集計関数であり，各成分について単調増加であるとする。

定義 2 (部分予算集合と条件付き需要)**.** グループ j の価格ベクトルを p_j とし、任意の $y_j \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$B^j(p_j, y_j) \;:=\; \{\, q_j \in S_j \mid p_j \cdot q_j \le y_j \,\} \tag{5}$$

を部分予算集合と呼ぶ。さらに条件付き需要（対応）を

$$f^j(p_j, y_j) := \Big\{\, q_j \in B^j(p_j, y_j) \;\Big|\; v_j(q_j) \ge v_j(q'_j) \text{ for all } q'_j \in B^j(p_j, y_j) \Big\} \tag{6}$$

で定義する。

定義 3 (グループ別支出)**.** 全体問題（価格 p，総支出 y）の需要ベクトルを $f(p, y)$ とし、その j 成分を $f_j(p, y)$ と書く。このときグループ j の実現支出を

$$y_j(p, y) \;:=\; p_j \cdot f_j(p, y) \tag{7}$$

と定義する。

次に示す定理は、分離可能な選好のもとで二段階意思決定を正当化する重要なものである。

定理 1 (弱分離可能性の下での二段階表現：第2段階の整合性)**.** 仮定 *1* の下では，任意の j について

$$f^j\big(p_j,\; y_j(p, y)\big) \;=\; f_j(p, y) \qquad (\forall j) \tag{8}$$

が成り立つ。すなわち、全体最適で実現するグループ別支出 $y_j(p, y)$ を条件付き需要に代入すると、全体需要の j 成分と一致する。

Proof. 任意の (p^0, y^0) を固定する。全体需要集合 $f(p^0, y^0)$ から q^0 を一つ取り $q^0 = (q^0_1, \ldots, q^0_k)$ と分解する。$y^0_j := p^0_j \cdot q^0_j$ とおく。

Step 1. 定義より $q^0_j \in B^j(p^0_j, y^0_j)$ である。

Step 2. $q_j^* \in f^j(p_j^0, y_j^0)$ を任意に取ると、 $v_j(q_j^*) \geq v_j(\tilde{q}_j)$ が任意の $\tilde{q}_j \in B^j(p_j^0, y_j^0)$ で成り立つ。特に $q_j^0 \in B^j(p_j^0, y_j^0)$ なので $v_j(q_j^*) \geq v_j(q_j^0)$。

背理法として $v_j(q_j^*) > v_j(q_j^0)$ を仮定する。分離可能性 (4) と V の単調増加性より、他の成分を q^0 と同じに固定した消費バンドル

$$\tilde{q} = (q_1^0, \ldots, q_{j-1}^0,\, q_j^*,\, q_{j+1}^0, \ldots, q_k^0)$$

は $u(\tilde{q}) > u(q^0)$ を満たす。

Step 3. $q_j^* \in B^j(p_j^0, y_j^0)$ より $p_j^0 \cdot q_j^* \leq y_j^0$。他の成分は q^0 と同じなので

$$p^0 \cdot \tilde{q} = \sum_{\ell \neq j} p_\ell^0 \cdot q_\ell^0 + p_j^0 \cdot q_j^* \leq \sum_{\ell \neq j} p_\ell^0 \cdot q_\ell^0 + y_j^0 = p^0 \cdot q^0 \leq y^0,$$

従って $\tilde{q} \in B(p^0, y^0)$ である。

Step 4. $\tilde{q}$ は全体予算制約を満たしつつ q^0 より高い効用を与えるので、 q^0 が全体最適であることに矛盾する。よって $v_j(q_j^*) > v_j(q_j^0)$ は不可能であり，$v_j(q_j^*) = v_j(q_j^0)$ が従う。従って q_j^0 は $B^j(p_j^0, y_j^0)$ 上で v_j を最大化し， $q_j^0 \in f^j(p_j^0, y_j^0)$。最大化解が一意であれば $f^j(p_j^0, y_j^0) = \{q_j^0\}$ である。 (p^0, y^0) は任意であったから (8) が成り立つ。 □

定理 1 の意味は明確である。弱分離可能性は「与えられた グループ支出 y_j の下で、グループ内選択が (p_j, y_j) のみで完結する」こと（第2段階の整合性）を保証する。すなわち、肉と野菜が分離可能であれば、カレーライスの肉を買う際には、野菜の価格を考慮する必要はなくなり、肉のために用いると決めた肉への支出額を所与とし、肉の価格に依存した条件付き(二段階目の)需要関数は、肉に限定せずに全品目を対象とした場合の肉への需要と一致するのである。

本定理に関して、一つ注意せねばならないことがある。(8)の左辺にある$y_j(p, y)$は全商品の価格と所得に依存している。すなわち、第一段階で肉への支出額を決める際には、他の全商品の価格が必要になるのである。分離可能性を仮定すると、個別の財の情報はカテゴリー単位に集約される。としたら、カテゴリー単位のなんらかの価格指数を考えれば、その価格指数に情報を集約させ、$y_j(p, y)$の中の全ての商品の価格という多くの情報ではなく、カテゴリー単位の物価指数の情報にまで落とすことは可能ではないか?これがGorman (1959)が追及した、さらに強い二段階意思決定メカニズムである。

4.2 Gorman (1959) の第一段階における情報集約

弱分離可能性により情報集約が可能になるのは条件付き需要（第2段階）である。では、

第1段階でグループ支出配分 $(Y_1, \ldots, Y_k)$ を個別価格ベクトル p_j の詳細ではなく、 グループ価格指数 $P_j = P_j(p_j)$ のみで 厳密に 記述することは可能だろうか?すなわちカテゴリー内の価格分布の情報を一つの指数に集約することは可能だろうか?これが可能であれば、たとえは異時点間の意思決定を分析する際、10年先の複数の商品価格の変化は、10年先の物価指数という一つの統計量の変化に集約することが可能になり、モデルを構築する際有用である。

直観的に言えば、食料が他の財と弱分離可能であっても、食料への支出 Y_F は一般に

$$Y_F \ = \ Y_F(p_F, p_H, p_E, y)$$

のように全価格情報に依存し得る。したがって、第1段階を

$$(Y_F, Y_H, Y_E) = \Phi(P_F, P_H, P_E, y)$$

という形（指数だけ）で 厳密に 書けるとは限らない。

Gorman は二段階意思決定において、localとperfectという二種類のaggregationを区別する：

- Local aggregation: 価格変化が小さい局面では、指数に基づく近似による誤差が高次（概ね二次)に小さいため、二段階配分は近似として十分に良い場合がある。
- Perfect aggregation: 指数だけで第1段階を書け、グループを集合財(composite commodity)のように扱って最大化問題を再定式化できる、すなわち第一段階で個別消費財価格ではなくグループ単位の指数の関数として最適支出を決定できる場合である。

弱分離可能性は前者（local）を与えるが、後者（perfect:第1段階における情報集約）には追加条件が必要である。

4.3 Perfect aggregation の代表例：ホモセティックグループ効用

Perfect aggregation が成り立つ典型的な十分条件として、各グループ部分効用 v_I がホモセティック（一次同次関数の単調増加変換）である場合を挙げる。例えば、マクロ経済モデルで、各時点はDixit-Stilglitzタイプの代替の弾力性一定の一次同次関数で、時点間を加法につなげているケースがその代表例であろう。それに対し、local aggregationの

方はより弱い仮定で成立する[*3]。

財の集合が n 個のグループに分割され、消費バンドルを $x=(x_1,\dots,x_n)$ と書く。各グループ r の価格ベクトルを p_r，総支出（所得）を Y とする。

medskip **仮定（弱分離＋全グループのホモセティック性）.** 効用関数は

$$U(x) \;=\; F\big(v_1(x_1),\dots,v_n(x_n)\big) \tag{9}$$

と表せ、F は各成分について単調増加である（弱分離可能性）。さらに各部分効用 v_r はホモセティックである。ここで、グループ r の効用水準を

$$u_r := v_r(x_r) \tag{10}$$

と書く。このとき、各 r について v_r は一次同次関数の単調増加変換であり、同値な表現として、グループ r の支出関数 $E_r(p_r,u_r)$ は

$$E_r(p_r,u_r) \;=\; u_r\,E_r(p_r,1) \qquad (\forall u_r\ge 0) \tag{11}$$

を満たす。 **グループ価格指数（unit cost）.** (11) より、次で定義される

$$P_r(p_r) \;:=\; E_r(p_r,1) \tag{12}$$

は、グループ r の「1単位の部分効用を達成する最小費用」であり、グループ内の価格情報 p_r を1つのスカラーに集約した 価格指数として解釈できる（P_r は価格に関して一次同次)。

グループ量（実質支出）. グループ r の名目支出を y_r とすると、(11) から

$$y_r \;=\; E_r(p_r,u_r) \;=\; u_r\,P_r(p_r)$$

であるから、

$$X_r \;:=\; \frac{y_r}{P_r(p_r)} \tag{13}$$

と定義すれば、最適化で実現する部分効用は

$$u_r \;=\; X_r \tag{14}$$

と書ける。すなわち、グループ内の詳細な配分問題を解かずとも、グループ r の「実質量」X_r が部分効用水準そのものに一致する。

[*3] Local aggregatesの議論の詳細についてはGorman (1959)を参照されたい。最適解からの乖離がセカンドオーダーという、30年後のメニューコストを先取りした議論がある。

perfect aggregation（集合財表現）. 全体の予算制約 $\sum_{r=1}^{n} y_r \le Y$ は、(13) により

$$\sum_{r=1}^{n} P_r(p_r)\, X_r \;\le\; Y \tag{15}$$

と等価である。また、(9) と (14) より、全体効用は

$$U(x) \;=\; F(X_1, \ldots, X_n) \tag{16}$$

と表せる。したがって、元の最適化問題は、(15) の下で (16) を最大化する問題に厳密に還元される：

$$\max_{X_1,\ldots,X_n \ge 0} \; F(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{r=1}^{n} P_r(p_r)\, X_r \le Y. \tag{17}$$

(17) は、各グループを「集合財」とみなし、その価格を $P_r(p_r)$、数量（実質量）を X_r として扱う *perfect aggregation*（厳密集計）である。すなわち、第1段階（グループ間の支出配分）は個別価格ベクトル p_r ではなく、各グループの価格指数 $P_r(p_r)$ だけに依存して厳密に記述できる。この特殊ケースでは、ノンホモセティックな（所得により配分が大きく変わる）部分が存在しないため、Gorman が指摘した集計困難性は生じず、二段階予算配分がきれいな形で成立する。[*4]

上の議論は、上位の集計関数 F がホモセティックか否かとは独立である。重要なのは（グループ内）支出関数の線形性 (11) により、グループ内の価格情報が $P_r(p_r)$ に完全に集約される点である。（もちろん F もホモセティックであれば、全体としてもホモセティックな選好となる。）

なお、グループ内ホモセティックを仮定すると、ということは、所得（グループ支出）が変化してもグループ内の配分比率が変わらない（所得弾力性が 1 である）ことを含意するため、相対価格が不変なときに、所得上昇にともないシェアが変化するような贅沢財や必需財は存在しないことが前提となる。

[*4] ただし、各グループの価格指数を作成する際には、グループ内の価格情報が必要である。したがって、perfect aggregationの下では、グループ内の価格情報は一つの価格指数に集約はされ、その情報があれば、他の財グループ内の最適消費決定が可能だが、商品価格の情報そのものが不要であるということは意味しないことに注意する必要がある。

5 Home production があるとき：第2段階（旅行グループ内配分）における含意

5.1 Home production を伴う二段階意思決定：一般定式化

本節では、home production が存在する場合の二段階意思決定を一般形で定式化する。 home production がない古典的な二段階では、第1段階で各グループへの支出配分 $(Y_1, \ldots, Y_k)$ を決め、第2段階で所与の Y_j の下でグループ内配分を決める。

弱分離可能性は第2段階（グループ内）の整合性を保証するが、第1段階（グループ間配分）がグループ価格指数だけで完結するとは限らない。強い追加仮定（perfect aggregation）を置かない限り、グループへの支出配分を決める際には一般に全商品の価格情報が必要になる。さらに home production が存在する場合には、支出配分に加えて各グループへの時間予算配分も決めねばならない。しかし第1段階が終わり、各グループについて支出 Y_j と時間予算 R_j が所与となれば、第2段階のグループ内選択は当該グループ内の価格 p_j と (Y_j, R_j) のみに依存して決まり、この「第2段階が条件付きで閉じる」という数学構造自体は、home production がない通常の分離可能性と同一である。以下では、この構造を一般形で定式化し、命題として示す。

設定. グループは $j = 1, \ldots, k$ とする。グループ j の市場財ベクトルを $x_j \in X_j \subseteq \mathbb{R}_+^{n_j}$、グループ j の実際の投入時間を $T_j \in \mathbb{R}_+$ とし、市場財価格ベクトルを $p_j \in \mathbb{R}_{++}^{n_j}$ とする。総所得（非労働所得を含む）を $y \in \mathbb{R}_+$、総時間を $\bar{T} \in \mathbb{R}_+$ とする。

各グループのサービス（home-produced service）を

$$Z_j \;=\; g_j(x_j, T_j), \qquad j = 1, \ldots, k \tag{18}$$

で表す。ここで $g_j : X_j \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は連続、各引数について単調増加とする。上位効用はサービスベクトル $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)$ と余暇（残余時間）T_0 に依存し、

$$U \;=\; F(Z_1, \ldots, Z_k,\; T_0), \qquad F_{Z_j} > 0 \; (j = 1, \ldots, k), \;\; F_{T_0} > 0 \tag{19}$$

とする。

制約は金銭予算制約と時間制約である：

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_j \ \le \ y, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{k} T_j + T_0 \ = \ \bar{T}, \qquad T_0 \ge 0,\ T_j \ge 0. \tag{21}$$

第2段階（グループ内）問題. 第1段階でグループ j に配分された支出と時間予算をそれぞれ $Y_j \ge 0$、$R_j \ge 0$ とする。ここで R_j はグループ j に割り当てられる時間の上限であり、第2段階ではその範囲内で実際の投入時間 T_j が選ばれる。グループ j の第2段階問題（サービス最大化）を

$$V_j(p_j;\ Y_j, R_j) \ := \ \max_{x_j, T_j \ge 0} \ g_j(x_j, T_j) \quad \text{s.t.} \quad p_j \cdot x_j \le Y_j, \ \ T_j \le R_j \tag{22}$$

と定義する。最大化解（対応）を

$$h_j(p_j;\ Y_j, R_j) \subseteq X_j \times \mathbb{R}_+ \tag{23}$$

と書く。

第1段階（配分）問題. 第1段階では、$(Y_1, \dots, Y_k)$ と $(R_1, \dots, R_k)$ および残余時間 T_0 を選ぶ：

$$\max_{\{Y_j, R_j\}_{j=1}^{k},\ T_0 \ge 0} \ F\Big(V_1(p_1; Y_1, R_1), \dots, V_k(p_k; Y_k, R_k),\ T_0\Big) \tag{24}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{k} Y_j \le y, \qquad \sum_{j=1}^{k} R_j + T_0 = \bar{T}, \qquad Y_j \ge 0,\ R_j \ge 0. \tag{25}$$

命題 1 (Home production 下での二段階意思決定（支出配分＋時間予算配分）)**.** 仮定 (18)–(21) の下で、全体問題

$$\max_{\{x_j, T_j\}_{j=1}^{k},\ T_0 \ge 0} \ F\big(g_1(x_1, T_1), \dots, g_k(x_k, T_k),\ T_0\big) \quad s.t. \quad (20),\ (21) \tag{26}$$

の最適解 $(x_1^*, \dots, x_k^*, T_1^*, \dots, T_k^*, T_0^*)$ は、次の意味で二段階表現を持つ。

(i) （第*1*段階）最適解に対応する配分

$$Y_j^* \ := \ p_j \cdot x_j^*, \qquad R_j^* \ := \ T_j^*, \qquad j = 1, \dots, k \tag{27}$$

を定義すると、$(\{Y_j^*, R_j^*\}_{j=1}^{k}, T_0^*)$ は第*1*段階問題 (24)–(25) の最適解である。

(ii)（第*2*段階）各 j について、(x_j^*, T_j^*) は (22) の最大化解である。すなわち

$$(x_j^*, T_j^*) \in h_j(p_j;\ Y_j^*, R_j^*), \qquad j = 1, \dots, k. \tag{28}$$

逆に、第*1*段階 (24)–(25) の最適解 $(\{Y_j^*, R_j^*\}_{j=1}^k, T_0^*)$ と、各 j での第*2*段階最適解 $(x_j^*, T_j^*) \in h_j(p_j;\ Y_j^*, R_j^*)$ を組み合わせた点は、全体問題 (26) の最適解である[*5]。

Proof. **Step 1（全体最適解から第2段階最適性）.** 全体問題 (26) の最適解を (x^*, T^*, T_0^*) とし、(27) により $Y_j^* = p_j \cdot x_j^*$、$R_j^* = T_j^*$ とおく。このとき各 j について (x_j^*, T_j^*) は第2段階制約 $p_j \cdot x_j \le Y_j^*$、$T_j \le R_j^*$ を満たす。

背理法として、ある j について $(\hat{x}_j, \hat{T}_j)$ が存在し、

$$p_j \cdot \hat{x}_j \le Y_j^*, \qquad \hat{T}_j \le R_j^*, \qquad g_j(\hat{x}_j, \hat{T}_j) > g_j(x_j^*, T_j^*)$$

を満たすと仮定する。他のグループ $\ell \neq j$ については (x_ℓ^*, T_ℓ^*) のままに固定する。また時間制約は $\hat{T}_j \le T_j^*$ により緩む（あるいは同じ）ので、T_0 を増やしてもよいが、T_0 を固定したままでも金銭制約と時間制約は満たされ、しかも効用は上昇する。従って T_0 を固定して議論しても一般性を失わない。

実際、単調増加性より

$$F\big(g_1(x_1^*, T_1^*), \dots, g_j(\hat{x}_j, \hat{T}_j), \dots, g_k(x_k^*, T_k^*), T_0^*\big) > F\big(g_1(x_1^*, T_1^*), \dots, g_j(x_j^*, T_j^*), \dots, g_k(x_k^*, T_k^*), T_0^*\big)$$

である。一方、金銭制約は

$$\sum_{\ell \neq j} p_\ell \cdot x_\ell^* + p_j \cdot \hat{x}_j \le \sum_{\ell \neq j} p_\ell \cdot x_\ell^* + Y_j^* = \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell \cdot x_\ell^* \le y$$

より満たされ、時間制約も

$$\sum_{\ell \neq j} T_\ell^* + \hat{T}_j + T_0^* \le \sum_{\ell \neq j} T_\ell^* + T_j^* + T_0^* = \bar{T}$$

より満たされる。したがって全体最適性に矛盾する。よって (28) が成り立つ。

Step 2（全体最適解から第1段階最適性）. 任意の第1段階実行可能配分 $(\{Y_j, R_j\}_{j=1}^k, T_0)$ を取る。第2段階の定義より、各 j について

$$V_j(p_j; Y_j, R_j) = g_j(x_j, T_j) \quad \text{を達成する} \quad (x_j, T_j) \in h_j(p_j; Y_j, R_j)$$

[*5] 本命題の証明は前節で展開した古典的な弱分離可能性の証明（Barten and Böhm (1982)等）を時間制約の存在する設定に自然に拡張したものであり、証明の数学的構造は標準的である。

が存在するとする（最適解の存在は仮定に含める）。このとき

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_j \le \sum_{j=1}^{k} Y_j \le y, \qquad \sum_{j=1}^{k} T_j + T_0 \le \sum_{j=1}^{k} R_j + T_0 = \bar{T}$$

より、$(x_1, \ldots, x_k, T_1, \ldots, T_k, T_0)$ は全体問題の実行可能点である。従って全体最適性から

$$F\big(g_1(x_1, T_1), \ldots, g_k(x_k, T_k), T_0\big) \le F\big(g_1(x_1^*, T_1^*), \ldots, g_k(x_k^*, T_k^*), T_0^*\big) \tag{29}$$

が成り立つ。

一方、左辺は第2段階の取り方より $g_j(x_j, T_j) = V_j(p_j; Y_j, R_j)$ なので

$$F\Big(V_1(p_1; Y_1, R_1), \ldots, V_k(p_k; Y_k, R_k), T_0\Big) \le F\big(g_1(x_1^*, T_1^*), \ldots, g_k(x_k^*, T_k^*), T_0^*\big) \tag{30}$$

である。さらに Step 1 より $g_j(x_j^*, T_j^*) = V_j(p_j; Y_j^*, R_j^*)$ が成り立つから、右辺は

$$F\Big(V_1(p_1; Y_1^*, R_1^*), \ldots, V_k(p_k; Y_k^*, R_k^*), T_0^*\Big)$$

に等しい。従って任意の第1段階実行可能配分に対して

$$F\Big(V_1(p_1; Y_1, R_1), \ldots, V_k(p_k; Y_k, R_k), T_0\Big) \le F\Big(V_1(p_1; Y_1^*, R_1^*), \ldots, V_k(p_k; Y_k^*, R_k^*), T_0^*\Big)$$

が成り立ち、$(\{Y_j^*, R_j^*\}, T_0^*)$ は第1段階問題の最適解である。

Step 3（逆向き：二段階最適性から全体最適性）. 第1段階の最適解 $(\{Y_j^*, R_j^*\}, T_0^*)$ と、各 j の第2段階最適解 $(x_j^*, T_j^*) \in h_j(p_j; Y_j^*, R_j^*)$ を取る。このとき

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_j^* \le \sum_{j=1}^{k} Y_j^* \le y, \qquad \sum_{j=1}^{k} T_j^* + T_0^* \le \sum_{j=1}^{k} R_j^* + T_0^* = \bar{T}$$

より、(x^*, T^*, T_0^*) は全体問題の実行可能点である。

いま任意の全体実行可能点 (x, T, T_0) を取る。全体問題の時間制約は (21) により等号であり、 T_0 は「残余時間」として定義されているので

$$\sum_{j=1}^{k} T_j + T_0 = \bar{T}$$

が成り立つ。ここから

$$Y_j := p_j \cdot x_j, \qquad R_j := T_j$$

を定義すれば、

$$\sum_{j=1}^{k} Y_j = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_j \le y, \qquad \sum_{j=1}^{k} R_j + T_0 = \sum_{j=1}^{k} T_j + T_0 = \bar{T}$$

より $(\{Y_j, R_j\}, T_0)$ は第1段階制約 (25) を満たす実行可能点である。

さらに、第2段階の定義 (22) より

$$g_j(x_j, T_j) \le V_j(p_j; Y_j, R_j) \qquad (\forall j)$$

が成り立つから、単調増加性より

$$F\big(g_1(x_1, T_1), \ldots, g_k(x_k, T_k), T_0\big) \le F\Big(V_1(p_1; Y_1, R_1), \ldots, V_k(p_k; Y_k, R_k), T_0\Big). \tag{31}$$

第1段階最適性より、右辺は

$$F\Big(V_1(p_1; Y_1^*, R_1^*), \ldots, V_k(p_k; Y_k^*, R_k^*), T_0^*\Big)$$

以下である。最後に (x_j^*, T_j^*) は第2段階最適解なので $V_j(p_j; Y_j^*, R_j^*) = g_j(x_j^*, T_j^*)$ が成り立ち、

$$F\Big(V_1(p_1; Y_1^*, R_1^*), \ldots, V_k(p_k; Y_k^*, R_k^*), T_0^*\Big) = F\big(g_1(x_1^*, T_1^*), \ldots, g_k(x_k^*, T_k^*), T_0^*\big)$$

である。従って任意の実行可能点より高い（あるいは等しい）効用を与えるので、(x^*, T^*, T_0^*) は全体問題の最適解である。 □

Home productionがあっても、二段階意思決定の証明はないケースと全く同一である。ただし、Home Productionのある場合、(24)の効用関数の解釈に注意が必要である。あるグループにおける市場財投入や時間投入が、たとえそのグループ内で大きな疲労や負担を伴うとしても、その影響は当該グループのサービス水準（あるいは部分効用）を通じてのみ上位効用に伝わる、という点である。すなわち、そのグループ内での時間投入が他グループの効用に直接影響することはなく、他グループへの影響は当該グループの効用水準の変化を介してのみ生じる。この構造があるため、home production が存在しても、各グループ内の選択は所与の支出配分・時間予算配分の下で独立に解くことができる。はたしてこの仮定が適切か否かは議論の余地があるだろう。例えば、長時間ドライブからら帰ってきたばかりの時は疲労困憊していて、他に何もする気力が起きないかもしれない。それは、長時間運転の疲れ直接から影響を受けるのではない。たとえば出先でたくさんのよい経験を積んだら、遠出の効用は上昇する。このとき、長時間ドライブの疲れという負効

用は、出先の良い経験によりある程度は打ち消される。効用としては説得力があるが、疲労そのものは減らないのではなかろうか?このあたりの意思決定はより深く掘り下げる価値があるだろう。

6 強分離可能性・加法分離可能性の含意

いままで弱分離可能性、およびGormanによるperfect aggregationを紹介したが、分離可能性にはさらに異なるバージョンがあり、モデル構築や実証分析に対して強い含意を有している。ここではPollak (1971)に従い、弱分離可能性（utility tree）よりも強い仮定である 強い分離可能性（*block additivity*）と加法分離可能性（*additivity*）が需要関数に与える含意をまとめる。重要な点は、弱分離が「グループ内需要は (p_j, y_j) で完結する」ことを与える一方で、強い分離・加法分離は「グループのまとめ直し（再分割）」に関して追加の含意をもつことである。

1. 強い分離可能性（block additivity）の含意：グループの合併（superblock）が許される

■定義（block additivity）. グループ分割 $S = S_1 \times \cdots \times S_k$ の下で、ある単調増加関数 Φ と、各グループの部分効用 $v_j : S_j \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\Phi\bigl(u(q)\bigr) \;=\; \sum_{j=1}^{k} v_j(q_j) \tag{32}$$

と書けるとする（$q = (q_1, \ldots, q_k)$）。これは弱分離 (4) を含意する。

■(i) 弱分離の含意はすべて成立（第2段階の整合性）. 任意の j について、グループ j の条件付き需要 $f^j(p_j, y_j)$ は (p_j, y_j) のみで定まり、さらに全体最適で実現する支出 $y_j(p, y) := p_j \cdot f_j(p, y)$ を用いれば

$$f^j\bigl(p_j,\, y_j(p, y)\bigr) \;=\; f_j(p, y) \qquad (\forall j) \tag{33}$$

が成り立つ（Barten–Böhm 型の同一性）。

■(ii) 追加含意：グループの合併（superblock）に対しても同様の二段階表現が成り立つ. 任意の部分集合 $J \subset \{1, \ldots, k\}$ を取り、その合併グループ（superblock）を

$$S_J \;:=\; \prod_{j \in J} S_j, \qquad q_J := (q_j)_{j \in J}, \qquad p_J := (p_j)_{j \in J}$$

と書く。block additivity (32) の下では、

$$v_J(q_J) \ := \ \sum_{j\in J} v_j(q_j)$$

により、J を1つの大グループとみなしたときも（単調変換の下で）同様の構造が保たれる。したがって、J に対する「合併グループ条件付き需要」

$$f^J(p_J, y_J)$$

（支出 y_J の下で v_J を最大化する需要）が定義でき、全体最適で実現する合併グループ支出

$$y_J(p,y) \ := \ \sum_{j\in J} y_j(p,y)$$

を代入すると、合併グループの全体需要と一致する：

$$f^J\bigl(p_J,\, y_J(p,y)\bigr) \ = \ f_J(p,y), \tag{34}$$

ここで $f_J(p,y) := (f_j(p,y))_{j\in J}$ は全体需要の J 成分をまとめたベクトルである。

解釈： 弱分離では「所与のグループ分割」に対する二段階表現が得られるにとどまるが、block additivity では「複数グループをまとめて1つの大分類（superblock）にしても」同様の二段階表現が成立する。すなわち、分析目的に応じて「食料＋外食」「住居＋光熱」などの合併分類を行っても、理論的一貫性が保たれる。

2. 加法分離可能性（additivity）の含意：任意の再分割（任意の部分集合）が枝になる

■定義（additivity）． ある単調増加関数 Ψ と、各財（あるいは最小単位）の部分効用 u_i が存在して

$$\Psi\bigl(u(q)\bigr) \ = \ \sum_{i=1}^{m} u_i(q_i) \tag{35}$$

と書けるとする（ここで q_i は最小単位の商品(財))。これはすべての商品に関して、サブ効用関数が存在、そのサブ効用関数の和で総効用が得られることを意味している。ある財グループに対するサブ効用を考えた block additivityを包含しており、blck additivityより強い仮定である。

■(i) 任意の部分集合が「グループ」として扱える． 任意の部分集合 $A \subset \{1,\ldots,m\}$ に対して

$$u_A(q_A) \ := \ \sum_{i\in A} u_i(q_i)$$

とおけば、A を1つのグループ（枝）とみなしたときの部分効用が定義できる。したがって、A をグループとする条件付き需要 $f^A(p_A, y_A)$ が (p_A, y_A) のみで定まり、全体最適で実現する支出 $y_A(p, y)$ を代入すると

$$f^A\big(p_A,\, y_A(p, y)\big) \;=\; f_A(p, y) \tag{36}$$

が成り立つ（ここで $p_A = (p_i)_{i\in A}$，$f_A = (f_i)_{i\in A}$）。

■(ii) 追加含意：再分割の自由度が最大. block additivity では「元のブロックの合併」が自然な操作であるのに対し、 additivity では（概念的には）どの財の集合でも1つの枝として扱える。したがって、分析者は目的に応じて任意の粒度でグループ化し、その都度 (36) 型の二段階表現を用いて議論できる。例えば、食材に対して加法分離可能性を考えると、カレーライスに必要な食材グループ、おでんに必要な食材グループ、コロッケのグループ、かつ丼に必要なグループと、自由にグルーピングを行うことが可能であることを意味する。この仮定は一般に非常に強いが、モデルが著しく簡素化されるメリットと制約の強さのトレードオフを意識する必要がある。

3. 実証上の含意：weak separability は弱すぎ、additivity は強すぎるケース

実証分析では、(i)財数が多く次元圧縮が必要であり、(ii)ブロック内には強い代替・補完（活動としての消費バンドル）があり、 (iii)しかしブロック間の相互作用は「ブロック水準」で捉えるのが自然、という状況が多い。このとき、weak separability だけでは上位段階（ブロック間配分）の自由度が大きすぎて「ブロック物価指数でまとめる」議論が不安定になり得る一方、 additivity（財ごとの加法分離）はブロック内の相互作用を殺しすぎて不適切になりやすい。そこで、ブロック内の相互作用を許しつつ、上位段階ではブロック水準の集約量で決まるように制約する *block additivity*（中庸な仮定）が有用になるケースがある。

■典型例（block additivity が自然）. 以下では、「ブロック内ではベクトルとして一般形で扱いたいが、ブロック外とは（主に）ブロック水準で分離」することが望ましいケースをいくつか挙げてみよう。

1. **食ブロック（自炊 vs 外食、および自炊内の消費バンドル）.** 食に関する支出は大きく、住居・教育・医療など他ブロックと分けて二段階で記述したいことが多い。しかし食の内側では、自炊が「食材 × 光熱 × 調理時間」という補完的な消費バンドルであり、外食は時間節約・サービス価格と結び付くため、ブロック内には強い相互作用がある。この相互作用を許すには block separability が自然で

ある。一方、*additivity* は食材・光熱・外食等の補完関係を表現しにくい。また *weak separability* だけでは、食ブロック内の相対価格変化（外食価格や惣菜価格の変化）が上位段階（食への配分）にどのように入るかの自由度が大きく、「食の物価指数」を用いた説明・分解が仕様に敏感になり得る。

2. **交通ブロック（自家用車の費用バンドル＋公共交通）．** 交通は「交通サービス」として一括りにしたいが、ブロック内には自家用車利用の費用バンドル（ガソリン・駐車場・高速料金・保険等の補完）と、手段間（車 vs 鉄道等）の代替が同居する。このため財ごとの加法分離は不自然である。同時に、交通を他の消費から分離して二段階で議論したい（交通ブロック指数で次元圧縮したい）ので、 block separability が実務的に適切になる。
3. **住居ブロック（住居サービス：家賃（帰属家賃）＋光熱＋住宅関連）．** 住居は支出の大塊であり、他ブロックと分けて扱う動機が強い。しかし住居内では、広さ・設備・冷暖房等を通じて家賃と光熱・修繕等が補完的に結び付くため、財ごとの additivity は不自然である。一方で、住居を「住居サービス」としてまとめ、ブロック指数で次元圧縮したいという実証上の要請があるため、 weak separability よりも強い整理（上位段階をブロック水準に制約する）として block separability が有用となる。
4. **教育・子育てブロック（保育・学費・教材・送迎交通）．** 政策評価や所得効果の議論では、教育関連支出を大分類として取り出したい。しかしブロック内は強い補完（保育があれば送迎や教材需要が増える等）と離散的選択（習い事の有無）が混在し、財ごとの additivity は現実的でない。同時に、weak separability だけでは制度変更や相対価格変化が上位段階に入る自由度が大きく、「教育ブロックの実質費用」や厚生分解が仕様に敏感になり得るため、 block separability のような中庸な仮定が実証上の整理に役立つ。

■**小括.** 以上の例はいずれも、

> (1) ブロック内に強い代替・補完（活動としての消費バンドル）があるため additivity は強すぎ、 (2) しかしブロック外との相互作用は主としてブロック水準で捉えたいので weak separability は弱すぎ、 (3) ブロック指数（次元圧縮）とブロック内の一般形を両立させる block additivity が適切

という可能性を示している。

7　分離可能性の検証

選好が弱分離可能であるとき、需要関数にはどのような検証可能な制約が課されるだろうか?効用関数が異なる財グループGとHに関して弱分離可能と仮定しよう。$i \in G, j \in H \quad (G \neq H)$とする。すると、$H$に属するある財の価格$p_j$の変化が$G$に属する財の補償需要に対して与える影響は

$$s_{ij} = \left. \frac{\partial q_i}{\partial Y_G} \frac{\partial Y_G}{\partial p_j} \right|_{u=const}$$

代替効果は対称だから、

$$s_{ji} = \left. \frac{\partial q_j}{\partial Y_H} \frac{\partial Y_H}{\partial p_i} \right|_{u=const} = s_{ij}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q_i}{\partial Y_G} \frac{\partial Y_G}{\partial p_j} \right|_{u=const} &= \left. \frac{\partial q_j}{\partial Y_H} \frac{\partial Y_H}{\partial p_i} \right|_{u=const} \\ \left. \frac{\partial Y_G}{\partial p_j} / \frac{\partial q_j}{\partial Y_H} \right|_{u=const} &= \left. \frac{\partial Y_H}{\partial p_i} / \frac{\partial q_i}{\partial Y_G} \right|_{u=const} \end{aligned}$$

この左辺はiに依存せず、右辺はjに依存していない [*6]。したがって、両辺ともiとjに依存していないことになる。それを$\dot{z}_{GH}$と書き、整理すると、

$$\left. \frac{\partial Y_G}{\partial p_j} \right|_{u=const} = \lambda_{GH} \frac{\partial q_j}{\partial Y_H}$$

となる。総支出と各グループへの支出の関係に書き直すと、

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \left. \frac{\partial q_i}{\partial Y_G} \frac{\partial Y_G}{\partial p_j} \right|_{u=const} \\ &= \lambda_{GH} \frac{\partial q_i}{\partial Y_G} \frac{\partial q_j}{\partial Y_H} \\ &= \mu_{GH} \frac{\partial q_i}{\partial Y} \frac{\partial q_j}{\partial Y} \end{aligned}$$

[*6] このDeaton and Muellbauer (1980)による証明方法には問題があるように思われる。この定理の最初の証明はGoldman and Uzawa (1964) "A note on separability in demand analysis," Econometrica, 32, pp. 387-398.であるが、そこでは縁付きヘシアンを用いた、より複雑な証明が行われている。

ただし、

$$\mu_{GH}\frac{\partial Y_G}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}=\lambda_{GH}$$

この関係は、効用関数の弱分離性の必要十分条件になっていることが知られている(Gorman (1971) *7。すなわち、二つの異なる財グループが弱分離しているかどうかは、片方の価格変化に対するもう一方の財の補償需要の代替効果が同一財グループ内ですべて同じであり、所得効果を用いた公式で表すことが可能であるか否かを検証すればよいことになる。ここで、需要関数の形状が、先に紹介したような

$$\ln q_i=\alpha_i+\varepsilon_{iy}\ln\left(\frac{y}{P}\right)+\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^*_{ki}\ln p_k+e_i.$$

の形状をとっていると仮定しよう。すると、異なる財グループ間の代替効果はこの式から容易に求めることが可能であり、代替効果の同一グループ内での同一性という係数制約に関する χ^2 検定を行えばよい(Nayga and Capps (1994))。さらに一般的な需要関数のクラスを用い推計する研究もあり、現在でも食料支出の分析などで頻繁に、パラメトリックな需要関数を特定した上で検証している研究は発表されている。しかしながら、対数線形や二次関数で近似した需要関数は、あくまでも真の需要関数に対する局所的な近似であり、これをグローバルな需要関数とみなすことには相当の無理がある。例えば、トランスログ等の多くのパラメターを有する需要関数は局所的には、観察不能な真の需要関数のとても良い近似になっている。しかし、グローバルな視点からは非常に強い制約を課した需要関数になっているのである。一方、大域的な需要関数の形状を知るためには、非常に多くの観察値が必要になる。需要関数は価格と所得の関数であり、その形状を知るには、理想的には、定義域に属するすべての価格と所得に関する情報がなければならないが、そのようなデータはまず存在しない *8。

1983年にHal Varianが発表した論文Varian (1982)は、この分野のBreakthroughとなった。Varian (1983)は顕示選好を用い、ノンパラメトリックに検証することを提案している。これは非常に重要な研究なので、スペースをとって紹介しよう。

---

*7 Gorman (1971)は未刊行論文である。論文の中身はW. M. Gorman, C. Blackorby, and A. F. Shorrocks ed. (1996) Separability and Aggregation: The Collected Works of W. M. Gorman, Volume I Oxford Scholarship Online: November 2003で読むことができる。

*8 1970年代半ばころまでの、分離可能性理論研究の到達点であるBlackorby et al. (1978) は現在でも一読の価値はある。

Varianの手法は、古典的な消費者理論に依拠している。まず、価格と消費に関するデータがあると仮定する。この価格と消費のデータがどのような性質を持つとき、それは、合理的な消費行動と整合的になるだろうか?この、データから選好関係を推測するアプローチとしてはSamuelsonの顕示選好の弱公準が有名であるが、それだと推移性を確保できない。弱公準に変わり、主要な役割を演じるのは、Generalized Weak Axiom of Revealed Preference (GARP)と呼ばれる公理である。 $(p_x, x)\,(p_y, y)$ (p_{xi}, x_i) のような、観察された価格と消費量のベクトルのペアがあるとしよう。$p_x x \geq p_x y$のとき、すなわち、xが選択された価格ベクトルp_xの下でyが購入可能であり、しかしyは選択されずxが選択されていた時、xR^Dyと書き、xはyよりも直接弱顕示選好される、と定義する。このとき、消費者の行動原理として、下記の仮定(公準)は特に有名なものである。

1.顕示選好の直接弱公準(WARP)：xR^Dy、かつ$x \neq y$のとき、yがxよりも直接弱顕示選好されることはない。

データが顕示選好の直接弱公準を満たしているか否かを調べることは容易である。実際の支出額および価格ベクトルを入れ替えた仮想的な支出額の大小を比較すればよい。さて、このような、WARPをxの系列$(x$Ą$, x$Ć$, ..., x_n)$に対して調べることが出来た、としょう。そして、xR^DxĄ$_1, x_1R^Dx_2, ..., x_nR^Dy$という関係があった、とする。すなわち、$y$に対して$x$は間接的に弱顕示選好されていることになる。このとき、、yに対してxは顕示選好される、と定義し、これをxRyと書く。

2.顕示選好の強公準(SARP): xRyが成立し、かつ、$x \neq y$のとき、 yRxは成立しない。

顕示選好の強公準を仮定することにより選好関係(効用関数)に推移性が成立する。したがって、ある消費と価格ベクトルが顕示選好の強公準を満たす場合、それは合理的な選好関係の結果とみなすことが可能である。すなわち、顕示選好の強公準により、合理的意思決定がされていることがわかる。観察された数量・価格ベクトルの組み合わせが顕示選好の強公準を満たしているか否かを調べるには、xとyが間接的に顕示選好されるような数量と価格ベクトルが観察値の中になければならない。観察値を順列組み合わせでしらみつぶしに調べていくことになるが、時間を短縮するアルゴリズムとしてワーシャル–フロイド法（Floyd–Warshall Algorithm）が頻繁に用いられている。

次に、予算制約に関して、厳密な不等号が成立している状況を考える。

$p_x x > p_x y$のとき、xはyに厳密に直接顕示選好される、と定義する。

以上の準備から、下記の公準に関して議論することが出来る。

3.一般化顕示選好の公準(GARP): xRyならば、yがxよりも厳密に直接顕示選好されることはない。

GARPは、Afriat (1967) による有名な定理で重要な役割を果たす。次の3つの性質を考えよう。

(1)データがGARPを満たす。
(2)連続、単調、凹性、局所非飽和を満たす効用関数が存在し、その最大化行動として消費と価格ベクトルのデータを解釈可能である。
(3)観察された財と価格の組み合わせ(サンプルサイズ)がnであれば、Afriatの不等式と呼ばれる下記の不等式をみたすようなU^i,λ^i, $(i = 1, 2, ..., n)$が存在する。

$$U^i \leq U^j + \lambda^j p_j (x_i - x_j) \quad \text{for } i, j = 1, 2, ..., n.$$

Afritaの不等式に出てくるλ^jは、効用最大化の、予算制約に付されるクーンタッカー乗数と考えられる。その直観は、下記の一階条件を考えることで明らかである。効用水準が飽和しておらず、かつ効用関数が微分可能であれば、

$$u(x^i) \leq u(x^j) + Du(x^i)(x^j - x^i)$$

$$Du^{x^{ij}} = \lambda^j p_j$$

以上の二式から

$$u(x^j) \leq u(x^j) + \lambda^j (x^j - x^i)$$

を得ること可能である。 Afriatの定理により、これら(1)-(3)は同値であることが知られてい。証明は省くが、GARPは、凹、連続、単調性、局所非飽和を満たす効用関数が存在することと同値なのである。なお、WARPは財が三種類以上あるときには効用関数の存在の必要十分条件とならない。またSARPは一つの価格ベクトルに対し、複数の最適な消費ベクトルが存在する時に対応できない。その点GARPは、複数の最適消費ベクトルが

存在する、多数の消費財に対応した、合理的意思選択の存在の必要十分条件となるのである。(3)は線形計画法で解くことが可能であり[*9]、(2)はGARPの検証をFloyd–Warshall Algorithm等のネットワーク理論を用いて行うことになる[*10]。

さて、選好がxとzに関して弱分離可能なとき、効用関数は下記のように書くことが可能である。

$$u\left(x,z\right)=h\left(x,v\left(z\right)\right)$$

私たちは、観察されたデータがこの形状の効用関数の最大化問題の解とみなすことが可能であるための必要十分条件を知りたい。まず、観察されたデータ全体がGARPを満たさねばならないことは明らかである。次に、$v(z)$という効用関数が存在するためにはzに関してもGARPが成立しなければならない。消費ベクトルzに対応する価格ベクトルをqと書くことにしよう。すると、u,h,vという三つの関数全てが凹であるためには、、様々な状況、i,jに対して、下記が成立する必要がある。

$$\begin{aligned}
u\left(x^i,z^i\right)&\leq u\left(x^j,z^j\right)+\lambda^jp^j\left(x^i-x^j\right)+\lambda^jq^j\left(z^i-z^j\right)\\
h^i\left(x^i,v^i\right)&\leq h^i\left(x^i,v^j\right)+\lambda^jp^j\left(x^i-x^j\right)+\rho^j\left(v^i-v^j\right)\\
v\left(y_i\right)&\leq v\left(y_j\right)+\mu^jq^j\left(z^i-z^j\right)
\end{aligned}$$

ところで、zに属する任意の財$z_{(l)}$について、観察値jにおいて微分をとると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z_{(l)}}&=\lambda^jq^j\\
\frac{\partial u}{\partial z_{(l)}}&=\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z_{(l)}}=\rho^j\mu_jq^j
\end{aligned}$$

したがって、

$$\rho^j=\frac{\lambda^j}{\mu^j}$$

これは、

$$h\left(x^i,v^i\right)\leq u\left(x^i,v^j\right)+\lambda^jp^j\left(x^i-x^j\right)+\frac{\lambda^j}{\mu^j}\left(v^i-v^j\right)$$

を意味する。Varian (1983)は下記の三種類の性質が同値であることを証明している。

---

*9 線形計画法による解法に関しては、Diewert and Parkan (1985)を参照されたい。

*10 Floyd-Warshallのアルゴリズムに関してはVarian (1982)が、実際にGARPに応用し、丁寧に説明している。

(1)下記のAfriatの不等式をみたす$U^i, \lambda^i, V^i, \mu^i \quad (i=1,2,...,n)$が存在する、

$$U^i \le U^j + \lambda^j p^j \left(x^i - x^j\right) + \frac{\lambda^j}{\mu^j}\left(V^i - V^j\right)$$
$$V^i \le V^j + \mu^j q^j \left(z^i - z^j\right) \quad \text{for } i,j = 1,2,...,n.$$

(2)　$\left(q^i, z^i\right)$と$\left(\left(p^i, 1/\mu^i\right), \left(x^i, V^i\right)\right)$はAfriatの不等式をみたすような$\left(V^i,\mu^i\right)$を適当に選択することでGARPをみたす、

(3)弱分離可能で、凹、単調、連続、局所非飽和をみたす効用関数が存在し、その最適化行動の結果としてデータを再現可能である。

この必要十分条件に基づいてデータが弱分離可能であるか検証するにはどうすればよいだろうか?選択肢は(1)と(2)の二つである。(1)を用いる場合、観察されたデータの中から任意の二つをもってきて、それらが常に、財ベクトル全体と、一部のサブセットにAfriatの不等式をみたすような$U^i, \lambda^i, V^i, \mu^i$を見つける必要がある。

(2)は、一つのサブ効用関数でまとめられる財グループの消費ベクトル、z^iを一つの数量指数V^iでまとめ、$1/\mu^i$をV^iに対応する価格とみなし、グループ内でGARPを満たすかどうかを判定するものである。

具体的には、まず、全体の価格と数量のベクトルがGARPを満たすか否か検証する。次に$v(z)$の合理性の検証として、zとそれに対応する価格がGARPを満たすか否かを検証する。問題は、$v(z)$を一つの数量とみなし、xと$v(z)$の間の合理性を検証する所である。ここでは、V^iを効用水準、あるいは数量(指数)、$1/\mu^i$をV^iに対応する価格と考える。私達は、それらに関する先験的情報を持たない。Varianが用意したアルゴリズムでは、ある適当な二つの正の数値(例えば物価・数量指数)をとってきて、同一グループに属する商品の数量と価格に関してAfriatの不等式をみたすことを確認したうえで、そのもとで、財グループ内でGARPが成立するかどうか判定している。もしも適当にとった指数のもとでデータがzのグループ内、およびグループ財の数量と価格ベクトルを一つの正の実数値、すなわち指数で表したものと他の財がGARPを満たしているのであれば、データは弱分離可能と整合的である。しかしながら、ある指数の下でGARPをみたしていなくとも、それは必ずしも弱分離可能性と矛盾しているとは言えない。採用した指数が間違っている可能性があるためである。実際、Varianが開発したアルゴリズムでは、コブダグラス型の効

用関数からシミュレートされたデータですら、弱分離可能性を棄却してしまうという指摘をBarnett and Choi (1989)が行っている。Fleissig and Whitney (2003)は、物価・数量指数としてTörnqvist indexを用い、かつ、線形計画法を用いることで(1)の検証が可能であることを示し、かつ、Varianのアルゴリズムよりも信頼性が高くなることを見出している。

Hjertstrand (2009)は、弱分離可能性検証に関する様々なノンパラメトリック検定の結果をまとめ、各手法の利点と問題点を整理している。近年、Cherchye et al. (2015)は、GARPの判定にIndicator Functionが使われており、混合整数線形計画法(Mixed Integer Linear Programming)の問題に変換することが可能であることを指摘した。そして、Afiratの不等式を用いず(すなわち凹性を仮定しない)に高弱分離可能性を検証する手法を開発し、大幅に計算時間を短縮し、かつ精度の高いアルゴリズムのになるとしている。さらに、Hjertstrand et al. (2021)は代表的な指数算式とAfriatの計算の関係について考察している。

分離可能性の検証は消費行動の実証分析の基本でありながら、近年になりようやく実行可能かつ十分な検出力を有する統計分析手法が開発された状態にある。この分析は急速に進展しており、面倒なGARP検定に関する便利なRのコードも提供されている[*11]。例えば、日本では佐藤秀保 (2021)が、乳製品のPoint of Salesデータ(POS)データを用いたノンパラメトリック検証を行い、分離可能性を棄却する結果を得ている。

7.1 GARP推計の実際

実際にGAPRを検証する際、一つでも観察値がエラーが存在すると、そのエラーのために合理性や分離可能性を棄却してしまう可能性がある。Afriat (1973)は、合理性の定義を緩め、ある正の値をとる効率性指標、$e \in (0,1]$を導入する。そして、下記が成立する時、観察されたデータ、x', p'は効率性指標eの下で合理化可能(rationalizable)と定義した。

$$U(x') \geq U(x) \quad \text{for any } x \in \{x \in \mathbb{R}^N_+ \mid p' \cdot x \leq p' \cdot e\}$$

$e = 1$のとき、これは通常の合理性の定義と同じである。$e < 1$の時に対応するGARPをeGARPと名付けている。幸い、eGARPを計算することは容易であり、便利なSTATAやMATLABのコードが利用可能である。

[*11] Julien Boelaertによるコードは下記のリンクで入手可能である。https://cran.r-project.org/web/packages/revealedPrefs/revealedPrefs.pdf

国際連合が作成している購買力平価のデータには、各国の様々な商品の支出と価格水準の情報が含まれている。そこに含まれている174カ国のデータを用い、12の消費カテゴリーに関してGARPを計算すると58の国のコンビネーション($174 \times 173 = 30102$)がGARPに反しており、その数はごくわずかである。一方、その効率化指標は0.9683であり、1から大きく乖離してる。ユーロ国に限定すると、GARPからの乖離は4/1035となり、効率化係数は0.9961386となり、ほとんど1と変わらない。また、174ヵ国であっても、詳細な108カテゴリーのデータを用いると、GARPに反するのはわずか二つとなり、効率化係数も0.997となる。以上の結果は、選好が著しく異なると思われる国間のデータを用いても、GARPの検証ではその選好の相違を捉えることが困難であることを示唆している。174カ国の中には、インドやサウジアラビアなどのヒンズー・イスラム圏が含まれており、それらの国ではアルコールや牛肉・豚肉の数量はゼロになっている。一方、価格に関しては無限大ではなく、ある有限の値が入っており、そうした国々と、アルコール消費や牛肉・豚肉を多量に消費する国の選好を同一とみなし、その時の消費・価格ベクトルが合理性を満たすとする結果は、納得することが困難である。また、国の数が多いほど、また財の数が多いほど棄却しにくくなる、すなわちPowerが小さくなっていくことも伺うことができる。

Blundell et al. (2003) は予算制約式のシフトが著しいとき、GARPはPowerを失うと指摘している。GARPのPowerに関しては多く研究が進行中であり、便利なSTATA, MATLABのコードも出ているが、その使い方および解釈には注意が必要である。すなわち、GARPでは、合理的意思決定を反映しているシミュレーションデータを棄却してしまったり、あるいは明らかに同一の選好ではないような消費・価格ベクトルの組み合わせを合理的意思決定と整合的である、と判定してしまうことも多く、その使い方には十分に注意する必要がある。

実際にGARPを観察データに応用する場合に直面する問題は、数量がゼロのケースの扱いである。商品別の取引データ(POSのように)を用いると、商品が入れ替わることにより、数量がゼロ、価格は欠損、という事態が頻繁に生じる。また、新型コロナ禍における海外旅行やスポーツ観戦のように、そもそも商品が供給れされていない事態も生じる。そのようなときに、GARPはどう計算可能であろうか?商品が供給されていない時の価格を仮に非常に大きな値、無限大のような値を設定すると、仮想的な支出額も無限大になってしまい、GARPの計算に適さない。したがって、全ての商品が正の値で購入されているデータに限定する必要があるが、そのような財はごく一部であろう。さらに、例えば家計単位で細かい消費カテゴリーで情報がある場合でも、ある家計は一か月全く肉を買っていない、あるいは旅行に行っていないことは十分起こりうる。このような時にもGARPを

使うことは困難である。ゼロ消費は、現実のデータでは頻繁に生じるが、それに対応するミクロ経済理論、すなわちコーナー階の扱いは、その消費がゼロになっている理由が需要要因なのか供給要因なのかによりその理論的含意は全く異なるものになる。GARPを用いる場合は、選好が変化せず、商品が全て消費されていると想定される状況に、現在のところは限定されている。

8 Generalized Composite Commodity Theorem (GCCT): Lewbel (1996)

弱分離可能性を仮定せずに、ある消費財グループを集合財としてみなすことを正当化する、古典的な理論が存在する。Hicks-Leontief のComposite Commodity Theorem と呼ばれるものであり、ある財グループの価格の変動が完全に連動していれば、そのような財は一つの集合財とみなすことが可能である、というものである。もしも二つの財の価格の変動が完全に連動しており、価格変化率が一致しているなら、それらの財の価格は初期の相対価格がそのまま維持されることになる。初期の相対価格は固定されているからパラメターとみなすことができる。すると、時系列データを用いた消費分析を行う場合、共通の財価格の変化率を価格の代理変数として用い、初期の相対価格をパラメターとみなすことで失う情報は何もない。もっとも、グループに属するすべての価格が完全に比例している、という仮定は非常に強く、簡単に棄却されてしまう。この、極端に非現実的と考えられていた定理は、Lewbel (1996)により再び注目されることになる。ここではcitetLewbel1996により一般化され、より現実的となった、Generalized Composite Commodity Theorem (GCCT)を紹介しよう。 $p_i : i$財の価格、$P_I : I$グループの財価格の価格指数、とし、

$$r_i = \ln p_i, R_I = \ln P_I$$
$$\rho_i = \ln \left(p_i / P_i \right) = r_i - R_I$$

すなわち、相対価格とする。また、$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}$をベクトルとする。また、$i$財価格の支出シェアは、 zを支出総額とすると、

$$w_i = g_i \left(\boldsymbol{r}, z \right) + e_i$$

と書けるとしよう。ただし、$g \left(\boldsymbol{r}, z \right)$は通常のマーシャルの需要関数から得られる$i$財の支出シェアであり、それに誤差項が付加されている。また、$E \left(e_i | \boldsymbol{r}, z \right) = 0$、すなわち、誤差項の平均はゼロとする。ここで、Lewbel (1996)は、需要関数が合理的な意思決定の下

で生成されており、かつ、ρがR,zから独立であると仮定する。Hicksの定理では、ρは一定と仮定されていたが、ここではρは一定である必要はなく、支出総額や一般物価から独立であると仮定されている。そこで、集合財需要を下記のように作成する。

$$G_I^*(\boldsymbol{r}, z) = \sum_{i \in I} g_i(\boldsymbol{r}, z)$$

定義する。すなわち、財グループに関する支出シェアの和である。ここで、

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}$$

と定義し、さらに、財グループの支出シェアの平均値、

$$G_I(\boldsymbol{R}, z) = \int G_I^*(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho}, z)\, dF(\boldsymbol{\rho})$$

と定義する。すると、$G_I(R, z)$は、グループを足し合わせる、すなわち、$I = 1, 2, 3.., M$を全て足し合わせると1になり、価格と所得に関するゼロ次同次性をみたす。さらに、異なる財グループ、IとJの間で、支出総額が変化したときの、I財への支出シェアの変化とJ財の支出シェアとの共分散、すなわち、

$$H_{IJ} = Cov\left[\frac{\partial G_I^*(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho}, z)}{\partial z}, G_J^*(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho}, z)\,|\boldsymbol{R}, z\right]$$

とし、H_{IJ}をIJ成分とする正方行列を$\boldsymbol{H}$とする。すると、$\boldsymbol{H}$が対称行列であることと、$G_I(\boldsymbol{R}, z)$がスルツキーの対称性を満たすこと、は同値となる。

この意味することは、グループ内の相対価格の変動がランダムであり、物価水準や所得と相関がない限り、グループへの総消費を一つの集合財とみなすことが可能である、ということである。これは非常に魅力的な理論であり、農業経済学、資源経済学等、様々な応用分野において近年頻繁に用いられている(Schulz et al. (2012)等)。

参考文献

Afriat, S. N., "The Construction of Utility Functions from Expenditure Data," *International Economic Review*, 1967, *8* (1), 67–77.

Barnett, William A. and Seungmook Choi, "A Monte Carlo Study of Tests of Blockwise Weak Separability," *Journal of Business & Economic Statistics*, 1989, *7* (3), 363–377.

Barten, A. P. and V. Böhm, "Consumer Theory," in Kenneth J. Arrow and Michael D. Intriligator, eds., *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. 2, North-Holland, 1982, pp. 381–429.

Blackorby, Charles, Daniel Primont, and R. Robert Russell, *Duality, Separability, and Functional Structure: Theory and Economic Applications*, North-Holland, 1978.

Blundell, Richard W., Martin Browning, and Ian A. Crawford, "Nonparametric Engel Curves and Revealed Preference," *Econometrica*, 2003, *71* (1), 205–240.

Cherchye, Laurens, Thomas Demuynck, and Bram De Rock, "Revealed Preference Tests for Weak Separability: An Integer Programming Approach," *Journal of Econometrics*, 2015, *186* (1), 129–141.

Deaton, Angus and John Muellbauer, *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge University Press, 1980.

Diewert, W. Erwin and Cecil Parkan, "Tests for the Consistency of Consumer Data," *Journal of Econometrics*, 1985, *30* (1–2), 127–147.

Fleissig, Adrian R. and Gerald A. Whitney, "A New PC-Based Test for Varian's Weak Separability Conditions," *Journal of Business & Economic Statistics*, 2003, *21* (1), 133–144.

Gorman, W. M., "Separable Utility and Aggregation," *Econometrica*, 1959, *27* (3), 469–481.

_ , "Two Stage Budgeting," 1971. Unpublished paper, Department of Economics, London School of Economics.

Hall, Robert E., "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence," *Journal of Political Economy*, 1978, *86* (6), 971–987.

Hendel, Igal and Aviv Nevo, "Measuring the Implications of Sales and Consumer Inventory Behavior," *Econometrica*, 2006, *74* (6), 1637–1673.

Hjertstrand, Per, "A Monte Carlo Study of the Necessary and Sufficient Conditions for Weak Separability," in "Measurement Error: Consequences, Applications and Solutions," Emerald Group Publishing, 2009, pp. 151–182.

_ , James L. Swofford, and Gerald A. Whitney, "Index Numbers and Revealed Preference Rankings," *Macroeconomic Dynamics*, 2021, *25* (1), 81–99.

Lewbel, Arthur, "Aggregation without Separability: A Generalized Composite Commodity Theorem," *American Economic Review*, 1996, *86* (3), 524–543.

McFadden, Daniel, "Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior," in Paul Zarembka, ed., *Frontiers in Econometrics*, New York: Academic Press, 1974, pp. 105–142.

Nayga, Rodolfo M. Jr. and Oral Jr. Capps, "Tests of Weak Separability in Disaggregated Meat Products," *American Journal of Agricultural Economics*, 1994, *76* (4), 800–808.

Pollak, Robert A., "Conditional Demand Functions and the Implications of Separable Utility," *Southern Economic Journal*, 1971, *37* (4), 423–433.

Schulz, Lee L., Ted C. Schroeder, and Tian Xia, "Studying composite demand using scanner data: the case of ground beef in the US," *Agricultural Economics*, 2012, *43*, 49–57.

Varian, Hal R., "The Nonparametric Approach to Demand Analysis," *Econometrica*, 1982, *50* (4), 945–973.

_ , "Non-parametric Tests of Consumer Behaviour," *The Review of Economic Studies*, 1983, *50* (1), 99–110.

佐藤秀保, "食料・飲料需要の財集計に関する研究," 農業経済研究, 2021, *93* (1), 17–22.