2007年度上級マクロ経済学講義ノート (2)
Solowの経済成長理論

阿部修人

1　経済成長モデル

経済成長モデル、特に Solow により展開されたモデルは現在のマクロ経済学の基本となっている。1950 年代から 60 年代にかけて、Solow を中心とし、Uzawa, Inada, Arrow, Cass, Koopmans 等により非常に多くの論文が発表されたが、それらの背後には Arrow や Debreu 達により定式化された一般均衡モデルを動学分析に拡張し、さらに政府はどのようにすれば経済成長・発展を促すことが可能か、という Academic, Policy 双方の強い Motivation があったと思われる。しかしながら 70 年代に入り、先進国の間で景気循環が大きな問題となると、経済成長理論に対する興味は急速に薄れた。1980 年代の代表的な上級レベルの教科書である Sargent の Macroeconomic Theory では経済成長についてほとんど語られていない。

現在では、大学院のみならず、学部レベルの教科書でも経済成長モデルが教科書の最初に置かれることは珍しくない。このような大きなシフトの背後には、マクロ経済現象、それが景気循環であれ経済成長であれ、動学一般均衡のフレームワークで語る必要がある、というコンセンサスが 80 年代から 90 年代にかけてマクロ経済学者の間で確立されたことがある。70 年代から 80 年代にかけて激しく行われた新古典派とケインジアンによる論争は、現在では、共通の一般均衡動学モデルにどのような新たな構造を入れるか否かの違いとなっている。より政策インプリケーションを重視する経済学者は最適化行動に制約を導入するような構造 (価格硬直性のような) を入れ、政策議論からは距離を置くものは最適化行動に対する制約を緩めるような構造を入れる傾向にある。しかしながら、両者とも、Solow により展開された動学モデルに基づいてモデル展開をしている点は共通である[1]。

Solow のモデルは様々なマクロモデルのベースとなっているが、オリジナルのモデルは、必ずしもそうしたベースとなることを意図していたというよりも、具体的な経済現象を説明するための最も単純化されたモデルは何か、という視点で作られている[2]。Stylized Facts をまず確立し、それを説明するための最少のモデ

[1] Hahn and Solow, (1995) *A Critical Essay on Modern Macroeconomic Theory*, MIT Press. で、Solow と Hahn は近年のマクロ経済学、特に実物的景気循環理論に対して極めて批判的な評価を与えている。同様に、のちの Lucas による合理的期待革命のベースモデルを作った Phelps も現在のマクロモデルに対して批判的な書 (Phelps, 1994, *Structural Slumps*, Harvad University Press) を書いており、現在のマクロ経済学のパラダイムを作り上げた学者たちがそろって批判的であることは興味深い。

[2] R.M.Solow (1970), *Growth Theory*, Oxford University Press. 日本語訳　福岡正夫「成長理

ルから開始する、という分析パラダイムは現在のマクロ経済学、特に実証的側面を重視するグループの間では標準的なものである。いたずらに複雑なモデルを作り、特殊な仮定から特殊な結論を導いてモデルと戯れる (モデルの構造を理解するには必要なことではあるが、それ自体が目的となっては本末転倒である) のではなく、拡張可能性を維持しながら最低限の制約を考えることは健全であり、後学にとり極めて有益である。

最適成長や市場均衡との関連は次の講義ノートで、新成長理論についてはその次で触れることにし、本講義ノートでは基本的な Solow のモデルを概観するにとどめる。

2　カルドアの定型化された事実 (Stylized Facts)

(1)　実質生産高は、およそ一定の率で成長する。
(2)　実質資本ストックは、労働力よりも高い率で成長する。
(3)　実質生産高と資本ストックの成長率はほぼ等しい。
(4)　資本収益率は成長しない。
(5)　一人当たり所得の成長率は国により差がある。
(6)　所得に占める利潤の率が高い経済では、投資・生産効率が高い。

3　Production Function

$$Y_t = F\left(K_t, A_t L_t\right)$$

新古典派生産技術:　一次同次

$$\forall c \geq 0, F\left(cK, cAL\right) = cF\left(K, AL\right)$$

なお、A は技術水準を示すパラメター。ここでは労働生産性を上昇させると仮定 (ハロッド中立的)。

Intensive Form:divide by AL,

$$\frac{Y}{AL} = \frac{F}{AL} = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right)$$

Define

$$y = \frac{Y}{AL}, k = \frac{K}{AL},$$

$$f\left(k\right) = F\left(\frac{K}{AL}, 1\right)$$

Then

$$y = f\left(k\right)$$

論」岩波書店　1971 年、は Solow 本人により書かれた極めて平易な成長理論の入門書である。エッセンスのみを抽出している教科書と異なり、資本の vintage や代替性等多くの議論を展開しており、いま読んでも面白い。

Assumption:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, F(0, AL) = 0 \text{ for all finite AL.}$$

Then

$$F(K, AL) = ALf\left(\frac{K}{AL}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = f'(k) > 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{f"(k)}{AL} < 0$$

$$F(0, AL) = f(0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = Af - \frac{ALK}{AL^2} f' = Af - A\frac{K}{AL} f' = A(f - kf')$$

3.1 Cobb-Douglas Case

$$F = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

Therefore

$$y = f(k) = k^{\alpha}$$

As long as $0 < \alpha < 1$

$$f' > 0, f'' < 0, f(0) = 0$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$$

4 Growth

Assume Constant Growth Rates for both L and A,

$$\dot{L}_t = nL_t$$

$$\dot{A}_t = gA_t$$

復習 (1)

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Log Differentiation

$$\frac{d\ln x_t}{dt} = \frac{1}{x_t}\frac{dx_t}{dt} : Growth\ Rate$$

復習 (2)

$$\frac{d\left(\frac{xy}{zw}\right)}{dt} = \left(\frac{xy}{zw}\right)\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{z}\frac{dz}{dt} - \frac{1}{w}\frac{dw}{dt}\right)$$

復習 (3)

$$\frac{d\left(x^a y^b\right)}{dt} = \left(x^a y^b\right)\left(\frac{a}{x}\frac{dx}{dt} + \frac{b}{y}\frac{dy}{dt}\right)$$

5 Economy

One-sector growth model
財市場の均衡条件 (総供給=総需要).

$$Y = C + I$$

Constant Rate of Depreciation

$$\dot{K_t} = I_t - \delta K_t$$

Therefore

$$Y_t = C_t + \dot{K_t} + \delta K_t$$

Assume Constant Average Saving Rate, s, i.e.

$$S = sY = sF\left(K_t, A_t L_t\right)$$

Therefore
(所得=消費+貯蓄)

$$Y_t = C_t + S_t = C_t + sY_t$$

$$Y_t - C_t = S_t = sY_t$$

Combining them

$$\dot{K_t} = sF\left(K_t, A_t L_t\right) - \delta K_t$$

Recall

$$k_t = \frac{K_t}{A_t L_t}$$

Taking time derivatives

$$\dot{k_t} = \frac{K_t}{A_t L_t}\left(\frac{\dot{K_t}}{K_t} - \frac{\dot{A_t}}{A_t} - \frac{\dot{L_t}}{L_t}\right)$$

$$\dot{k}_t = \frac{K_t}{A_t L_t}\left(\frac{\dot{K}_t}{K_t} - g - n\right)$$

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{A_t L_t} - k_t\left(g+n\right)$$

$$\dot{k}_t = \frac{sF\left(K_t, A_t L_t\right) - \delta K_t}{A_t L_t} - k_t\left(g+n\right)$$

$$\dot{k}_t = sf\left(k_t\right) - k_t\left(g+n+\delta\right)$$

6 Growth Rate

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{1}{F\left(K_t, A_t L_t\right)}\left(F_1 K_t \frac{\dot{K}_t}{K_t} + F_2 A_t L_t\left(\frac{\dot{L}_t}{L_t} + \frac{\dot{A}_t}{A_t}\right)\right)$$

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{1}{F\left(K_t, A_t L_t\right)}\left(F_1 K_t \frac{\dot{K}_t}{K_t} + F_2 A_t L_t\left(g+n\right)\right)$$

Due to the linear homogeneity

$$F\left(K_t, A_t L_t\right) = F_1 K_t + F_2 A_t L_t$$

Therefore

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \alpha_t \frac{\dot{K}_t}{K_t} + \left(1-\alpha_t\right)\left(g+n\right)$$

where

$$\frac{F_1 K_t}{F\left(K_t, A_t L_t\right)} = \alpha_t$$

7 Steady State

$$k^* : \dot{k}_t = sf\left(k_t\right) - k_t\left(g+n+\delta\right) = 0$$

Therefore

$$sf\left(k^*\right) = k^*\left(g+n+\delta\right)$$

Steady State exists:
Define

$$h\left(k\right) = sf\left(k\right) - k\left(g+n+\delta\right)$$

$$h' = sf' - (g + n + \delta)$$

Under Inada Condition,

$$\lim_{k\to\infty} f' = 0, \ \lim_{k\to 0} f' = \infty$$

Therefore

$$\lim_{k\to 0} h'(k) = \infty > 0, \ \lim_{k\to\infty} h'(k) = -(g + n + \delta) < 0$$

Also

$$h'' < 0, \forall k > 0$$

$$h(0) = 0$$

Therefore, there exist two steady states, trivial one and non-trivial one.

8 Balanced Growth Path

At the non-trivial stead state,

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{d(A_t L_t k_t)}{dt} \frac{1}{A_t L_t k_t} = g + n$$

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \alpha_t (g + n) + (1 - \alpha_t)(g + n) = g + n$$

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = g + n$$

Therefore, the growth rates of Capital, Output, and Consumption are the same at the steady state. We call this path as a balanced growth path.

We can observe several things. First, the balanced growth rate is just the sum of g and n that are independent from the saving rate or many other things. An increase in saving rate or technological level etc., do not affect the balanced growth rate. Second, the balanced growth rate depends only on the exogenous variables, g and n. This implies inability of the Solow's growth model to account for variations of the growth rates among countries even in the long-run. The theory can only say that two countries have different long-term growth paths just because they have different technological and population growth. There have been many attempts to extend Solow's model to "endogenize" the balanced growth rate.

9 Convergence

The steady state level is determined by

$$sf(k^*) = k^*(g+n+\delta)$$

Therefore, if two countries have the same technology, regardless of the initial development level, the two countries will reach the same steady state and the same growth rate. Moreover, since the growth rate is

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t} - (g+n+\delta)$$

and

$$\frac{d\frac{sf(k)}{k}}{sk} = \frac{s}{k}\left[f'(k) - \frac{f(k)}{k}\right] < 0$$

Since f is a concave function, the growth rate is a decreasing function of k. This implies that the poorer the country is, the faster it grows. This phenomena is called as absolute convergence.

The above condition is a king of strong since we have to assume that the two countries have the same technology. Remember that the balanced growth rate does not depend on the technology as long as it is neoclassical one. The smaller the economy relative to its own steady state, the faster it grows. This is called as conditional convergence.

10 Comparative Statics

On the balanced growth path, the output level is

$$y^* = f(k^*)$$

If the saving rate, s, increases, on the new balanced growth path

$$\frac{dy^*}{ds} = f'(k^*)\frac{dk^*}{ds}$$

k^* is determined by

$$sf(k^*) - k^*(g+n+\delta) = 0$$

By implicit function theorem, we can get

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{f(k^*)}{(g+n+\delta) - sf'(k^*)}$$

Therefore,

$$\frac{dy^*}{ds} = \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(g+n+\delta) - sf'(k^*)}$$

By some calculations,

$$\begin{aligned}\frac{s}{y^*}\frac{dy^*}{ds} &= \left(\frac{s}{f(k^*)}\right)\frac{f'(k^*)\,f(k^*)}{(g+n+\delta)-sf'(k^*)}\\ &= \left(\frac{s}{f(k^*)}\right)\frac{f'(k^*)}{\frac{sf(k^*)}{k^*}-sf'(k^*)}\\ &= \frac{\frac{k^*f'(k^*)}{f(k^*)}}{1-\frac{k^*f'(k^*)}{f(k^*)}}\end{aligned}$$

Define

$$\alpha_k(k^*) = \frac{k^*f'(k^*)}{f(k^*)}$$

Then,

$$\frac{s}{y^*}\frac{dy^*}{ds} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$$

$\alpha_k(k^*)$ is the capital share of the economy, usually around 1/3. In this case

$$\frac{s}{y^*}\frac{dy^*}{ds} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

This implies 10 % increase in saving rate increases the steady state level of the output by 5%. Very Modest in the long run.

11 The Speed of Convergence

The dynamic equation

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - k_t(g+n+\delta)$$

is non-linear. But if $f(k_t)$ is differentiable, we can approximate the above equation by linear equation. Taking the linear approximation at the steady state, we can get

$$\dot{k}_t = (sf'(k^*) - (g+n+\delta))(k_t - k^*)$$

$$sf'(k^*) - (g+n+\delta) = (g+n+\delta)\left(\frac{f'k}{f} - 1\right)$$

Therefore

$$\dot{k}_t = -(1-a_k)(g+n+\delta)(k_t-k^*)$$

$$k_t = k^* + \exp\left[-\left(1-a_k\right)\left(g+n+\delta\right)t\right]\left(k_0 - k^*\right)$$

The speed of convergence is $-\left(1-a_k\right)\left(g+n+\delta\right)$. if $g+n+\delta$ is 0.06 and the capital share is 1/3, the speed becomes 0.04. This speed, 4% per year is very slow. Suppose the economy is at the half of its steady state level, i.e.,

$$k_0 = \frac{k^*}{2}$$

Then, how long does it take to reach 3/4 of the steady state level? Find t such that

$$k_t = k^* + \exp\left[-\left(1-a_k\right)\left(g+n+\delta\right)t\right]\left(\frac{k^*}{2} - k^*\right) = \frac{3k^*}{4}$$

Eliminating k^* and rearranging the equation a bit gives us

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2}e^{-0.04t}$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = -0.69315 = 0.04t$$

Therefore, approximately, it takes 17-18 years to reach the halfway to their balanced growth path.

12 Growth Accounting

The output level is

$$Y_t = F\left(K_t, L_t, A_t\right)$$

Taking the time derivative,

$$\dot{Y}_t = \frac{\partial F}{\partial K}\dot{K}_t + \frac{\partial F}{\partial L}\dot{L}_t + \frac{\partial F}{\partial A}\dot{A}_t$$

Divide by Y,

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{K_t}{F}\frac{\partial F}{\partial K}\frac{\dot{K}_t}{K_t} + \frac{L_t}{F}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{\dot{L}_t}{L_t} + \frac{A_t}{F}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

Assume that the technology is linear homogenous in terms of K and L, and define

$$R_t = \frac{A_t}{F}\frac{\partial F}{\partial A}\frac{\dot{A}_t}{A_t}$$

Then,

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \alpha_k\frac{\dot{K}_t}{K_t} + \left(1-\alpha_k\right)\frac{\dot{L}_t}{L_t} + R_t$$

Remember that the above equation depends only on the linear homogeneity of the technology (and differentiability) in derivations. The growth rate of output is decomposed into (1) contribution by capital, (2) contribution by labor, and (3) else. The term R_t is called "Solow Residual", this implies the factor that cannot by explained by the Solow's Growth model.