

# 2017年度上級マクロ経済学講義ノート： 基本的世代重複モデル

阿部修人

一橋大学経済研究所

平成 29 年 5 月 24 日

## 1 導入部

本講義でカバーする世代重複モデルには異質 (heterogenous) な家計が登場する。Heterogeneous というのは耳慣れない言葉かもしれないが、その反対語は homogeneous であり、こちらは頻繁に経済学に登場する用語である。Heterogenous agent model とは、異質な家計、すなわち、ある種の属性において、異なる家計が存在するモデルである。異なる点はモデルにより様々である。たとえば、Bewley<sup>1</sup>による不完備資本市場のモデルには、家計は ex ante には同質であるが、その所得は家計別の確率変数、すなわちサイコロの出た目に依存しており、その実現値は家計により異なり、時間が進むと家計間で所得や資産に格差が生じる。事前の能力や資産が同一の家計間でどのようにして格差が拡大していくかを議論するためのベンチマークモデルとなっている。本講義ノートで議論する世代重複モデル (The Overlapping-Generations Models: OLG) は、その年齢、ライフサイクルステージが異なる家計が登場する。非常に単純なものから複雑なものまで様々な OLG モデルが提案されているが、いずれも、無限に生きる代表的個人のモデルでは分析できないマクロ現象、価値保存手段としての貨幣の役割、人口構成の変化や国債の負担転嫁、等を分析する上で非常に重要な役割を果たしている。

OLG モデルは、Allais (1947)<sup>2</sup>が最初に発案し、その後 Samuelson (1958)<sup>3</sup>が不換紙幣の機能を描写するモデルとして発表した。その後、多くの研究の蓄積が進み、現在、OLG モデルはマクロ経済学において、Solow や Ramsey と並

---

<sup>1</sup>Bewley, T. (1977): "The permanent income hypothesis: A theoretical formulation," *Journal of Economic Theory*, 16(2), 252-92.

Bewley, T. (1983): "A difficulty with the optimum quantity of money," *Econometrica*, 51(5), 1485-504.

<sup>2</sup>Allais, M. [1947], *Economie et Intret*, Imprimerie Nationale, Paris. (私は読んだことないです ...)

<sup>3</sup>Samuelson, Paul A. 1958. "An Exact Consumption-Loan Model of Interest With or Without the Social Contrivance of Money." *Journal of Political Economy*, 66(6): 467-82.

が、もっとも重要な基本モデルの一つとなっている。現在主流となる OLG モデルは Samuelson による交換経済における貨幣のモデルではなく、Diamond (1965)<sup>4</sup>による OLG と経済成長の融合モデルである。この Diamond モデルにより、経済成長モデルに公債や社会保障等、無限視野の最適成長モデルでは十分に扱うことのできない様々な要素を取り入れることが可能となったのである。特に、Barro (1974)<sup>5</sup>による論文は、Diamond と Ramsey の橋渡しを行い、公債・年金の負担に関する現在のマクロ経済分析におけるベンチマークモデルとして、大きな影響を与えている。

OLG モデルは異なる世代間の資源配分を分析する上で極めて有用なモデルであるが、研究上の基盤モデルとして考えると、通常の Ramsey モデルと大きく異なる性格を持っている。それは、市場均衡はパレート効率的とならず、厚生経済学の第一、第二基本定理が成立しないのである。また、一般的な仮定の下では市場均衡はユニークにならず、無数の均衡が発生してしまうことも知られている。単純な設定下で生じる貯蓄・消費パターンは Ramsey よりも Solow モデルのものに近く、資本ストックは過剰に蓄積され動学的非効率性 ( $g > r!$ ) が生じたりもする。このような、標準的な Ramsey モデルでは生じないような OLG モデルの性質は、多くの数理経済学者に刺激を与えた。Gale (1973)<sup>6</sup>、Azariadis (1981)<sup>7</sup>、Kehoe and Levin (1985)<sup>8</sup>、Spear et al. (1990)<sup>9</sup>、Geanakoplos (1987)<sup>10</sup>、Farmer (1999)<sup>11</sup>がこの分野の代表である<sup>12</sup>。換言すれば、OLG モデルは、注意深く作らないと、均衡がユニークに決定されず、税率変更などの比較静学を分析する上で大きな問題が生じることもある。OLG モデルの数学的性質を正しく理解することは、マクロモデルを構築する上でも重要である。

OLG モデルの分析ではマクロ経済学や数理経済学におけるものの他に、財政学者による研究がある。Auerbach and Kotlikoff (1987)<sup>13</sup>に代表される一

<sup>4</sup>Diamond, Peter. 1965. "National Debt in a Neoclassical Growth Model." *American Economic Review*, 55(5): 1126-50

<sup>5</sup>Barro, Robert. 1974. "Are Government Bonds Net Wealth?" *Journal of Political Economy*, 81(6): 1095-1117.

<sup>6</sup>Gale, David. 1973. "Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models." *Journal of Economic Theory*, 6(1): 12-36.

<sup>7</sup>Azariadis, Costas, (1981), Self-fulfilling prophecies, *Journal of Economic Theory*, 25, issue 3, p. 380-396.

<sup>8</sup>Kehoe, T. J. and D. K. Levine. 1985. "Comparative Statics and Perfect Foresights in Infinite Horizon Models," *Econometrica* 53: 433-453.

<sup>9</sup>Spear, Stephen E. & Srivastava, Sanjay, & Woodford, Michael, (1990) Indeterminacy of stationary equilibrium in stochastic overlapping generations models," *Journal of Economic Theory*, Elsevier, vol. 50(2), pages 265-284, April.

<sup>10</sup>Geanakoplos, John. 1987. "The Overlapping Generations Model of General Equilibrium." In *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, vol. 1, ed. Peter Newman, Murray Milgate, and John Eatwell, 767-79. Palgrave Macmillan.

<sup>11</sup>Roger Farmer (1999) *Macroeconomics of Self-fulfilling Prophecies*, second edition, MIT Press

<sup>12</sup>近年でも多くの論文が発表されている。Feng and Hoelle (2017) 等。Zhigang Feng & Matthew Hoelle, (2017)."Indeterminacy in stochastic overlapping generations models: real effects in the long run," *Economic Theory*, Springer; vol. 63(2), pages 559-585, February.

<sup>13</sup>Alan J. Auerbach, Laurence J. Kotlikoff (1987) *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge

連の分析は「世代会計」と呼ばれ、若年層や老年層、将来世代の厚生を分析するものである。これは、世代重複モデルをベースに、政府の国債、年金債務と税負担の関係を各世代別に推計し、たとえば現役世代に比して将来世代がどの程度租税負担が多くなるか、等を試算するものであり、実務的な性質を色濃く有するものである。日本における麻生・吉田(1996)<sup>14</sup>等、この世代会計は各国で行われており、特に人口構成の変化や政府の財政の将来計画などの重要性を分析する際に多用されている。マクロ経済政策と長期経済成長にとり、世代会計分析は極めて重要な分野ではあるが、Acemoglu の教科書では全くカバーされておらず、Ljungqvist and Sargent でもほとんど触れられていない。

なお、1990年代前半のアメリカの大学院教育では、世代重複モデルは現在よりもはるかに重要視されており、McCandless and Wallace (1993)<sup>15</sup>やAzariadis (1993) など、Ramsey や RBC ではなく世代重複モデルを中心に様々なマクロ現象を記述するような上級の教科書が出版されていた。一方、現代の標準的な教科書である Romer や Acemoglu, Ljungqvist and Sargent、および古典的な Blanchard and Fisher (1989) や Sargent (1989) では、OLG はあくまでもマクロモデルの応用編の一つ(とはいえとても重要な)という扱いに過ぎない。現在では、OLG を基本モデルとする大学院用マクロ経済学の授業はほとんどなくなっている。21世紀に入り、マクロ経済学は定性的分析から定量的分析にその視点を急速に移している。すなわち、均衡があるか否か、効率的か否か、というよりも、その均衡での様々な経済諸変数の動きの「大きさ」に注目が集まり、かつそのモデルと経済データとの統計的な整合性が重視されるようになってきているのである。モデルは現実経済に合うように設計(カリブレート)されねばならないという意識が強まっている。その点、OLG モデルは、いざ現実の経済と合うように設計すると、非常に複雑となり均衡を計算するには大量の計算が必要となる。単純な OLG モデルでは若年層と老年層の二種類の家計のみが存在するが、そのようなモデルでは一期の長さは30-40年であり、景気循環分析はおろか、経済成長を描写する上でも長すぎるかもしれない。そして、一期を一年とすると、無数の異質な家計を導入せねばならず、高次元の非線形方程式を解くことになる。無論、Auerbach and Kotlikoff (1987) のように、現実のデータと一致させることを目的とした OLG モデルも構築されているが、あくまで長期的な分析が目的であり、短期・中期の経済変動を分析することは念頭に置かれていなかった。無限視野の完備市場モデルである RBC や DSGE に比べ、世代重複モデルは非常に分析が複雑となる。しかしながら、分析上の困難さがあるとしても、無限視野という Ramsey モデルの仮定は非常に極端な仮定であり、OLG モ

---

University Press

<sup>14</sup>麻生良文・吉田浩(1996)「世代会計からみた世代別の受益と負担」『フィナンシャル・レビュー』第39号, pp.1-31.

<sup>15</sup>George T. McCandless, Neil Wallace (1998) *Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press.

G5					young	
G4				young	old	
G3			young	old		
G2		young	old			
G1	young	old				
G0	old					
	1	2	3	4	5	

デルでないといとも分析不可能な現象は多い。特に、日本のみならず、各国で高齢化が急速に進展しているが、そのような高齢化が景気循環や経済成長、政策効果に全く影響を与えないとする今までの仮定を説得力にかけると考えるものは少ないだろう。その検証には、OLGモデルを景気循環分析に利用できる程度に現実的なものにせねばならない。そのような試みは行われつつあるが、いまだ、多くの仮定が必要とされており、現在のマクロ動学分析のフロンティアの一つとなっている<sup>16</sup>。

## 2 基本モデル (2 期間交換モデル)

本セクションでは、もっとも単純な交換経済における 2 期間 OLG モデルを用い、OLG モデルにおける市場均衡とパレート効率性について議論する。

この経済には、加算無限個の数だけいる家計が存在すると仮定する<sup>17</sup>。家計の数はゼロを含む自然数の個数と同じ、すなわち家計の集合を  $I$ 、家計の id を  $i \in I$  とすると、ゼロを含む自然数の集合  $N$  から  $I$  への一対一対応を作ることが可能である。ここでは、経済は第 1 期から開始され、家計 id はゼロ ( $G_0$ ) から、 $G_1, G_2, G_3, G_4, \dots$  と無限に続いていくと仮定しよう。

家計  $G_0$  は第 1 期のみが高齢者として生息する (高齢者として誕生する)。次の世代、 $G_1$  は第 1 期に若年層として生まれ、第 2 期には老年者となり 2 期間生存し、第 3 期が到来する前に死亡 (モデルから消滅) する。 $G_2$  は第 2 期に生まれ、同じく 2 期間生存し、第 4 期が到来する前に死亡する。この経

<sup>16</sup>最近の OLG モデルの数量的分析としては、Nishiyama and Smetters, (2007) “Does Social Security Privatization Produce Efficiency Gains?,” *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 122(4), pages 1677-1719. や Storesletten, Telmer, and Yaron (2007) “Asset Price with Idiosyncratic Risk and Overlapping Generations,” *Review of Economic Dynamics*, 10, 4, 519-548. がある。

<sup>17</sup>無限を考えると、加算無限と非加算無限 (連続) の区別は非常に重要である。この概念に初めて出会うものは、集合・位相論の入門書に一度は目を通すことをお勧めする。経済学では、複数均衡を議論する時にこの区別が重要な役割を果たす。

済には生産はなく、各家計は生まれながらに資源を保有しており、商品の取引市場が存在すると仮定する。

この経済の若年層の消費決定問題を考えよう。 $t$  期に生まれた家計の最適化問題は

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c_t^t + c_{t+1}^t \\ \text{s.t.} \quad & b_t \leq p_t (\omega^0 - c_t^t), \\ & p_{t+1} c_{t+1}^t \leq p_{t+1} \omega^1 + b_t. \end{aligned}$$

ただし、 $c_j^i$  は、第  $i$  期に生まれた家計の  $j$  期における消費、 $\omega^0, \omega^1$  は若年、老年各期における初期資源賦存量、 $p_t$  は  $t$  期における消費財価格、 $b_t$  は貨幣であり、この経済では貯蓄に相当する。

同様に、老年層 (世代 G0) の問題を考えると

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & U(c_1^0) \\ \text{s.t.} \quad & p_1 (c_1^0 - \omega^1) \leq b_0. \end{aligned}$$

となる。

この経済における均衡は初期賦存量のパターン次第で大きく異なるものになる。

## 2.1 Samuelson Case

初期賦存量が、すべて若年期に集中しており、 $i > 0$  の家計は、初期賦存量はすべて  $(\omega^0, \omega^1) = (1, 0)$  であり、 $i = 0$ 、すなわち G0 家計の初期賦存量はゼロであると仮定する。また、 $b_0$  もゼロであるとする。Gale (1973) は、このタイプのモデルを、初期の貢献に敬意を表し、Samuelson 型と名付けている<sup>18</sup>。この経済における市場均衡では、価格はすべて  $1(p_t = 1)$  であり、市場取引は行われず、各家計は初期賦存量をそのまま消費する ( $b_t = 0$ )、自給自足 (Autarky) 経済となる。

まず、G0 は初期賦存量をもたないため、消費を一切行うことができない。したがって、 $c_1^0 = 0$  である。G1 は、二期目の消費を確保するため貯蓄をすることが可能であるが、効用関数が線形であるため、金利が 1 の時に来期に消費を持ち越すインセンティブがない。負債を発行しようとしても、二期目に初期賦存が存在しないため、負債を返済することができない。したがって、G1 は、取引を行わず、自分の初期賦存量のみを消費することが最適となる。1 期以降の家計すべて、G2, G3, G4, ... は G1 と同じ消費を行う。

<sup>18</sup>オリジナルの Samuelson (1958) モデルは三期間モデルであり、もう少し複雑なものになっている。マクロ経済学を専門とするなら、一度は目を通す価値がある古典論文である。

この市場均衡は、パレート効率的ではない。政府が、G1の初期賦存量の半分を強制的にG0に渡し、G2はその半分のG1に渡す、ということを無限に繰り返すと、G0の厚生は確実に改善し、一方他の家計の厚生は不変とすることが可能である。したがって、競争均衡はパレート改善可能であり、厚生経済学の第一基本定理が成立していない。このような強制的資源配分を考えなくとも、政府がG0世代に貨幣を1/2だけ配分するという政策を考えると、上記同様の資源配分を競争均衡で実現することができる。Samuelson型のOLGモデルでは、貨幣を第ゼロ世代に配分(未来永劫、家計がその貨幣価値を信じる限り)することで、効率的な資源配分に誘導することが可能である。OLGは不換紙幣(Fiat Money)のモデルとなるのである。

この経済に終末期を設定し、最後の世代は若年層しかいないと仮定しよう。すると、その若年層は自分の保有する初期賦存量の消費財を老年層の保有する貨幣と交換(購入)するインセンティブがない。なぜなら、彼らは老年期にならないためである。したがって、最後の期の老年層は貨幣を使うことができない。これは、貨幣価値がゼロになることを意味する。貨幣価値がゼロになることがわかっている老年層は、若年層に貨幣を保有しようとは思わないであろう。このロジックを続けていくと、初期時点でも貨幣の価値はゼロとなり、この経済に貨幣が存在する意味がなくなってしまう。貨幣そのものが効用や生産に貢献しない、価値の貯蔵手段としてのfiat moneyは、経済が無限に存続すると仮定しないと、正の価値をもたなくなる。経済が無限期間存続する、という仮定が非常に重要な意味を有していることに注意する必要がある。

次に、政府がG0世代に貨幣 $b_0$ を1/2配分し、そのかわり貨幣の価格 $R$ が市場で決定される市場均衡を考えてみよう。Samuelson型では貨幣の価格は1で固定されていたが、ここで、貨幣の価格が0、すなわち、誰も貨幣に価値を見出さないケースを考えると、自給自足経済が市場均衡となる。皆が貨幣に価値があると信じると、貨幣価格1が均衡となる。このように、Samuelson型の経済には複数の市場均衡が生じうる。

## 2.2 Classical Case

今度は、初期賦存量がすべて老年期に集中しており、 $i > 0$ の家計は、初期賦存量はすべて $(\omega^0, \omega^1) = (0, 1)$ であり、 $i = 0$ 、すなわちG0家計の初期賦存量は1と仮定しよう。これは、Gale(1973)が新古典派型と呼ぶ経済である。ここでも、各経済主体が交換を行わず、初期賦存量をそのまま消費する資源配分が競争均衡となる。Samuelson型と同様に、しかし逆方向に、 $i = 0$ 世代から1/2の消費財をG1世代、G2世代と順送りに再配分し、各 $i > 0$ 家計の所得を $(0, 1)$ から $(1/2, 1/2)$ に変換するような強制的資源再配分を考えると、G0世代の厚生は低下してしまい、パレート改善にはならない。このタ

タイプの経済では、自給自足均衡がパレート効率的となっている。

### 2.3 非効率性の起源

この市場には外部性や公共財は存在しないし、独占や課税による歪みも存在しない。競争市場は効率的である、という厚生経済学の基本定理が成立していてもおかしくないはずである。なぜ、OLG モデルでは厚生経済学の基本定理が成立しないのであろうか？この鍵は厚生経済学の第一基本定理の証明のステップを追いかけることで明らかとなる。標準的なミクロ経済学の教科書での証明を振り返ってみよう。財が  $N$  個で  $I$  の家計が存在する交換経済の場合、市場均衡  $(x, p)$  がパレート効率的ではなく、パレート改善可能な配分  $x'$  があるとすると、市場均衡よりも厳密に厚生が改善する家計  $i$  にとり、価格  $p$  の下では  $x'_i$  は実現不可能であるため、 $px'_i > px_i$  であり、これを全ての家計について足し合わせると、 $x'$  の総和が経済の資源賦存量を上回ってしまい矛盾となり証明が終わる。ここで、もしも財の種類が無限に存在する場合は、価格に関する追加の条件が必要となる。各財の経済全体の資源賦存量が 1 とすると、 $\sum_i \sum_n p_n x_{i,n} < \infty$ 、すなわち、市場均衡において、経済全体の価値が有限である場合に、競争均衡はパレート効率的となる。この条件は、基本定理の証明の最後のステップで、大小関係を確保するために必要となる。ただし、これは十分条件であり、必要条件ではないことに注意する必要がある。さて、上記の Samuelson 型の場合、価格は 1 であり、商品も家計も共に無限に存在する。この場合、経済価値の総和は無限となり、十分条件が満たされないのである。そして、将来世代から少し資源を老年層に移動させる、という操作が無限回可能となり、誰も損をしない、パレート改善が可能となる。

### 2.4 OLG と複数均衡

OLG モデルの市場均衡がユニークに定まらず、複数発生しうるのはかなり早い段階から知られていた。そもそも、数理経済学の古典である Debreu(1959) の *Theory of Value* の中でも、市場均衡の一意性は通常は確保されず、複数均衡が生じる可能性が指摘されていたが、Samuelson (1958) のモデルで生じる複数均衡は、標準的な Debreu 流の静学モデルで生じる複数均衡と異なり、indeterminacy、不決定と呼ばれるものが含まれている。大雑把に説明すると、市場均衡が複数あるとき、その市場均衡で集合を作ると、その集合が離散になる場合と連続になる場合があり、後者が不決定である。例えば、無差別曲線と予算制約の関係を考えてみよう。複数均衡のケースでは、両者が接する点が複数存在することになる。前者、すなわち離散 (determinate) の場合の複数均衡では、一か所で接した後、無差別曲線が屈曲し、もう一度、一か所で接することになる。後者、すなわち連続的 (indeterminate) の場合

は、ある範囲で無差別曲線と予算制約がべったりと接しており、最適消費計画はある範囲内で連続的な集合となる。離散の場合、一つの均衡の近傍では均衡はユニークとなっている。すなわち、市場均衡は locally unique である。しかしながら、後者の場合、各均衡のどのような近傍をとっても、他の均衡を見つけることができる。均衡が locally unique でないとき、均衡は locally indeterminate と言う。市場均衡が local uniqueness を有するような経済は regular economy と呼ばれる。標準的な経済モデル(有限個の財、有限人数の家計、凸の選好、生産技術、完備市場)においては選好や初期賦存量がごく例外的なケース(無差別曲線の傾きが予算制約と完全に一致するような)を除き、regular economy となることが知られている<sup>19</sup>。標準的な仮定に従う限り、連続的な市場均衡が生じる確率(measure)はほぼゼロとなっているのである。しかしながら、OLG モデルでは、そのような仮定をせずに、ごく一般的に連続的な市場均衡、indeterminacy が発生する。Geanakoplos (1987) が整理した結果をここで紹介しよう。原則は、価格の数と均衡方程式の数の比較となる。一般に、方程式の数と未知変数の数が一致すれば、解はユニークに定まる(かもしれない)。方程式の数よりも多くの未知変数があれば、その方程式体系では均衡を unique に決めることができない。市場均衡ではワルラス法則があるため、未知変数の数に対し、方程式の数はそれよりも一つ少ない値で市場均衡は unique に定まるはずである。さて、OLG モデルでは、財の数は、たとえ各期で取引される商品が一種類であっても、一期との消費と二期の消費は異なるものであるため、期の数だけ、すなわち無限種類の商品が存在することになる。そして、各商品への超過需要関数もまた無限に存在する。したがって、無限と無限の比較となるが、Geanakoplos(1987) は、各家計が二期間生きる OLG モデルで、初期時点(ゼロ時点)が存在し、各時点で取引される商品が  $L$  種類るとき、超過需要関数と未知変数の数の比率をとると、 $L$  になることを示した。これは、一つの超過需要関数に対し、 $L$  個の未知変数が存在することになる。ワルラス法則を考えれば、 $L-1$  の過剰な未知変数が存在することを意味する。もしも、経済に初期時点がなく、最初期もまた無限にさかのぼることが可能であれば、未知変数の割合は  $2L$  個となる。これは、特にパラメーターや初期賦存量の配分に依存することなく、非常に一般的に発生する。また、二期間ではなく、三期間家計が生きる場合は、初期時点がある場合でも、超過需要関数に比して、 $2L-1$  もの未知変数が存在する<sup>20</sup>。均衡が locally unique であれば、分析の際に均衡周辺のみに注目する限り大きな問題は生じない。しかし、均衡が indeterminate の場合、市場均衡という概念だけでは経済の資源配分が決定されず、経済モデルを用いた分析に大きな制約が生じてしまう。Geanakoplos (1987) の結果は、OLG モデ

<sup>19</sup>証明は骨が折れるが、興味があるものは、Mas-Colell (1995) の p.596 を見よ。

<sup>20</sup>最近の展開に興味のあるものは、Feng and Hoelloe (2015) "Indeterminacy in Stochastic Overlapping Generations Models: Real Effects in the Long Run" とそこで引用されている文献を参照せよ

ルを厳密に考えると、経済モデルに深刻な不都合が生じることを示している。

## 2.5 経済学における「無限」の仮定

無限視野および無限数の消費財というのは、明らかに現実の経済には存在しない、モデル化に伴う単純化の産物である。家計に関しても、未来永劫に人類が存在し続けると考えるのも無理がある。一方、数学的には、無限先まで考えるメリットは大きい。積分の場合、広義積分に横断条件を組み合わせれば予算制約は非常に単純になる。また、産業組織論や不完全競争、立地論などの研究では、家計が  $[0,1]$  区間や円周上に連続的に存在すると仮定されるが、その場合のマクロ経済の描写は単純な積分となり描写が容易になる。また、Samuelson モデルで示したように、不換紙幣の存在価値は、経済がある時点で終了すると仮定するとゼロになってしまうなど、有限期間だと生じない重要な性質が無限期間にすることで生じることもある。数学的には、無限という仮定は非常に魅力的なのである。では、世代重複モデルにおける複数均衡や indeterminacy、非効率性の起源としての無限化の仮定は、どれだけ重要なのだろうか? 世代重複モデルを用いて、世代会計分析を等の定量的分析を行っている Kotolickoff 等は、経済の終端点を仮定することで無限の仮定に伴う問題を避けている。また、分析対象の均衡を、Good Behavior のものに限定することで回避するものもある。Balasko-Shell の基準と呼ばれる仮定、

$$\sum_{t=1}^{\infty} \prod_{s=1}^t (1 + r_s) = +\infty,$$

すなわち、均衡利率は低すぎない、ということを経済条件に課すことで、単純な一財、二期間モデルに限って、複数均衡等の様々な問題を回避可能である。この詳細は非常にテクニカルなので、興味あるものは、Krueger and Kubler (2006)<sup>21</sup>および、Ljungqvist and Sargent (2012) の第九章。また、一財モデルに限定する限り、Geanakoplos の指摘する Indeterminacy 問題も回避可能である。しかし、複数財の存在を仮定し、世代間の取引を導入すると、途端にモデルは複雑となり、静学モデルでは生じない様々な問題が生じる可能性が高い。無限という仮定は単純化のために設定しているはずであり、その仮定によりモデル分析が困難になるのでは本末転倒とみなすことも可能である。この場合、極力、有限期間で成立する均衡に近い状態のみを分析することが望ましい。OLG を含むか含まないかによらず、数値マクロ分析のほとんどは、均衡の非存在や複数性を回避している。そもそも、現在のコンピューターでは無限という数値を扱うことができないので、有限で近似せざるを得ないという事情もあるが、Geanakoplos や Farmer、Keohe 達の数理経済学のスタンスと数値マクロのスタンスの違いが明確になっている。

<sup>21</sup>Dirk Krueger and Felix Kubler (2006) "Pareto-Improving Social Security Reform when Financial Markets are Incomplete!?" *American Economic Review*, vol. 96, no. 3, June, (pp. 737-755)

### 3 Diamond (1965) モデル: 新古典派成長モデルと OLG モデルの統合

本節では、Samuelson 型の二期間モデルに資本ストックと生産を導入した Diamond (1965) モデルを紹介する。

各期に若年、老年の二種類の家計が存在し、効用関数は共通で

$$U(c_t^y, c_{t+1}^o) = u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o), \beta > 0, u' > 0, u'' < 0,$$

とする。人口は一定率で成長し

$$L_t = (1+n)^t L_0,$$

である。なお、家計が労働を供給できるのは若年期だけであり、労働供給は非弾力的に行われると仮定する。生産は新古典派型生産関数により行われ、

$$Y_t = F(K_t, L_t).$$

さらに、簡単化のため、ここでは減価償却は完全 (100%) であると仮定する<sup>22</sup>。

Intensive form で描写すると、 $k = K/L$  であり、Solow モデルと同様に要素価格は下記のように描写可能である。

$$1 + r_t = f'(k_t),$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t),$$

$$\text{where } f(k) \equiv F(k, 1).$$

家計の最適化問題は下記のように定式化される。

$$\text{Max } u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o)$$

$$\text{s.t. } c_t^y + s_t \leq w_t,$$

$$c_{t+1}^o \leq (1+r_{t+1}) s_t.$$

なお、家計は若年期において資産ゼロであり、賃金を得て、それを消費と貯蓄に振り分けていることに注意せよ。また、若年期は貯蓄するが、それが資本として運用されるのは老年期になってからである。Time Line を整理すると家計の視点で整理すると、(1) 若年層が経済に誕生、(2) 若年層が労働を供給、その時に存在している資本ストック (老年層の保有する貯蓄) とともに

<sup>22</sup>二期間モデルでは一期が 30 年から 40 年近い長さであることに注意せよ。

生産活動に利用、(3) 賃金を得て消費と貯蓄に配分、(4) 貯蓄を資本ストックとして企業に貸し出し、(5) 第二期に自分は老年期に入り、利子を得る、(6) 貯蓄とその収益から老年期の消費を賄う、となる。

各期の効用関数が強く増加関数であるため、予算制約の中の不等号は無視することが可能であり、一階条件は

$$u'(c_t^y) = \beta(1+r_{t+1})u'(c_{t+1}^o).$$

これは、新古典派成長モデルにおけるオイラー方程式と同じである。上記の式と予算制約式から、貯蓄関数を陰関数で定義することが可能であり、

$$s_t = s(w_t, r_{t+1}).$$

ところで、

$$\begin{aligned} c_t^y &= w_t - s_t \\ c_{t+1}^o &= (1+r_{t+1})s_t \\ 0 &= \beta(1+r_{t+1})u'((1+r_{t+1})s_t) - u'(w_t - s_t). \end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{ds_t}{dw_t} = \frac{u^{y''}}{\beta(1+r_{t+1})^2 u^{o''} + u^{y''}}.$$

これは、

$$0 < \frac{ds_t}{dw_t} < 1.$$

を意味する。すなわち、貯蓄は賃金の増加関数であり、限界貯蓄性向は1より低くなる。しかしながら、

$$\frac{ds_t}{dr_{t+1}} = \frac{\beta u^{y'} + \beta(1+r_{t+1})s_t u^{y''}}{\beta(1+r_{t+1})^2 u^{o''} + u^{y''}}$$

となり、この符号は関数系やパラメーターの値に依存する。

経済全体の資本ストックは

$$K_{t+1} = S_t = L_t s_t,$$

したがって

$$K_{t+1} = L_t s(w_t, r_{t+1}).$$

Intensive form で描くと

$$k_{t+1} = \frac{s(w_t, r_{t+1})}{1+n}.$$

要素価格の均衡条件を代入すると

$$k_{t+1} = \frac{s(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}))}{1+n}.$$

定常状態では

$$k^* = \frac{s(f(k^*) - k^*f'(k^*), f'(k^*))}{1+n}.$$

貯蓄関数の形状次第で、この経済のダイナミクスは様々なケースとなる。もっとも単純なケースとして、対数効用を考えてみよう。すなわち、

$$U(c_t^y, c_{t+1}^o) = \ln(c_t^y) + \beta \ln(c_{t+1}^o).$$

これは、効用関数がコブ・ダグラス型と仮定していることと等しい。コブ・ダグラス型では金利変化に付随する所得効果と代替効果が完全に打ち消しあい、貯蓄関数が非常に単純となる。具体的には、一階条件は

$$\frac{1}{c_t^y} = \beta(1+r_{t+1}) \frac{1}{c_{t+1}^o}.$$

予算制約より

$$\begin{aligned} c_t^y + s_t &= w_t \\ s_t &= w_t - c_{t+1}^o / (\beta(1+r_{t+1})) \\ c_{t+1}^o &= (1+r_{t+1})s_t \\ s_t &= w_t - (1+r_{t+1})s_t / (\beta(1+r_{t+1})) \\ &= w_t - s_t / \beta \\ s_t(1+1/\beta) &= s_t \left( \frac{\beta+1}{\beta} \right) = w_t \\ s_t &= \left( \frac{\beta}{1+\beta} \right) w_t. \end{aligned}$$

したがって、貯蓄は金利に依存しなくなる。すなわち、貯蓄は所得の一定割合という、単純な Solow 流の貯蓄と一致する。このとき、

$$k_{t+1} = \frac{f(k_t) - k_t f'(k_t)}{1+n} \left( \frac{\beta}{1+\beta} \right).$$

さらに、生産関数もまたコブ・ダグラス型  $f(k_t) = k_t^\alpha$  であると仮定すると、

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} k_t^\alpha.$$

これは、 $s = \beta(1-\alpha)/(1+\beta)$  とおけば、Solow の成長モデルと全く同一の資本蓄積方程式となる。したがって、その特徴も同一であり、二つの定常状態が存在し、正の値をとる定常状態は大域的に安定となる。

生産、効用のいずれもコブ・ダグラス型と仮定するこのケースは非常に単純で分析しやすいが、貯蓄が金利に依存しない、という仮定は極めて強く非現実的である。金利の上昇の代替効果は一期目の消費を低下させ、貯蓄を増加させ二期目の消費を増加させる。しかし、所得効果は、一期目の消費を増

加させ、貯蓄は低下させる。コブ・ダグラス型のときは、この、貯蓄に対する所得効果と代替効果がちょうど打ち消しあうようになっているが、これは偶然の産物である。より一般的な CRRA の効用関数を仮定すると、

$$u(c_t^y) + \beta u(c_{t+1}^o) = \frac{c_t^{y(1-\sigma)} - 1}{1-\sigma} + \beta \left( \frac{c_{t+1}^{o(1-\sigma)} - 1}{1-\sigma} \right),$$

このとき、一階条件は

$$\frac{c_{t+1}^o}{c_t^y} = (\beta(1+r_{t+1}))^{1/\sigma},$$

したがって、

$$c_{t+1}^o = c_t^y (\beta(1+r_{t+1}))^{1/\sigma}.$$

貯蓄は

$$\begin{aligned} c_{t+1}^o &= (1+r_{t+1})s_t = c_t^y (\beta(1+r_{t+1}))^{1/\sigma}, \\ c_t^y + s_t &= w_t. \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} s_t &= c_t^y \beta^{1/\sigma} (1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma} \\ &= w_t - c_t^y \\ w_t &= c_t^y \left( 1 + \beta^{1/\sigma} (1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma} \right) \\ c_t^y &= w_t \left( 1 + \beta^{1/\sigma} (1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma} \right)^{-1} \\ s_t &= w_t - c_t^y \\ &= w_t - \frac{w_t}{1 + \beta^{1/\sigma} (1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma}} \\ &= \frac{w_t \beta^{1/\sigma} (1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma}}{1 + \beta^{1/\sigma} (1+r_{t+1})^{(1-\sigma)/\sigma}} \\ s_t &= \frac{w_t}{\beta^{-1/\sigma} (1+r_{t+1})^{-(1-\sigma)/\sigma} + 1}. \end{aligned}$$

したがって、CRRA 型の場合は、貯蓄を金利と賃金の関数として解析的に解ききることが可能であるが、金利の増加関数であるか否かは、 $\sigma$  が 1 より大きい小さいかに依存する。 $\sigma = 1$  のときは、コブ・ダグラス型のケースと同じになるが、 $\sigma > 1$  のときは、所得効果が代替効果を上回り、貯蓄は金利の減少関数となり、一方、 $\sigma < 1$  の時には代替効果が所得効果を上回り、貯蓄は金利の増加関数となる。

さらに、生産もまたコブ・ダグラス型と仮定し、この経済の資本ストックの遷移式を導出すると、

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)k_t^\alpha}{\left(\beta^{-1/\sigma}(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})^{-(1-\sigma)/\sigma} + 1\right)(1+n)}.$$

定常状態では

$$k^* = \frac{(1-\alpha)k^{\alpha*}}{\left(\beta^{-1/\sigma}(1+\alpha k^{\alpha*-1})^{-(1-\sigma)/\sigma} + 1\right)(1+n)}.$$

CRRA の時も、多少複雑になるが、コブ・ダグラス型のケースと同様、正の値をとる定常状態は Unique に定まり、 $\sigma > 1$  の時はその定常状態は局所的に安定であることも証明できる (試してみよ! 期末試験に出すかも …)。

### 3.1 各種市場均衡

CES より一般的な効用関数の時は、貯蓄を金利と賃金の関数として解析的に解ききることはできなくなり、複数の定常均衡が生じたり、複雑な移行過程となり、永遠に定常状態の周囲で動き回るような挙動となる可能性もある<sup>23</sup>。一般ケースのダイナミクスは下記の式で規定される。

$$k_{t+1} = \frac{s(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}))}{1+n}$$

$$0 = -s(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})) + (1+n)k_{t+1}$$

陰関数定理を用いて微分すると、

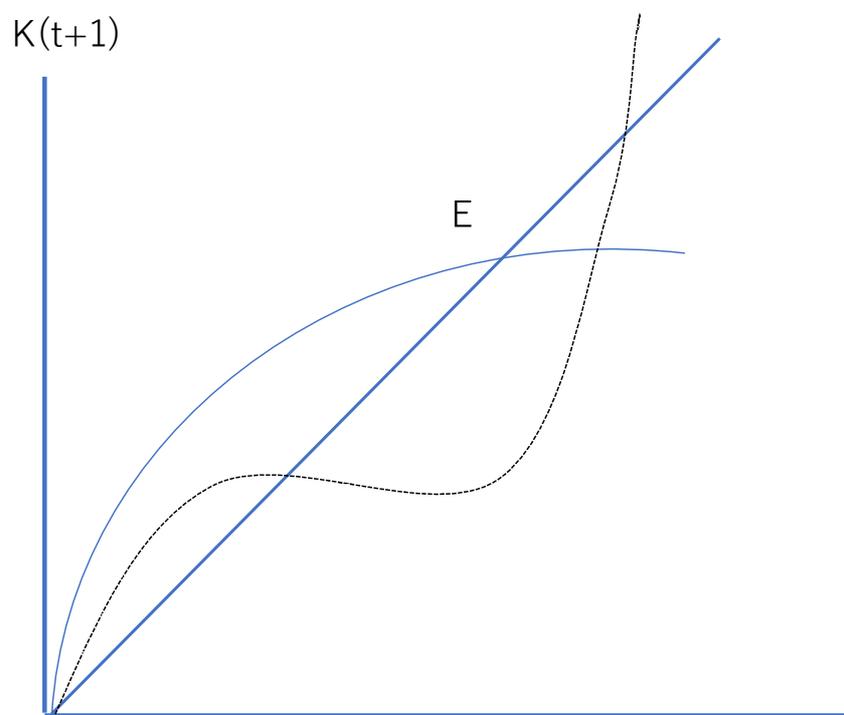
$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{s_w(f' - k f'' - f')}{1+n - s_r f''}$$

$$= \frac{-s_w k f''}{1+n - s_r f''}.$$

ところで、 $s_w > 0$  だったから、分子は常に正である。問題は分母であり、 $s_r$  が正である場合、すなわち貯蓄が金利の増加関数の場合は分母も正となり、来期の資本ストックは現在の資本ストックの増加関数となる。しかしながら、金利の増加が大きな所得効果を伴い、貯蓄の低下を引き起こす場合は分母が負になる可能性がある。この場合、来期の資本ストックは現在の資本ストックの減少関数となる。

図では、E 点が定常状態となり、Solow の成長モデルと同様の安定的な均衡となる。しかしながら、来期の資本ストックが現在の資本ストックの減少関数となる領域がある場合は、A と B のような複数の正の値をとる定常状態となる可能性がある。B 点は不安定であり、A 点は、その周囲で均衡は振動を繰り返す。関数の形状次第では、無限の振動が発生する可能性がある。

<sup>23</sup>OLG モデルと非線形動学の関係はかつて精力的に分析がなされた。Woodford や Azariadis、Farmer による一連の研究を参照せよ。ただし、二期間モデルだと一期 30-40 年のサイクルとなるが …。



### 3.2 資本の過剰蓄積

Diamond モデルにおける定常状態の資本ストック水準について考えてみる。効用、生産いずれもコブ・ダグラス型である時、定常状態は

$$k^* = \left( \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

だった。つぎに、この経済の黄金律について考えてみる。この経済の資源制約 (需給バランス) を考えると、

$$f(k_t) - (1+n)k_{t+1} = c_t^y + \frac{c_t^o}{1+n},$$

1人当たり経済の総消費を  $c_t$  とすると、

$$f(k_t) = c_t + (1+n)k_{t+1}.$$

定常状態での消費を最大化する条件は

$$f'(k^{gold}) = 1+n.$$

コブ・ダグラス型の場合は

$$\begin{aligned}\alpha k^{gold \alpha-1} &= 1+n \\ k^{gold \alpha-1} &= \frac{1+n}{\alpha} \\ k^{gold} &= \left( \frac{\alpha}{1+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

これが資本の黄金水準である。  $k^*$  と比較すると

$$\frac{k^*}{k^{gold}} = \left( \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

したがって、

$$k^* > k^{gold} \quad \text{when } \beta(1-\alpha) > (1+\beta)\alpha$$

すなわち、

$$\frac{\beta}{(1+\beta)} > \frac{\alpha}{(1-\alpha)},$$

のとき、コブ・ダグラス型経済の定常状態は、資本の黄金水準を超える水準となる。たとえば、 $\beta = 0.8, \alpha = 0.3$  のときに成立する。この値は、決して異常な非現実的なものではない。

$k^* > k^{gold}$  のとき、 $r < n$  となっており、この経済は動学的に非効率 (dynamic inefficient) となる。

Ramsey の最適成長モデルでは、定常状態での資本ストック水準は常に黄金水準よりも小さく、dynamic inefficient になることはありえなかった。コブ・ダグラス型 OLG 経済での定常状態はパレート効率的ではない。過剰な資本ストックを抱える経済では資本ストックを低下させることで、一人当たり消費を増加させることが可能である。これは、資本ストックを削り老年層の消費を増加させ、次にその資本ストック低下により生産水準を上昇させることが可能であり、その上昇分が初期の資本ストックの減少分を上回ることができる(資本の限界生産性が  $n$  よりも小さいため)。したがって、この経済の若年、老年いずれの消費も上昇させるようなパレート改善が可能である。具体的には、賦課方式の年金の導入、あるいは国債を発行し、貯蓄水準を低下させることが可能である。

現在、先進各国の金利は非常に低い水準にある。政策金利はマイナスになっている国も存在する。果たして、これらの国では動学的に非効率なのだろうか?人口成長率とどの金利を比較するのが適切なのだろうか?マクロ経済の効率性を議論する場合、どの金利を用いるべきかは議論になっており、見解は一致していない。そもそも、多くのマクロモデルでは複数の金利が存在していない。超短期の政策金利、様々な証券の平均的な収益率、長期国債の金利、リスクプレミアム、資本ストックの限界生産性等、考慮すべき多くの要素が存在しており、単純なマクロモデルの含意を現実経済に応用することは容易ではない。しかし、OLG モデルでは、それほど非現実的な仮定を設けなくとも、資本の過剰蓄積と非効率性が理論的には生じうるということは覚えておくべきである。

### 3.3