

2019年地域経済各論(日本)

指数理論(7)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成31年11月7日

概要

生計費指数:経済学的アプローチ

1 経済学的アプローチ

Irving Fisher が指数理論に関する大著を出版した翌々年の1924年、ロシアの経済学者、A.A. Konüs はその後の指数理論の展開に大きな影響を及ぼす論文を記した。1939年の *Econometrica* に英訳されたその論文は¹、現在の経済学的アプローチによる物価指数理論のエッセンスがほぼ盛り込まれており、Laspeyres と Paasche が真の生計費指数と比較して過剰、および過少になることが明確に示されている。この業績に敬意を表し、生計費指数 (Cost of Living) はコニユスの真の生計費指数と呼ばれることがある。

指数理論の経済学的アプローチは、価格と数量の間になんらかの関数で描写できる関係があることを想定する。物価指数の場合は消費者理論であり、企業物価指数の場合は生産者理論を基に、その関数形の形状およびその特徴が議論されることになる。もっとも、観察されるデータは実際に生じた数量および価格のことが多く、消費者や企業が意図した需要計画や生産計画ではないケースがほとんどである。市場で観察される数量と価格が、需要と供給のどちらを主に反映しているかは、数量と価格の変動がどのような要因によって生じているかに依存しており、消費者物価指数であるから需要理論に基づいてのみ決定されると仮定することには問題がある。実際、部分均衡や一般均衡分析では相対価格と数量がどのように決定するかが中心的な問題であり、需要・供給どちらか一面のみを重視するのは、一般均衡モデルをベースにして考えると不自然かもしれない。消費者理論アプローチ、あるいは生産者理論アプローチと呼ぶのがより適切であると思われる。もっとも、市場での決定を前提に数量と価格の関係进行分析するためには、変動要因の特定が必

¹Konüs, A.A. (1924) English Translation "The Problem of the True Index of the Cost of Living," *Econometrica* 7, 10-29.

要であり、それは経済システム全体の推計を試みることに近い作業となる。物価指数や数量指数を得るために経済システム全体の推計が必要となってしまうのは、物価や数量の動向をいち早く認識し、政策運営に反映することが困難になってしまう。そもそも、どのようなショックが起きているかを知ることが一般に極めて困難であり、市場のモデル化も、完全競争に近いものから顧客市場に近いものまでさまざまであり容易ではない。しかしながら、生産者を一切無視した需要理論のみで消費者物価の一連の議論を閉じることに対しては注意する必要があると思われる²。

2 Konüs の生計費指数

支出関数を下記のように定義する。

$$E(u^t, P^t) = \min_{\{q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_{it} q_i : u(q^t) \geq u^t \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}$$

Laspeyres-Konüs の真の生計費指数は

$$PI_k(P^0, P^t, q^0) = \frac{E(u(q^0), P^t)}{E(u(q^0), P^0)}$$

$$= \frac{E(u^0, P^t)}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}$$

Paashe-Konüs の真の生計費指数は

$$PI_k(P^0, P^t, q^t) = \frac{E(u(q^t), P^t)}{E(u(q^t), P^0)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{E(u^t, P^0)}$$

効用関数が消費数量に関して一次同次（あるいはその単調増加変換）であるとき、選好はホモセティックであると呼ばれる。ホモセティックな選好は、コブダグラス型、CES(Constant Elasticity of Substitution) 型、レオンティエフ型等、経済学では頻繁に登場する。

まず、効用関数 $u(q^t)$ が t 期における消費ベクトル q^t に関して一次同次で、正の値になるときの支出関数 $E(\bar{u}, P^t)$ を考えてみよう。すると、下記のように

²実際、Feenstra (1994) や Broda and Weinstein (2010) 及び Abe et al. (2016) は、生計費指数の推計の際に、生産者サイドも考慮に入れた推計を行っている。

に展開可能である。

$$\begin{aligned}
E(\bar{u}, P^t) &= \min_{\{q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_t^i q_t^i : u(q^t) \geq \bar{u} \right\} \\
&= \min_{\{q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_t^i q_t^i : u\left(\frac{q^t}{\bar{u}}\right) \geq \frac{1}{\bar{u}} \bar{u} \right\} \\
&= \min_{\{q_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{u} p_t^i \frac{q_t^i}{\bar{u}} : u\left(\frac{q^t}{\bar{u}}\right) \geq 1 \right\} \\
&= \bar{u} \times \min_{\left\{ \frac{q_t^i}{\bar{u}} \right\}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_t^i \frac{q_t^i}{\bar{u}} : u\left(\frac{q^t}{\bar{u}}\right) \geq 1 \right\} \\
&= \bar{u} \times E(1, P^t)
\end{aligned}$$

効用 1 単位に相当する単位支出関数を $E(1, P^t) = C(P^t)$ と書くと、

$$E(\bar{u}, P^t) = \bar{u}C(P^t)$$

となる。すなわち、選好がホモセティックの場合、支出関数は効用水準に比例する。このとき、異なる価格ベクトルの下での支出関数の比である生計費指数は、

$$PI_k(P^0, P^t, \bar{u}) = \frac{c(P^t)}{c(P^0)}$$

となり数量ベクトル q に依存しなくなる。

もしも効用関数がホモセティックであれば、Laspeyres-Konüs の真の生計費指数と Paashe-Konüs の真の生計費指数は一致する。このとき、

$$PI_k(P^0, P^t, q) = \frac{c(P^t)}{c(P^0)}$$

とすると、真の生計費指数 $PI_k(P^0, P^t, q)$ は数量 q に依存しなくなる。このときの数量指数を Value Index と物価指数の比、すなわち、

$$QI_k(P^0, P^t, q^0, q^t) = \frac{1}{PI_k(P^0, P^t, q)} \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}$$

で定義すると、もしも効用関数がホモセティックであれば、支出関数は効用水準に関して線形になるので、単位支出関数を用い、

$$\frac{1}{PI_k(P^0, P^t, q)} \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} = \frac{c(P^0)}{c(P^t)} \frac{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}$$

ところで、ホモセティックのときには、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n p_{it} q_i &= E(u(q^t), P^t) \\
&= u(q^t) \times c(P^t)
\end{aligned}$$

が成立していた。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{c(P^t) \sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}}{c(P^0) \sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} &= \frac{c(P^0) u(q^t) \times c(P^t)}{c(P^t) u(q^0) \times c(P^0)} \\ &= \frac{u(q^t)}{u(q^0)} \\ &= QI_k(P^0, P^t, q^0, q^t) \end{aligned}$$

すなわち、ホモセティック効用関数の時、数量指数は価格ベクトルに依存しなくなり、(一次同次関数に変換した) 効用関数の比と等しくなる。この理屈は単純である。真の生計費指数は単位支出関数の比となる。Value index は支出総額の比であり、もしも数量指数と物価指数の積が Value Index と等しくなるのであれば、ホモセティック効用関数の時、数量指数は効用関数の比に等しくなるのは、真の生計費指数が効用水準の線形関数であることから明らかである。無論、この性質は CPI Manual を含め多くの文献で紹介されているが、決して重要視されているとは言えない。数量指数そのものが、輸出入を測る時程度しか公式統計では登場しないこともあるが、その潜在的価値、特に厚生を測るうえでは有用であることを意味している。実際には、多くの物価指数の計測において、個々の商品の数量ではなく、代表的な商品の価格とカテゴリー全体の支出シェアを用いた近似計算をしており、データの制約から数量指数を直接推計することはできいが、POS データのように、実際の取引数量の情報が利用可能な場合、二期間、あるいは二地点の厚生の大小を直接計測できるという点では、もっと注目されてよい性質だと思われる。

3 Allen 数量指数

前節では、数量指数を生計費指数の Cofactor、すなわち、生計費指数を乗じると Value Index を得る指数として扱ったが、生計費指数を用いず、物価指数のアナロジーで数量指数を定義することも可能である。Allen (1949)³ が定式化したため、Allen の数量指数と呼ばれるものは、ある基準となる価格ベクトル P^R を固定し、効用水準は可変とした下記で定義される

$$QI^A = \frac{E(u(q^t), P^R)}{E(u(q^0), P^R)}$$

$P^R = P^0$ であれば、Laspeyres-Allen 数量指数となり、 $P^R = P^t$ であれば、Paashe-Allen 数量指数となる。もしも効用関数がホモセティックであれば、Allen の数量指数は価格に依存しなくなる。Allen の数量指数を計算するには効用関数を定式化せねばならない。

³R. G. D. Allen (1949), "The Economic Theory of Index Numbers," *Economica*, Vol. 16, No. 63 (Aug., 1949), pp. 197-203

4 マルムキスト指数

次に、生産分析、特にTFP(Total Factor Productivity:全要素生産性)の計測の際に頻繁に用いられるマルムキスト指数を紹介しよう。Caves, Christensen, and Diewert (1982)は、1950年代のステム・マルムキストによる論文をオリジナルのアイデアとして引用しながら、二つの異なる数量ベクトルの間の距離を用いるアプローチを提唱している。そこで中心的な役割を果たすシェファードの距離は下記のように定義される。

$$D(q^1, q) = \max \left\{ k > 0 : u\left(\frac{q^1}{k}\right) \geq u(q) \right\}$$

すなわち、二つの数量ベクトル (q^1, q) が与えられたとき $u(q)$ と最低限同じ水準の効用を得るために必要な q^1 の割引値である。この距離の比、すなわち、

$$MI^R = \frac{D(q^2, q^R)}{D(q^1, q^R)}$$

を考えてみよう。ただし、 q^R は基準となる数量ベクトルであり、これとの距離で数量ベクトルの距離を評価しているのである。もしも $q^R = q^1$ であれば、 $D(q^1, q^1) = 1$ なので、

$$MI^R = D(q^2, q^1)$$

となる。逆に、比較時点を基準 ($q^R = q^2$) にすると、

$$\begin{aligned} MI^P &= \frac{D(q^2, q^2)}{D(q^1, q^2)} \\ &= \frac{1}{D(q^1, q^2)} \end{aligned}$$

となる。このように、二つの数量ベクトルの距離の比はマルムキスト指数と呼ばれる。マルムキスト指数は基準となる数量ベクトル q^R に依存する。基準となるベクトルとしては、下記のような、二つの数量ベクトルの幾何平均が用いられることが多い。

$$MI = \left[\frac{D(q^2, q^1)}{D(q^1, q^2)} \right]^{1/2}$$

なお、もしも選好がホモセティックであれば、

$$\begin{aligned} D(q^1, q^2) &= \max \left\{ k > 0 : u\left(\frac{q^1}{k}\right) \geq u(q^2) \right\} \\ &= \max \left\{ k > 0 : \frac{u(q^1)}{u(q^2)} \geq k; \right\} \\ &= \frac{u(q^1)}{u(q^2)} \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} D(q^2, q^1) &= \max \left\{ k > 0 : u\left(\frac{q^2}{k}\right) \geq u(q^1); k > 0 \right\} \\ &= \max \left\{ k > 0 : \frac{1}{k} \geq \frac{u(q^1)}{u(q^2)} \right\} \\ &= \frac{u(q^1)}{u(q^2)} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} MI &= \left[\left(\frac{u(q^2)}{u(q^1)} \right)^{-1} \frac{u(q^1)}{u(q^2)} \right]^{1/2} \\ &= \frac{u(q^1)}{u(q^2)} \end{aligned}$$

となり、生計費指数の cofactor として定義された数量指数と一致する。また、Allens の数量指数も、ホモセティックの場合、

$$\begin{aligned} QI^A &= \frac{E(u(q^t), P^R)}{E(u(q^0), P^R)} \\ &= \frac{u(q^t) C(1, P^R)}{u(q^0) C(1, P^R)} \\ &= \frac{u(q^t)}{u(q^0)} \end{aligned}$$

となり、やはり、生計費指数の cofactor として定義された数量指数と一致する。すなわち、効用関数がホモセティックの場合、三つの数量指数は一致する。

5 生計費指数としての Fisher 指数

下記の効用関数を仮定する。

$$u(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_i q_k} \quad (1)$$

$$a_{ik} = a_{ki} \text{ for all } i, k \quad (2)$$

すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_i} &= \frac{1}{2} \frac{2 \sum_{k=1}^n a_{ik} q_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_i q_k}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_k}{u(q)} \end{aligned}$$

ところで、微分をする数量ベクトルを現時点の数量ベクトル q^t とし、かつ両辺を $u(q^t)$ で割ると、

$$\frac{u'(q^t)}{u(q^t)} = \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_k^t}{u(q^t)^2}$$

ところで、 $u(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_i q_k}$ は一次同次である。なぜなら、

$$\begin{aligned} u(\lambda q) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \lambda q_i \lambda q_k} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_i q_k} \\ &= \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_i q_k} \\ &= \lambda u(q) \end{aligned}$$

したがって、 $u(q)$ はホモセティックである。このとき、支出関数はシェファード・マッケンジーの補題を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(p, u(q))}{\partial p_i} &= q_i \\ &= \frac{\partial u(q) E(p, 1)}{\partial p_i} \\ &= \frac{u(q) \partial E(p, 1)}{\partial p_i} \end{aligned}$$

ここで、 $E(p, 1) = c(p)$ とすると、

$$q_i = \frac{u(q) \partial c(p)}{\partial p_i}$$

ところで、

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i = u(q) c(p)$$

二式を用いて、

$$\frac{q_i}{\sum_{i=1}^n p_i q_i} = \frac{1}{c(p)} \frac{\partial c(p)}{\partial p_i}$$

ところで、最適化の一階条件をマルチプライヤーを用いて記述すると、

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} \\ \sum_{i=1}^n p_i q_i &= \sum_{i=1}^n \lambda \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} q_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} q_i \end{aligned}$$

よって、

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n p_i q_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} q_i}$$

したがって、

$$\frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i q_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} q_i} \frac{\partial u(q)}{\partial q_i}$$

ここで、効用関数が一次同次であれば、オイラーの公式より、 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(q)}{\partial q_i} q_i = u(q)$ となり、

$$\frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i q_i} = \frac{1}{u(q)} \frac{\partial u(q)}{\partial q_i}$$

となる。

ところで、Fisher 物価指数の Cofactor となる数量指数は、

$$\begin{aligned} QI^F(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i1} \sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0} \sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{u(q_0)} \sum_{i=1}^n \left(q_{i1} \frac{\partial u(q_0)}{\partial q_i} \right)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{u(q_0)} \sum_{i=1}^n \left(q_{i1} \frac{\partial u(q_0)}{\partial q_i} \right)} / \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(q_{i1} \frac{1}{u(q_0)} \frac{\partial u(q_0)}{\partial q_{i0}} \right)} / \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(q_{i0} \frac{1}{u(q_1)} \frac{\partial u(q_1)}{\partial q_{i1}} \right)} \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{\partial u(q_0)}{\partial q_{i0}} \frac{1}{u(q_0)} = \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_k^0}{u(q_0)^2}$$

を用いると、

$$QI^F(q_0, p_0, q_1, p_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i1} q_{k0}}{u(q_0)^2} \right)} / \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i0} q_{k1}}{u(q_1)^2} \right)}$$

ところで、効用関数は対称で、 $a_{ik} = a_{ki}$ だったから、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i1} q_{k0} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i0} q_{k1}$$

したがって、

$$\begin{aligned} QI^F(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \sqrt{\left(\frac{1}{u(q_0)^2}\right)} / \sqrt{\left(\frac{1}{u(q_1)^2}\right)} \\ &= \frac{u(q_1)}{u(q_0)} \end{aligned}$$

これは、生計費指数に対応する数量指数は、効用関数がホモセティックの時には効用比に等しいという結果を確認するものでもある。次に、

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i = u(q) c(p)$$

に戻る。さて、 $QI^F(q_0, p_0, q_1, p_1)$ に対応する物価指数、すなわち Fisher 物価指数 $PI^F(q_0, p_0, q_1, p_1)$ は

$$\begin{aligned} QI^F(q_0, p_0, q_1, p_1) PI^F(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \\ PI^F(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \frac{1}{QI^F(q_0, p_0, q_1, p_1)} \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \\ &= \frac{u(q_0)}{u(q_1)} \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \\ &= \frac{u(q_0)}{u(q_1)} \frac{u(q_1) c(p_1)}{u(q_0) c(p_0)} \\ &= \frac{c(p_1)}{c(p_0)} \end{aligned}$$

これは、効用関数を (1) で定義すると、生計費指数は Fisher 指数となる、それに対応する数量指数はその効用比となることを示している。

6 生費指数としての Walsh 指数

下記のような効用関数を仮定しよう。これは Quadratic Mean of Order r の関数と呼ばれる。

$$\begin{aligned} u(q) &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)^{1/r} \\ a_{ik} &= a_{ki} \quad \text{for all } i, k \end{aligned}$$

$r = 2$ のとき、この効用関数は Fisher 指数の場合、すなわち (1) と一致する。さらに、下記のような数量指数を考える⁴。

$$QI^r = \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_i^0 (q_{i1}/q_{i0})^{r/2}\right)^{1/r}}{\left(\sum_{i=1}^n w_i^1 (q_{i0}/q_{i1})^{r/2}\right)^{1/r}}$$

$$w_i^t = \frac{p_{it}q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{it}q_{it}}$$

まず、この数量指数が、上記の効用関数に対応していることを示そう。Fisher 指数の時のように一階条件とオイラーの公式より、

$$\frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i q_i} = \frac{1}{u(q)} \frac{\partial u(q)}{\partial q_i}$$

$$w_i^t = \frac{q_{it}}{u(q^t)} \frac{\partial u(q^t)}{\partial q_i}$$

ここで、

$$\frac{\partial u(q_0)}{\partial q_{i0}} \frac{1}{u(q_0)} = \frac{q_{i0}^{(r-2)/2} \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{k0}^{r/2}}{u(q_0)^r}$$

$$= \frac{q_{i0}^{-1} \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i0}^{r/2} q_{k0}^{r/2}}{u(q_0)^r}$$

を用いると、

$$w_i^t = \frac{q_{it}}{u(q^t)} \frac{\partial u(q^t)}{\partial q_i}$$

$$= \frac{q_{it} q_{it}^{-1} \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{it}^{r/2} q_{kt}^{r/2}}{u(q^t)^r}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n a_{ik} q_{it}^{r/2} q_{kt}^{r/2}}{u(q^t)^r}$$

したがって、

$$QI^r = \frac{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n w_i^0 (q_{i1}/q_{i0})^{r/2}}}{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n w_i^1 (q_{i0}/q_{i1})^{r/2}}}$$

$$= \frac{u(q_1) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i0}^{r/2} q_{k0}^{r/2} (q_{i1}/q_{i0})^{r/2}}}{u(q_0) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i1}^{r/2} q_{k1}^{r/2} (q_{i0}/q_{i1})^{r/2}}}$$

$$= \frac{u(q_1) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i1}^{r/2} q_{k0}^{r/2}}}{u(q_0) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i0}^{r/2} q_{k1}^{r/2}}}$$

⁴なお、CPI Manual の該当箇所の定義式 (17-30) にはタイプがある。詳細は Diewert (1976) の p.130 を参照せよ。E.W.Diewert “EXACT AND SUPERLATIVE INDEX NUMBERS,” *Journal of Econometrics* 4 (1976) 115-145.

ところで、 $a_{ik} = a_{ki}$ だったから、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i1}^{r/2} q_{k0}^{r/2} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} q_{i0}^{r/2} q_{k1}^{r/2}$$

したがって、

$$QI^r = \frac{u(q_1)}{u(q_0)}$$

となり、効用関数の比となっている。次に、この数量指数の Cofactor となる物価指数を考える。すると、

$$\begin{aligned} PI^r &= \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{QI^r \sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \\ &= \frac{u(q_0) \sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{u(q_1) \sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \\ &= \frac{u(q_0) E(p_t, u_1)}{u(q_1) E(p_0, u_0)} \\ &= \frac{u(q_0) u(q_1) C(p_1)}{u(q_1) u(q_0) C(p_0)} \\ &= \frac{C(p_1)}{C(p_0)} \end{aligned}$$

となり、 $C(p_t)$ の比、すなわち単位支出関数の比に等しくなる。これは、生計費指数と一致する。 $r = 2$ のときは、効用関数は Fisher の場合と同じであり、数量、物価指数も Fisher と同じになる。 $r = 1$ のとき、数量指数は

$$\begin{aligned} QI^1 &= \frac{\sum_{i=1}^n w_i^0 (q_{i1}/q_{i0})^{1/2}}{\sum_{i=1}^n w_i^1 (q_{i0}/q_{i1})^{1/2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1} \sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0} (q_{i1}/q_{i0})^{1/2}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0} \sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1} (q_{i0}/q_{i1})^{1/2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1} \sum_{i=1}^n p_{i0} (q_{i1} q_{i0})^{1/2}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0} \sum_{i=1}^n p_{i1} (q_{i0} q_{i1})^{1/2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1} / \sum_{i=1}^n p_{i1} (q_{i0} q_{i1})^{1/2}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0} / \sum_{i=1}^n p_{i0} (q_{i1} q_{i0})^{1/2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} / PI^W \end{aligned}$$

ここで、 PI^W は Walsh 物価指数に他ならない。すなわち、

$$QI^1 PI^W = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}$$

となり、 $r = 1$ のとき、数量指数の Cofactor であり、かつ生計費指数と一致する物価指数は Walsh 物価指数となる。

7 支出関数を用いる場合

今までは効用関数から生計費指数及び数量指数を導出してきたが、支出関数から導出することも可能である。ホモセティック効用関数を仮定し、対応する効用 1 単位あたりの支出関数として、下記のような Quadratic Mean of Order r 関数形を仮定しよう。

$$C(p) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)^{1/r}$$

$$b_{ik} = b_{ki}$$

支出関数を価格に関して微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(p)}{\partial p_i} &= \frac{2p_i^{(r-2)/2} \sum_{k=1}^n b_{ik} p_k^{r/2}}{2^r \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2}}} \\ &= \frac{p_i^{(r-2)/2} \sum_{k=1}^n b_{ik} p_k^{r/2}}{C(p)^{r-1}} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{C(p)} \frac{\partial C(p)}{\partial p_i} &= \frac{p_i^{(r-2)/2} \sum_{k=1}^n b_{ik} p_k^{r/2}}{C(p)^r} \\ &= \frac{p_i^{-1} \sum_{k=1}^n b_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2}}{C(p)^r} \end{aligned}$$

また、シェファード・マッケンジーの補題より、

$$u_t \frac{\partial C(p_t)}{\partial p_i} = q_{it}$$

また

$$\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it} = u_t C(p_t)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_t}{u_t C(p_t)} \frac{\partial C(p_t)}{\partial p_i} &= \frac{q_{it}}{\sum_{i=1}^n p_{it} q_{it}} \\ \frac{p_{it}}{C(p_t)} \frac{\partial C(p_t)}{\partial p_i} &= w_i^t \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n b_{ik} p_{it}^{r/2} p_{kt}^{r/2}}{C(p_t)^r} \end{aligned}$$

さて、下記の物価指数を考えてみよう。

$$PI^r = \frac{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n w_i^0 (p_{i1}/p_{i0})^{r/2}}}{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n w_i^1 (p_{i0}/p_{i1})^{r/2}}}$$

シェアを消去して対称性を用いると

$$\begin{aligned}
 PI^r &= \frac{C(p_1) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n b_{ik} p_{i0}^{r/2} p_{k0}^{r/2} (p_{i1}/p_{i0})^{r/2}}}{C(p_0) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n b_{ik} p_{i1}^{r/2} p_{k1}^{r/2} (p_{i0}/p_{i1})^{r/2}}} \\
 &= \frac{C(p_1) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n b_{ik} p_{k0}^{r/2} p_{i1}^{r/2}}}{C(p_0) \sqrt[r]{\sum_{i=1}^n b_{ik} p_{k1}^{r/2} p_{i0}^{r/2}}} \\
 &= \frac{C(p_1)}{C(p_0)}
 \end{aligned}$$

したがって、この物価指数は生計費指数となる。 $r = 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
 PI^r &= \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^0 (p_{i1}/p_{i0})}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^1 (p_{i0}/p_{i1})}} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^0 (p_{i1}/p_{i0})} \times \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^1 (p_{i0}/p_{i1})}}
 \end{aligned}$$

これは Fisher 物価指数に他ならない。

8 生計費指数としてのトルンクビスト (Törnqvist) 指数

本節では、効用関数のホモセシテリの仮定を廃し、下記の支出関数を仮定しよう。

$$\begin{aligned}
 \ln E(p, u) &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_i \ln p_k + b_0 \ln u + \sum_{i=1}^n b_i \ln p_i \ln u + \frac{1}{2} b_{00} (\ln u)^2 \\
 a_{ik} &= a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0, \sum_{i=1}^n b_i = 0
 \end{aligned}$$

パラメーターに関する仮定により、支出関数は価格に関して一次同次となる。この関数形は Translog 型と呼ばれる⁵。これは支出関数であるため、

$$\begin{aligned}
 E(p^0, u^0) &= \sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}, \\
 E(p^1, u^1) &= \sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}
 \end{aligned}$$

⁵この関数は、デール・ジョルゲンソン達により 1970 年代に経済学に導入された。

が成立する。また、シェファード・マッケンジーの補題より、

$$\begin{aligned} q_{i0} &= \frac{\partial E(p^0, u^0)}{\partial p_{i0}} \\ &= \frac{E(p^0, u^0)}{p_{i0}} \frac{\partial \ln E(p^0, u^0)}{\partial \ln p_{i0}} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} &= \frac{q_{i0}}{E(p^0, u^0)} \\ &= \frac{1}{p_{i0}} \frac{\partial \ln E(p^0, u^0)}{\partial \ln p_{i0}} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} w_i^0 &= \frac{p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \\ &= \frac{\partial \ln E(p^0, u^0)}{\partial \ln p_{i0}} \end{aligned}$$

実際、仮定された支出関数を微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln E(p^0, u^0)}{\partial \ln p_{i0}} &= w_i^0 \\ &= a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k + b_i \ln u \end{aligned}$$

最後に、一般に二次関数に関する下記の公式を導出しよう。

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, \dots, z_n) &= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i z_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} z_i z_k \\ a_{ik} &= a_{ki} \end{aligned}$$

という関数 f を考えよう。これは z に関する二次関数である。

まず、二次関数なので、任意の二点の差は、どちらか片方における二階のテイラー展開の値と一致するはずである。

$$f(z^1) - f(z^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_i} (z_i^1 - z_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f(z^0)}{\partial z_i \partial z_k} (z_i^1 - z_i^0) (z_k^1 - z_k^0)$$

しかし、Diewert (1976) は、さらに下記の式が成立することを証明している。

$$f(z^1) - f(z^0) = \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_i} + \frac{\partial f(z^1)}{\partial z_i} \right\} (z_i^1 - z_i^0)$$

すなわち、二点における傾きの平均により、二点の差を正確に描写可能になっている。この関係式は Quadratic Approximation Formula と呼ばれ、この関係式と $f(z^1)$ が二次関数であることは同値であることが知られている。これは指数理論において極めて重要な公式である。 f が二次関数のときにこの公式が成立することを示すことは容易である⁶。関数を行列表示にして整理する、

$$\begin{aligned} f(z^1) - f(z^0) &= a^T z^1 + \frac{1}{2} z^{1T} A z^1 - a^T z^0 - \frac{1}{2} z^{0T} A z^0 \\ &= a^T (z^1 - z^0) + \frac{1}{2} z^{1T} A (z^1 - z^0) + \frac{1}{2} z^{0T} A (z^1 - z^0) \\ &= \frac{1}{2} [\nabla f(z^1) + \nabla f(z^0)]^T (z^1 - z^0) \end{aligned}$$

ここまでの準備を前提に、生計費指数、すなわち、支出関数の比、対数支出関数の差の計算を行う。対数支出関数は二次関数だったので、Quadratic Approximation Formula を利用可能である。

さて、これまでの準備で支出関数の Quadratic Approximation を計算しようとする、二時点の効用水準が異なるため、

$$\begin{aligned} \ln E(p^1, u^0) - \ln E(p^0, u^1) &= \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \ln E(p^1, u^1)}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln E(p^0, u^0)}{\partial \ln p_i} \right] (\ln p_{i1} - \ln p_{i0}) \\ &\quad + \frac{1}{2} b_{00} (\ln u^1)^2 - b_{00} (\ln u^0)^2 \end{aligned}$$

と、効用水準の差の項が残ってしまう。そこで生計費指数を評価する効用水準を二次点の幾何平均、すなわち、

$$u^* = \sqrt{u^0 u^1}$$

、としよう。当然、効用の差の項は消滅する。問題は各期の支出関数の対数微分であるが、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln E(p^1, u^*)}{\partial \ln p_i} &= a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k + b_i \ln (\sqrt{u^0 u^1}) \\ &= a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k + \frac{1}{2} b_i \ln u^0 + \frac{1}{2} b_i \ln u^1 \end{aligned}$$

⁶逆に、Quadratic Approximation Formula を満たすのは二次関数に限定されることの証明に関しては、Diewert (1976) を参照せよ。

二つを足すと、

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \ln E(p^1, u^*)}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln E(p^0, u^*)}{\partial \ln p_i} \\
&= a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^1 + \frac{1}{2} b_i \ln u^0 + \frac{1}{2} b_i \ln u^1 \\
&+ a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^0 + \frac{1}{2} b_i \ln u^0 + \frac{1}{2} b_i \ln u^1 \\
&= a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^1 + b_i \ln u^1 + a_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_k^0 + b_i \ln u^0 \\
&= \frac{\partial \ln E(p^1, u^1)}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln E(p^0, u^0)}{\partial \ln p_i}
\end{aligned}$$

となり、あたかも、0期と1期の両方で評価したものと同じ値になる。したがって、

$$\begin{aligned}
& \ln E(p^1, u^*) - \ln E(p^0, u^*) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \ln E(p^1, u^*)}{\partial \ln p_i} + \frac{\partial \ln E(p^0, u^*)}{\partial \ln p_i} \right] (\ln p_{i1} - \ln p_{i0}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [w_i^0 + w_i^1] (\ln p_{i1} - \ln p_{i0})
\end{aligned}$$

これはトルンクピスト物価指数に他ならない。特に注目すべきは、フィッシャー指数やウォルシュ指数と異なり、選好がホモセティックであるという仮定を用いていないことである。選好がホモセティックのとき、支出関数は効用水準の線形関数になるが、トルンクピスト物価指数は、そのような強い仮定を設けなくとも、単純な形で生計費指数を描写可能になっている点で注目に値するものである。無論、これは、支出関数が二次関数であり、シェファード・マッケンジーの補題より支出関数の対数微分が支出シェアに等しくなるという結果によるものである。その意味では、これは二次関数という極めて特殊な性質に依存しているわけであるが、一方、Translog関数はパラメータを自由に設定することにより、より一般的な関数の良い近似とみなすこともできる。この、トルンクピスト指数の有する、特殊性と一般性の共存、が後の、ディーワートによる最良指数の理論へとつながっていく。

9 トルンクピスト指数と Quadratic Mean of Order r 関数

フィッシャー指数とウォルシュ指数は、いずれも Quadratic Mean of Order r 関数に対応する生計費指数であった。 r の値により、対応する生計費指数が

異なることになる。Diewert (1980) は $\sum_{k=1}^n b_{ik} = 0, \sum_{i=1}^n b_i = 1, b_{ik} = b_{ki}$ を仮定したうえで、若干式を変形した Quadratic Mean of Order r 関数は

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n b_i p_i^{r/2} + \frac{2}{r} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)^{1/r} = \sum_{i=1}^n b_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} \ln p_i \ln p_k$$

となることを示している。すなわち、トルンクビスト指数は Quadratic Mean of Order r 関数に対応する生計費指数で $r = 0$ に対応するものに他ならない。証明は簡単であり、

$$\begin{aligned} y &= \left(\sum_{i=1}^n b_i p_i^{r/2} + \frac{2}{r} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)^{1/r} \\ y^r &= \sum_{i=1}^n b_i p_i^{r/2} + \frac{2}{r} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \\ \frac{y^r - 1}{r} &= \frac{\sum_{i=1}^n b_i p_i^{r/2} - 1}{r} + \frac{\left(2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)}{r^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n b_i p_i^{r/2} - 1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{i=\frac{1}{2}}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} \frac{(p_i^{r/2} - 1)}{r/2} \frac{(p_k^{r/2} - 1)}{r/2} \end{aligned}$$

ここで、 r をゼロに近づけていくと、

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{y^r - 1}{r} &= \ln y \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} \ln p_i \ln p_k \end{aligned}$$

すなわち、Quadratic Mean of Order r 関数で、パラメターを $r = 0, 1, 2$ と分けることで、トルンクビスト、ウォルシュ、フィッシャーの3種類の生計費指数を導出可能なのである。