

2019年度一橋大学大学院経済学研究科 地域経済各論日本 講義ノート(3)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 31 年 10 月 9 日

概要

物価指数の公理的(テスト)アプローチ(1)

1 公理アプローチ

前回の講義ノートでは Laspeyres 指数と Paasche 指数について簡単に説明し、両者の差が価格変化率と数量変化率の間の共分散により生じていることを示した。では二つの指数のうち、どちらが「正しい」物価指数なのだろうか?もしくは、どちらがより「適切な」指数であろうか?Laspeyres は、Weight が基準時点のものであるので、基準時点を固定すれば、每期每期数量の情報を収集する必要がなく、計算実務は Paasche よりもはるかに容易である。しかしながら、価格変化にともない数量も変化していく場合、Laspeyres はその変化をすべて無視することになる。特に、長期にわたる価格変化を追いかける場合や、大きなショックが生じ相対価格に変化が生じた場合等、数量が大きく変化していくことが想定される場合は Paasche のほうがより経済の実際の変化を反映している可能性が高い。いずれにせよ、目的と費用、そしてデータの特徴により両物価指数の評価は変わってくるだろう。

公理アプローチ、あるいはテストアプローチと呼ばれる指数理論は、より一般的に望ましい指数計算方式を導出しようとする試みであり、指数が満たすべき性質を列挙していき、望ましい指数の範囲を絞り込むことを念頭においている。

ミクロ経済学の公理アプローチでは、選好関係が満たすべき性質、具体的には、連続性、推移性、凸性、完備性、反射性、局所非飽和性等の各公理をまず定義し、それら公理をみたす二項関係を合理的主体による選好関係と定義した。その選好関係を基にし、経済モデル、需要体系や市場均衡を定義している。すなわち、公理体系のみで必要な仮定や構造を特定しているのである。基本となる公理はそれに基づくすべての理論の根幹となるため、それら

は、議論抜きで受け入れられるものでなければならない。無論、公理を緩めることができればそれは大きな貢献であるが、確立された公理体系の多くは必要十分条件で固められており、緩和化は不可能なものが多い。

必要十分条件が導出された公理アプローチは、モデルによって立つ仮定をすべて明らかにしている点で、見通しがよくなるという大きな利点がある。物価指数に関する公理体系も、物価指数が議論抜きで当然満たすべきと思われる公理を並べ、それを満たすものとして物価指数を定義し、それらに基づいて指数を特定化、あるいはモデル化を試みるものである。物資数の Characterization と呼ばれる一大分野が作られ、有名な指数の様々な十分条件、あるいは必要十分条件が提示されている。例えば、Fisher 指数は、そのような公理体系から演繹される一つの指数である。しかしながら、物価が当然満たすべきと歴史的に考えられる公理をすべて満たす指数は存在しないこともまた証明されている。すなわち、残念ながら、公理アプローチのみでは、物価指数理論は完結しなかったのである。しかしながら、公理アプローチの研究の進展により明らかとなったことも多い。公理アプローチによる分析は関数解析の知識が必要になり、通常の経済数学で扱う範疇を超えてしまう。そこで、本講義では、公理アプローチによる物価指数理論の入門として、公理アプローチにより得られているいくつかの定理を紹介する。今回の講義ノートはさらにその入門の入門として、非常に単純化されたケースを想定し、公理アプローチの雰囲気伝えることを目標とする。数量情報を含むより実践的な物価指数理論の公理アプローチは次回以降の講義ノートでカバーする。なお、本講義ノートの内容は、Eichhorn and Voeller (1976) 及び Balk (2008) に沿っている。

2 数量に依存しない場合の物価指数への公理アプローチ

現代の物価指数は、ほとんどの場合、二時点、あるいは二地域における数量と価格と両方の情報に依存して決定されている。しかしながら、今回は、数量に依存しない物価指数を考え、その公理的アプローチを概観する。厳密には関数解析に関するかなりつっこんだ知識が必要となるので、技術的な証明は省く。興味のあるものは、Aczel, J. (2006)¹ 及び、Eichhorn (1978)²等を参照すること。

¹ハードカバーは数万円するが、Paper Backs なら Dover から安く入手可能である。

²W. Eichhorn (1978) *Functional Equations in Economics*, Addison-Wesley Publication Company. Aczel(1966) は純粋な関数解析に関する数学書であるが、Eichhorn(1978) は経済学への応用を目的とした本であり、指数理論やマクロ経済学の集計問題、需要システムなどをカバーしている。証明もよりステップバイステップで解説している。

2.1 数量に依存しない物価指数の例

まず、講義ノート (1) で紹介した下記の Dutot 指数を考えよう。

$$PI^C = \frac{\sum_i p_{i,t}}{\sum_i p_{i,0}}$$

これは各時点の商品価格の平均値の比較であり、計算は容易であるが、個別商品価格の水準に依存してしまい、例えば缶コーヒー 24 缶入りを用いるか、一缶を用いるかにより、たとえ一缶あたりの価格が同一であっても、全体の物価指数に影響を与えてしまうという性質を持っている。では、次の Carli 指数はどうだろうか？

$$PI^D = \sum_i \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,0}} \right)$$

これであれば、缶コーヒー 24 缶と 1 缶の価格どちらを用いても、物価指数に影響は与えない。当初、Laspeyres (1964) が用いたのはこの算式であった。なお、Laspeyres の前に、Jevons が用いたのは下記の幾何平均指数であった。

$$PI^J = \prod_i \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,0}} \right)$$

この幾何平均指数もまた、商品単位の選択には依存しない。この指数は、後で議論する推移性を満たすことが知られており、現在、連鎖指数のドリフトの有無を考える時の基準、すなわち、ドリフトの発生しないベンチマーク的な指数として用いられている。詳しくは De Haan et al. (2011) を参照されたい³。

Jevons は、Laspeyres の批判に対する反論の中で、下記の、単純調和平均による指数を議論している。

$$PI^{HR} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_i \left(\frac{p_{i,0}}{p_{i,t}} \right)}$$

さらに、Fisher は 1922 年の大著において、Carli 指数と調和平均の幾何平均、すなわち Fisher 指数の数量のないバージョンを考察している。

$$PI^{CHR} = \sqrt{PI^C PI^{HR}}$$

ただし、これら二つの算式は、筆者は近年、実際に使われているのを見ることがない。

³Jan de Haan, Heymerik A. van der Grient, (2011) "Eliminating chain drift in price indexes based on scanner data," *Journal of Econometrics*, Volume 161, Issue 1, Pages 36-46,

3 公理体系入門

すべての正の実数をとる二時点の価格ベクトル、 $\mathbf{P}_t = (p_{1,t}, p_{2,t}, \dots, p_{n,t})'$ $t = 0$ or 1 , を考える。物価指数 PI を、 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ から正の実数空間への関数 $PI: \mathbf{R}_{++}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ としよう。まず、下記の四つの公理を導入する。

- (A-1) 単調性

PI は、 \mathbf{P}_0 に関して単調減少、 \mathbf{P}_1 に関して単調増加関数である。

- (A-2) 一次同次性

\mathbf{P}_1 に正の実数 λ が乗じられた場合、 PI は λ 倍となる。すなわち、

$$PI(\mathbf{P}_0, \lambda \mathbf{P}_1) = \lambda PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$$

- (A-3) 恒等性

もしもすべての価格が二時点で同一ならば、物価指数は 1 となる、すなわち、

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0) = PI(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1) = 1$$

- (A-4) 次元性

通貨の単位を変更しても、物価指数には影響をあたえない、すなわち、

$$PI(\lambda \mathbf{P}_0, \lambda \mathbf{P}_1) = PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$$

これら四つの公理は、互いに独立であることが知られている。一般に、「 N 個の公理が独立」であるとは、どの $N-1$ 個の公理を選んでも、その $N-1$ 個をみたし、かつ残りの一つを満たさない物価指数を作成することが可能である時をいう。

- 単調性をみたまず、他の 3 つを満たす例

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) = \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{p_{3,1}}{p_{3,0}}\right)^{\alpha_3} \dots \left(\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)^{\alpha_n}$$
$$\alpha_1 < 0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n > 0, \sum \alpha_i = 1$$

これは、1 財の価格が上昇すると物価指数が下落する例である。他の公理が満たされるのは自明であろう。

- 一次同次性をみださず、他の3つを満たす例

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) = \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{P}_1}{\mathbf{a}'\mathbf{P}_0}}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$$

\mathbf{P}_1 ベクトルの要素を全て λ 倍しても、 $\lambda/2$ 倍にしかならない。

- 恒等性のみを満たさない例

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{P}_1}{\mathbf{b}'\mathbf{P}_0}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) > 0, \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) > 0, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$$

$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ から、0期と1期で価格が同じであっても1にならない。

- 次元性のみを満たさない場合、かなり複雑であるが、下記が知られている。

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) = \frac{\sum p_{i,0}}{\sum p_{i,0} + 1} \frac{1}{n} \times \sum \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + \frac{1}{\sum p_{i,0} + 1} \max \left[\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right]$$

まず恒等性に関しては、

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0) = \frac{\sum p_{i,0}}{\sum p_{i,0} + 1} + \frac{1}{\sum p_{i,0} + 1}$$

$$= 1$$

単調性は自明。一次同次性に関しては、

$$PI(\mathbf{P}_0, \lambda\mathbf{P}_1) = \frac{\sum p_{i,0}}{\sum p_{i,0} + 1} \frac{\lambda}{n} \times \sum \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + \frac{\lambda}{\sum p_{i,0} + 1} \max \left[\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right]$$

$$= \lambda PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$$

次元性は、例えば1財の単位が変更になり、 $p_{1,0}$ と $p_{1,1}$ が2倍になったとする。このとき、 $\sum \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}$ と $\max \left[\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right]$ は不変であるが、 $\sum p_{i,0}$ の値は変化してしまう。

上記の例はいずれもかなり不自然である。しかし、それぞれの公理のみを満たさない例があるということは、各公理の情報がリダントではないことを確認したことになる。

逆に、上に挙げた四つの公理をみたす物価指数の例は無数にある。数量をすべて1で固定した Paasche や Laspeyres を考えれば自明であろう。上記の公理に関しては、さらに、下記の定理が知られている。

定理 1 $PI_i, (i = 1, 2, 3, \dots, k)$ が (A-1) から (A-4) の四つの公理を満たすとする。このとき、下記の二つの物価指数もまた四つの公理を満たす。

$$PI.1 = (\alpha_1 PI_1^\delta + \alpha_2 PI_2^\delta + \dots + \alpha_k PI_k^\delta)^{1/\delta}$$

$$PI.2 = PI_1^{\alpha_1} PI_2^{\alpha_2} \dots PI_k^{\alpha_k}$$

$$\delta \neq 0, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$$

自明であり、証明不要であろう。

- (A-5) 中間値性

物価指数 PI が与えられたとき、その値は、構成要素の価格変化率の最小値と最大値の間に存在する、すなわち、 $\min \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right) \leq PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) \leq \max \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right)$

中間値性については下記の便利な定理が存在する。

定理 2 公理 (A-1), (A-2) および (A-3) をみたす関数 $PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$ があるとすると、このとき、 $PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$ は中間値性を満たす。

証明

定義より

$$\min \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right) \mathbf{P}_0 \leq \mathbf{P}_1 \leq \max \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right) \mathbf{P}_0$$

さらに、

$$\begin{aligned} \min \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right) &= v(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) \\ &= v(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0) \\ &= PI(\mathbf{P}_0, v(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) \mathbf{P}_0) \\ &\leq PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) \end{aligned}$$

逆からは

$$\begin{aligned}\max \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, \dots, \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right) &= m(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) \\ &= m(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0) \\ &= PI(\mathbf{P}_0, m(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) \mathbf{P}_0) \\ &\geq PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)\end{aligned}$$

4 循環性と時間可逆性

次の二つは直感的には重要であるが、指数理論ではその必要性、重要性について激しい議論の対象となってきたものである。

- (A-5) 循環性 (推移性)

時間が 0,1,2 と三時点あるとする。無論、時間の流れは数値の大きさ通り、 $0 < 1 < 2$ である。このとき、

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) PI(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2)$$

すなわち、毎年の物価指数を乗じることで、長期の物価指数を得ることが可能になる。

- (A-6) 時間可逆性

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) PI(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0) = 1$$

すなわち、物価が 0 期から 1 期にわたって変化し、1 期から 2 期にかけて 0 期の水準に戻った場合、0 期から 2 期までの物価変化はなかったことになる。

循環性は時間可逆性を一般化したものであり、循環性を満たしていれば、時間可逆性も当然満たしている。

定理 3 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ から正の実数への関数 $PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$ が循環性 (A-5) を満たすのは、以下の形であることが必要十分条件である。

$$\begin{aligned}PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) &= \frac{L(\mathbf{P}_0)}{L(\mathbf{P}_1)} \\ L &: \mathbf{R}_{++}^n \rightarrow \mathbf{R}_{++}\end{aligned}$$

証明

十分性は自明である。 $\frac{L(\mathbf{P}_0)}{L(\mathbf{P}_1)} \times \frac{L(\mathbf{P}_1)}{L(\mathbf{P}_0)} = 1$ のように、乗じていけばよい。必要性に関しては、循環性より

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) = \frac{PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2)}{PI(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)}$$

上式左辺は \mathbf{P}_2 に依存していない。したがって、右辺もまた \mathbf{P}_2 に依存しないはずであり、証明が終わる。

この定理は、循環性が物価指数算式に対して非常に強い制約となることを示している。数量に依存する場合も同様であり、多くの指数がこの公理によってはじかれてしまう。

- (A-7) 乗法性

$\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ から正の実数への関数 $PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$ が以下の性質を満たすとき乗法性を有するという。

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (k_1, k_2, \dots, k_n), \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \\ \mathbf{k}, \lambda &\in \mathbf{R}_{++}^n, \\ \Phi(\mathbf{k}, \lambda) &: \mathbf{R}_{++}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}_{++} \end{aligned}$$

このとき

$$PI(\mathbf{k}'\mathbf{P}_0, \lambda'\mathbf{P}_1) = \Phi(\mathbf{k}, \lambda) PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$$

乗法性は強い性質であり、個別商品価格の変動を物価指数から分離できることを意味する。この乗法性については、下記の定理が知られている。

定理 4 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ から正の実数への関数 $PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$ が単調性 (A-1)、一次同次性 (A-2)、恒等性 (A-3)、及び乗法性 (A-7) を満たし、かつ、 $\Phi(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 1$ とする。この必要十分条件は、

$$\begin{aligned} PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) &= \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{p_{3,1}}{p_{3,0}}\right)^{\alpha_3} \dots \left(\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)^{\alpha_n}, \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n &> 0, \sum \alpha_i = 1 \end{aligned}$$

である。

証明 十分性は自明

必要性

価格と Weight の逆数を取り、

$$p_{i,0} = \frac{1}{x_i}, k_i = \frac{1}{u_i}$$

とする。乗法性をみたす関数 G があるとすると、

$$G(\mathbf{u}'\mathbf{x}, \lambda' \mathbf{P}_1) = \Psi(\mathbf{u}, \lambda) G(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1),$$
$$\text{where } G(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1) = PI\left(\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right), \mathbf{P}_1\right),$$
$$\Psi(\mathbf{u}, \lambda) = \Phi\left(\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \dots, \frac{1}{u_n}\right), \lambda\right).$$

このとき、 G は単調増加関数となる (第一要素 x に関しても、逆数をとっている)、増加関数となることに注意せよ)。すると、 $\Psi(\mathbf{u}, \lambda)$ もまた単調増加関数となる。対数をとると、

$$\log G(\mathbf{u}'\mathbf{x}, \lambda' \mathbf{P}_1) = \log(\Psi(\mathbf{u}, \lambda)) + \log G(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1)$$

ここで、 $\log G = H, \log \Psi = W$ とすると、

$$H(\mathbf{u}'\mathbf{x}, \lambda' \mathbf{P}_1) = W(\mathbf{u}, \lambda) + H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1)$$

H と W は厳密に単調増加な関数となっている。この階となる関数 H と W を求めたい。

ある性質をみたす関数を探すことは、関数方程式を解くことを意味する。この証明は骨が折れるので、そのエッセンスのみ紹介する。まず、以下の単純な関数方程式を考えよう。

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

は Cauchy Equation と呼ばれるものの一つであり、 x と y が正の値とすると、

$$x = e^u, y = e^r$$

と変換可能である。すると、

$$f(xy) = f(e^{u+r}) = f(e^u) + f(e^r)$$

したがって、上式は

$$g(u) = f(e^u)$$
$$g(u+r) = g(u) + g(r)$$

正の値の任意の u, r について成立するのであれば、この足し算を続けることで、

$$g(nu) = ng(u)$$

これが正の任意 u について成立しているということは、 g および f が u について線形であることを意味しており、

$$g(u) = cu$$

すなわち、もとの関数に戻すと、

$$f(x) = c \ln x$$

すなわち、 $f(xy) = f(x) + f(y)$ をみたく関数 f は対数関数となる。
Aczel (1966) の P.144 には、上式を一般化し

$$f(xy) = g(x) + h(y)$$

となるとき一般解の導出が説明されている。今回は、 $h = f$ であり、それよりは制約の強いものとなっている⁴。Aczel (1966) によると、任意の正数 u' と λ' というパラメータを有するこの関数方程式の解は

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1) = \gamma_1 \log x_1 + \dots + \gamma_n \log x_n + \gamma_{n+1} \log p_1 + \dots + \gamma_{2n} \log p_n + b,$$

$$W(\mathbf{u}, \lambda) = H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1) - b$$

なると。対数を指数をとって戻すと

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1) = \exp(H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1)) = e^b x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} p_1^{\gamma_{n+1}} \dots p_n^{\gamma_{2n}}$$

$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) = e^b \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}} \right)^{\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_1}} \left(\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}} \right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2}} \left(\frac{p_{3,1}}{p_{3,0}} \right)^{\frac{\gamma_{n+3}}{\gamma_3}} \dots \left(\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}} \right)^{\frac{\gamma_{2n}}{\gamma_n}}$$

この式が恒等性と一次同次性をみたくするための必要十分条件は、 $b = 0, \sum_i \frac{\gamma_{n+i}}{\gamma_i} = 1$ である。

Eichhorn and Voeller (1976) には、この他にも、いくつかの物価指数の Characterization、すなわち、必要十分となる公理を導いている。ただし、相当に関数解析の知識が必要となるので、興味あるものは Aczel および Eichhorn の数学の教科書と共に参照すること。関数解析は、社会選択論やメカニズムデザインの研究でも活用されているので、そうした分野に関心がある場合もこれら数学の教科書は参考になると思われる。

⁴Eichhorn (1978) の p.41 にはさらに直接的な証明がある。