第５講　集計問題（Aggregation）

5.1　ミクロ経済とマクロ経済

ある個人需要を考える。

$$q_i = a_i y_i + c_i \tag{1}$$

q_i は個人 i の q 財に対する需要、y_i は i の所得、a_i は限界消費性向。
n 人の市場に拡張するにはどうすればよいか。

(1) マクロモデルをミクロモデルと同型と考える。

$$Q = aY + \gamma \tag{2}$$

この Q は財の集計量、Y は所得の集計量である。
単純な集計方法としては、

$$Q = \Sigma q_i \quad aY = \Sigma a_i Y \quad \gamma = \Sigma c_i \tag{3}$$

ミクロの限界消費性向 a_i の平均値を a とすれば

$$\bar{a} = \frac{\Sigma a_i}{n} = a \tag{4}$$

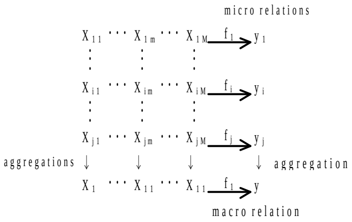
所得の集計量

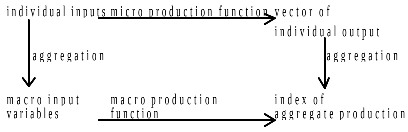
$$Y = \Sigma \left(\frac{a_i}{\bar{a}} \right) y_i \tag{5}$$

となる。個人所得 y_i を相対的限界消費性向 $\frac{a_i}{\bar{a}}$ で加重和したものとなる。

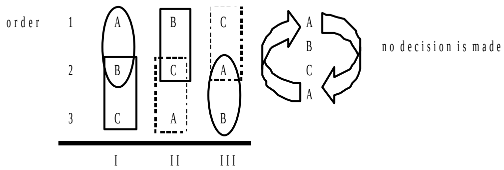
Aggregation

Nataf's agression result





Arrow's aggregation



ここで明らかなことは、$Y = \S y_i$ ではなく加重和になっていることから、消費性向の高い人の所得ほど集計量に大きな影響を与える。

他の財になれば a_i は変わり、集計量 Y も変わる。財の数だけ Y が計算できることになる。

(2) ミクロモデルと集計量の一定の形を前提として整合的なマクロモデルの形を求める。

$$Y = \S y_i \tag{6}$$

と財の需要とは独立に所得を定義する。このとき、集計需要関数がミクロの需要関数と同型

$$Q = aY + ^\circ \tag{7}$$

で与えられるとすれば、$a; ^\circ$ はどのような形になるだろうか。

まず、個人所得と集計所得の関係を線形回帰方程式で定める。

$$y_i = A_i Y + c_i \qquad i = 1; 2; \ldots ; n$$
$$Y = \S y_i \text{なので} \S A_i = 1; \quad \S c_i = 0$$

個人の需要関数を n 人の消費者全体について集計すると

$$\S q_i = \S a_i (A_i Y + c_i) + \S c_i$$
$$Q = (\S a_i A_i) Y + (\S c_i + \S a_i c_i) \tag{8}$$

このときのマクロパラメータ (®,°) とミクロパラメータ $(a_i ; c_i)$ との関係は、

$$a = \S a_i A_i \quad \text{ただし} \S A_i = 1$$
$$^\circ = \S c_i + \S a_i c_i \quad \text{ただし} \S c_i = 0 \tag{9}$$

マクロの限界消費性向はミクロの限界消費性向 a_i の加重平均、マクロの切片 γ はミクロの切片の和 $\sum c_i$ にある偏りを加えたものとなる。

マクロの限界消費性向 α も時系列の動きによって変化するウェイトを持つ加重平均。

マクロ需要関数のパラメータがミクロパラメータの平均値 $\bar{a} = \sum a_i / n$ あるいは $\sum c_i$ に対してどのような偏りがあるかを調べる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(a_i A_i) &= \frac{1}{n}\sum(a_i - \bar{a})(A_i - \bar{A}) \\
&= \frac{1}{n}\sum(a_i - \bar{a})(A_i - \frac{1}{n}) \\
&(\because \bar{A} = \frac{1}{n}\sum \bar{A} = \frac{1}{n}) \\
&= \frac{1}{n}\sum a_i A_i - \frac{1}{n}\bar{a} \qquad (10) \\
\mathrm{cov}(a_i c_i) &= \frac{1}{n}\sum(a_i - \bar{a})(c_i - \bar{c}) \\
&= \frac{1}{n}\sum(a_i - \bar{a})c_i \\
&(\because \bar{c} = \frac{1}{n}\sum c_i = 0) \\
&= \frac{1}{n}\sum a_i c_i \qquad (11)
\end{aligned}
$$

マクロパラメータは

$$
\begin{aligned}
a &= \sum a_i A_i = \bar{a} + \mathrm{cov}(a_i A_i) \\
\gamma &= \sum c_i + \sum a_i c_i = \sum c_i + n\,\mathrm{cov}(a_i c_i)
\end{aligned}
$$

マクロパラメータ $a; \gamma$ はミクロパラメータの平均値 $\bar{a}$ と総和 $\sum c_i$ とそれぞれの共分散の大きさによって決まる。

所得の集計量を単純な集計方法 $Y = \sum y_i$ で定めて, マクロ需要関数 $Q = aY + \gamma$ を統計的に計算すると, パラメータ $\alpha; \gamma$ はミクロのパラメータに対して偏りを生じる。

ミクロ需要関数を単純に集計すると、$Y = \sum a_i Y_i / \bar{a}$ となり全体所得 Y が個々の財の限界消費性向に依存する量として各財に対して相対的に決まってしまう。

最近のマクロ経済学で用いられる代表的個人モデル自体がおかしいのではなく、想定している行動と使っているデータの間の不整合に問題がある。

具体的にどういうことか。

$$
\mathrm{Max} \quad U = \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^t E(u(c_t^s)) \qquad (12)
$$

$$
s.t \quad \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t c_t = A_t + \sum_{t=0} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t y_t \qquad (13)
$$

一般的な１階条件（オイラー方程式）は

$$
u'(c_t) = \frac{1+r}{1-t} E(u'(c_{t+1})) \qquad (14)
$$

ここで効用関数の定式化を行い (c) を計量的に推計することが一般的である。

CARA 効用関数を変換すると、(c) 式は、

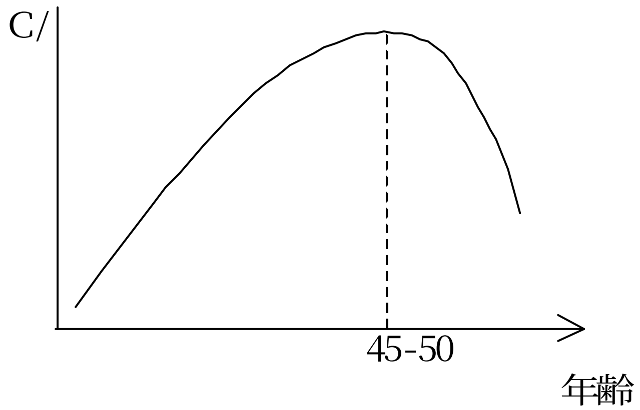
$$c_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \gamma c_t^{-\frac{1}{\sigma}} + \varepsilon_t \qquad (15)$$

ここで $\gamma = 1$ ならramdam walk、σ はconstant elasticity。

ところがこの c 消費支出に関しては、同一個人の消費ではなく、マクロの消費支出が用いられることが一般である。

ところで、ミクロデータをクロスセクションで見ると、個人個人の消費行動はかなり違っている。

ライフサイクルで年齢別に消費行動をプロットすると、



このようになる。つまり、年齢別に消費量がかなり違っていることがわかるし、限界的には 45-50 才以降は消費量が低下する。このようなミクロのデータを集計してマクロデータを作るということはどういうことか。

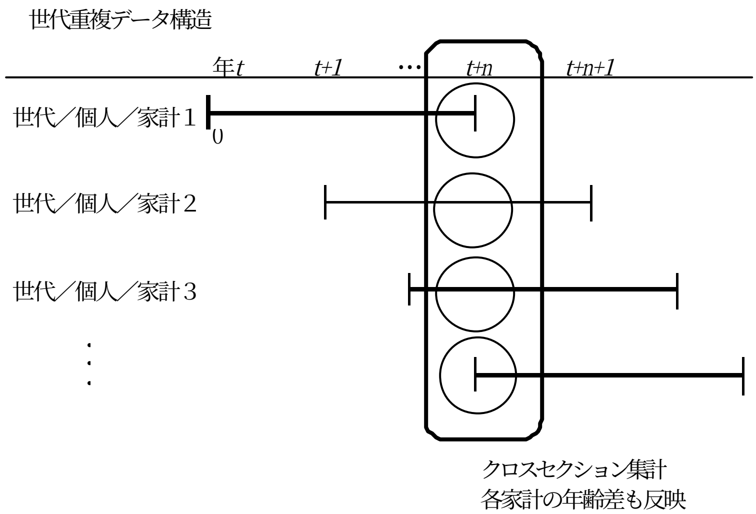
パネルデータの構造を考えてみよう。

	年 t 1970	$t+1$ 1971	…	$t+28$ 1998	$t+29$ 1999	
個人／家計 1	c_1^{t}	c_1^{t+1}		c_1^{t+28}	c_1^{t+29}	
個人／家計 2	c_2^{t}	c_2^{t+1}		c_2^{t+28}	c_2^{t+29}	時系列
個人／家計 3						
個人／家計 n	c_n^{t}	c_n^{t+1}		c_n^{t+28}	c_n^{t+29}	

クロスセクション集計
各家計の年齢差は
考慮しない

ところが家計は先に見たように、年齢階層別に行動パターンが違っている。パネルデータの構造で見たように、個人／家計は横並びで同一時点に生まれたのではない。

⇒ 重複世代（overlapping generations）モデルを考える必要がある。



各個人家計は自分の life-cycle 消費を最適化している。しかし、各世代の permanent income や社会保障その他の外生的制度が違う（ただし各世代はその情報をもっているとしよう）。それをクロスセクションでたし合わせたものが、マクロ集計量になる。

このデータを用いて (17) のような式をテストしても、クロスセクション集計での書く世代 (各年齢階層) の分布が変化するために生じるノイズが入り、モデルが想定しているような異時点間の最適化をしていることにはならない。

最も簡単な２期間 OLG モデルを考える。t 時点で世代１の最適化。

$$\mathrm{Max}\ U(C_t^0, C_{t+1}^0) = \alpha \log C_t^0 + (1-\alpha)\log C_{t+1}^0 \tag{16}$$

$$s.t.\ C_t^0 + \frac{1}{1+\gamma}C_{t+1}^0 = y_t \ (\text{所得は若い世代のときだけある})$$

$$\begin{cases} C_t^0 = Ay_t^0 \\ C_{t+1}^0 = By_t^0 \end{cases} \tag{17}$$

where A = 金利、選好パラメータの関数
B = 同上

これを t + 1 時点でクロスセクション集計すると、マクロ消費は

$$\begin{aligned} C_t &= C_{t+1}^1 + C_{t+1}^2 \\ &= By_t^1 + Dy_{t+1}^2 \end{aligned} \tag{18}$$

となる。
また t 時点のクロスセクション集計は

$$\begin{aligned} C_t &= C_t^0 + C_t^1 \\ &= Xy_{t-1}^0 + Zy_t^1 \end{aligned} \tag{19}$$

これを先ほどの (17) のマクロ最適化モデルに当てはめると

$$
\begin{aligned}
&C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} = \gamma C_t^{-\frac{1}{\sigma}} + \varepsilon_{t+1} \\
&(By_t^1 = +Dy_{t+1}^2)^{-\frac{1}{\sigma}} = \gamma(Xy_{t-1}^0 + Zy_t^0) + \varepsilon_{t+1} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

世代家計１の最適化であれば y_t のみの関数になり OK。しかし実際には t+1 期の社会構成員と t 期の社会構成員は世代１のみ共通するが、それ以外は違っており、マクロ最適化が成り立つ可能性は全くない。しかも各世代は最適化行動を行っている。

ここでの問題は 使っているデータ の内訳を十分理解し テストしたい理論 との整合性を保つようにできれば分布情報などを用いて調整しなければならないということである。

マクロ消費モデルでよくテストされる ライフサイクル仮説 では

$$C_t = \alpha + \beta W_t + \gamma Age + \cdots$$

W_t ＝資産、Age ＝ 65 歳以上人口比率などを用いてマクロ推計されるが、これは厳密な意味で個人のライフサイクル最適化行動から導かれたモデルとはまった区別のものである。

ではどのような調整がなされるべきか。

(1) ミクロデータが使えるならそれを使う（これ以外の方式は何らかの形で問題が残る)。

(2) 集計データを用いるのならば、データに修正を加えるか、モデルに修正を加える。

$\Downarrow$

具体的にどのような修正を行うべきか。これについては、Exact Aggregation の理論として論じる。

References

[1] Lewbel, Arthur (1989) “Exact Aggregation and Representative Consumer,” Quarterly Journal of Economics, (1989) pp.621-633.

[2] ———— (1988) “Exact Aggregation, Distribution Parameterizations and A Nonlinear Representative Consumer,” Advances in Econometrics, Vol.7, pp.253-90.

[3] Stoker, T.M. (1986) “Simple Tests of Distributional Effects on Macroeconomic Equations,” Journal of Political Economy 94(4), pp.763-95.

[4] ——— (1993) “Empirical Approaches to the Problem of Aggregation over Individuals,” Journal of Economic Literature, 31 (December), pp.1827-74.

[5] Nicol, C.J. (1989) “Testing a Theory of Exact Aggregation,” Journal of Business & Economics Statistics, 7(2), pp.259-265.