第４講　物価指数理論

4.1　効用関数と需要関数

消費者（生産者）物価指数の基本的な考え方

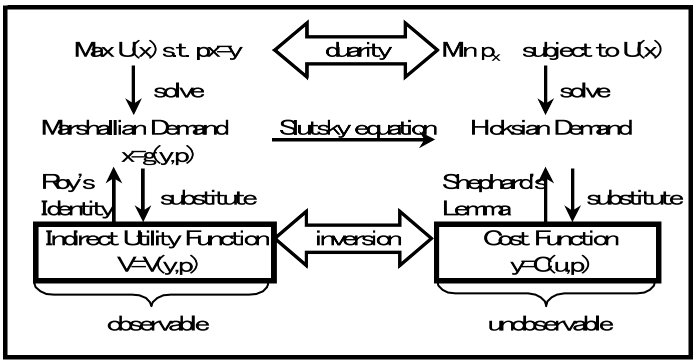
⇒ 二つの価格状態における一定生活水準の最小費用の比率

$$\text{効用関数 } U = \begin{cases} \text{(1) 単調増加関数（monotonicity）} \\ \text{(2)quasi-convex（凸性）} \\ \text{(3)differentiability} \end{cases}$$

消費者選好の理論

⇒ 所得の中で最大の効用が得られるように財を組み合わせて購入する（効用最大化の問題）

消費者需要は次のような構造を持っている。[1]



間接効用関数を求め、それをさらに所得 y について解けば費用関数が求められる。

これを

$$y = c(u^*, p_i)$$

とすると、２時点 $0, t$ の価格をそれぞれ p_i^0, p_i^t として２時点の費用を同一効用水準 u^* の下で比較すると

$$I_{0t} = \frac{c(u^*, p_i^t)}{c(u^*, p_i^0)}$$

という物価指数が定義される。これを**定効用物価指数**（constant utility price index number）あるいは**真の物価指数**（true price index number）という。

この問題を解くためには効用関数の形式を与える必要があるが、どの効用関数型から需要関数として望ましいものが導けるか、あるいは消費者行動として整合的なものが得られるかという観点から選ぶしかない。

---

[1] この関係については Deaton and Muellbauer (1980b, p.41) や Mas-Colell, Whinston and Green (1995,p.75) などを参照。

4.2 効用関数の特定化

一般的性質について[2]

（1）加法性（additivity & separability）

$$u(q_1, q_2, \ldots q_n) = u_1(q_1) + u_2(q_2) + \ldots u_n(q_n)$$

これから

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{du_i}{\partial q_i} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_i} = 0$$

財の限界効用はその消費量のみによって決まり他の財の消費量とは無関係である。ただし、これは他の財の価格変動が財の需要に対して無関係であることは意味しない。

（2）相似拡大性（homotheticity）

効用関数が次の形

$$u = F\left[f(q_1, q_2, \ldots, q_n)\right]$$

で表されるとき、効用関数は homothetic であるという。

ここで F は１変数の正の単調増加関数で、$F(0) = 0$ であり、f は n 変数の同次関数である。同次効用関数はすべて homothetic である。このとき、各財の所得弾力性は恒常的に１であり、財の購入量は所得に比例する。またこのとき費用関数は

$$C(p, u) = g(u) \cdot h(p)$$

と分解することができ、効用水準に対して独立に物価指数を計算することができる。

（3）効用関数の類型

指数型モデル

$$U(q) = \Pi q_i^{\beta i} \qquad or \qquad U(q) = \Sigma \beta_i \ln q_i$$

このモデルは、加法的かつ相似拡大的である。

エンゲル曲線（q_i が所得 y のみの関数 $q_i = C_i(y)$ で表されるとき、これをエンゲル関数という）は線形である。

後述するコブ・ダグラス関数、ストーン・ギアリー関数がこれに属する。

加法対数（Addilog）モデル

$$U(q) = \Sigma \alpha_i q_i^{\beta i} \qquad or \qquad U^*(\frac{y}{p}) = \Sigma \alpha_i (\frac{y}{p_i})^{\beta i}$$

すべての価格が所得に比例的に変化すると、消費者の最大効用は変化しない。

２次式モデル

$$u(q) = \Sigma \alpha_i q_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} q_i q_j$$

[2]本節の議論は全面的に森田 (1989、第 9 章、pp.183 − 200) に依拠している。

エンゲル関数は線形である。$\alpha_{ij}=0$ のときは $u=\Sigma\alpha_i q_i$ で単純な加法的線形関数になる。

$$f(q)=\left[\sum_i\sum_j\alpha_{ij}q_i^{\beta\gamma}q_j^{\beta(1-\gamma)}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

Denny(1974) の定式。CES 関数、コブ・ダグラス関数を特別形として示すもので、特に $\gamma=\frac{1}{2}$ とすると、

$$f(q)=\left(\sum_i\sum_j\alpha_{ij}q_i^{\frac{\beta}{2}}q_j^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

となる。

(i) $i\neq j$ のとき $\alpha_{ij}=0$ ならば $f(q)=\left(\Sigma\alpha_{ii}q_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$
CES 関数となる。

(ii) $i\neq j$、$\alpha_{ij}=0$ で $\beta\to 0$ のとき $f(q)=\Pi q_i^{dii}$
コブ・ダグラス関数となる。

(iii) $\beta=1$ のとき $f(q)=\sum_i\sum_j\alpha_{ij}q_i^{\frac{1}{2}}q_j^{\frac{1}{2}}$
レオンティエフ型関数となる。

超越対数（Translog）モデル

$$\ln f(q)=\alpha_0+\sum_i\alpha_i\ln q_i+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\gamma_{ij}\ln q_i\ln q_j$$
$$\text{ただし}\quad \Sigma\alpha_i=1,\quad \Sigma\gamma_{ij}=0,\quad \gamma_{ij}=\gamma_{ji}$$

Christensen, Jorgenson, and Lau(1975) は２回微分可能な任意の１次同次関数が超越対数関数によって近似できることを示した（一般２次形式関数が $\beta\to 0$ のとき超越対数関数型になる）。

（４）特定化

ストーン・ギアリー効用関数（線形支出体系、LES）

$$U=\Sigma\beta_i\ln(q_i-\gamma_i),\quad \Sigma\beta_i=1$$

i 財の限界効用は

$$\frac{\partial u}{\partial q_i}=\frac{\beta_i}{q_i-\gamma_i}$$

１階条件 $\frac{\partial u}{\partial q_i}=\lambda p_i$ を代入して

$$\lambda(p_iq_i-p_i\gamma_i)=\beta_i\quad i=1,2,\ldots,n$$

$\Sigma p_iq_i=m,\Sigma\beta_i=1$ より

$$\lambda=(y-\Sigma p_i\gamma_i)^{-1}\quad j=1,2,\ldots,n$$

$$p_iq_i=p_i\gamma_i+\beta_i(y-\sum_i p_i\gamma_i)$$

これが需要関数の線形支出体系として知られているものである。この効用関数自体は相似拡大的ではないが、最低必要量 γ に関して相似拡大的である。

$$q_i = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}(y - \Sigma p_i \gamma_i)$$

これを効用関数に代入して間接効用関数が定まる。

$$u^* = \Sigma \beta_i \ln \beta_i + \ln(y - \Sigma p_i \gamma_i) - \Sigma \beta_i \ln p_i$$

これを y について解けば、費用関数 $C(p,u)$ が得られる。

$$C(p,u) = e^{c+u} \Pi p_i^{\beta i} + \Sigma p_i \gamma_i \quad \text{ただし } C = -\Sigma \beta_i \ln \beta_i$$

ここで効用水準を基準時点に固定すると（つまり U^0）、理論物価指数は次の形になる。

$$I_{0t}(U^0) = \frac{e^{C+U^0} \pi (p_i^t)^{\beta i} + \Sigma p_i^t \gamma_i}{e^{C+U^0} \pi (p_i^0)^{\beta i} + \Sigma p_i^0 \gamma_i}$$

これは次のように転換できる。

$$\begin{aligned} I_{0t}(U^0) &= \phi^0 \pi \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)^{\beta i} + (1 - \phi^0) \Sigma \rho_i^0 \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) \\ \text{ここで} \quad \phi^t &= (y^t - \Sigma p_i^t \gamma_i)/y^t \\ \rho_i^t &= p_i^t \gamma_i / \Sigma p_i^t \gamma_i \end{aligned}$$

右辺第一項は価格比率（p^t/p^0）の加重幾何平均、ウェイト β_i は余剰所得の各財に対する配分率である。右辺第二項は価格比率の加重幾何平均、ウェイト ρ_i は最低生活物質（γ）を購入するための費用の指数、第一項は余剰物資購入に必要な費用の指数であり、両者を総合するためのウェイト ϕ は余剰物資費用の総費用に対する割合である。

基準時消費量のラスパイレス指数は

$$L = \frac{\Sigma p_i^t q_i^0}{\Sigma p_i^0 q_i^0}$$

の消費量 q が線形支出体系に従うとする。

$$q_i^0 = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i^0}(y^0 - \Sigma p_i^0 \gamma_i^0)$$

ラスパイレス式は次の形で示すことができる。

$$L = \phi^0 \Sigma \beta_i \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) + (1 - \phi^0) \Sigma \rho_i^0 \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right)$$

この式と理論物価指数の違いは、理論式右辺第一項の価格比率の幾何平均（ウェイト β_i）がラスパイレス式では算術平均ウェイトに置き換えられていることだけである。算術平均は幾何平均より大きいのが普通であるから、ラスパイレス物価指数の値は理論物価指数よりも一般に大きい。ラスパイレスでは、消費需要の代替効果が考慮されていない分だけ上方バイアスが生じているのである。

同様に、比較時点 t の効用水準 U^t 下での理論物価指数は

$$
\begin{aligned}
I_{0t}(U^t) &= \frac{e^{C+U^t}\pi(p_i^t)^{\beta i} + \Sigma p_i^t \gamma_i}{e^{C+U^t}\pi(p_i^0)^{\beta i} + \Sigma p_i^0 \gamma_i} \\
&= \left[\phi^t \pi \left(\frac{p_i^0}{p_i^t}\right)^{\beta i} + (1-\phi^t)\Sigma\rho_i^t \left(\frac{p_i^0}{p_i^t}\right)\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

比較時消費量固定のパーシェ物価指数 p は

$$
p = \frac{\Sigma p_i^t q_i^t}{\Sigma p_i^0 q_i^t} = \left[\phi^t \pi \left(\frac{p_i^0}{p_i^t}\right)^{\beta i} + (1-\phi^t)\Sigma\rho_i^t \left(\frac{p_i^0}{p_i^t}\right)\right]^{-1}
$$

両者の違いは右辺のかっこ内の第一項だけであり、パーシェ式の方が理論指数より小さくなる。

実際、このような理論物価指数を計算するためには、パラメータ βi との γ_i 推定が必要である。現実の物価指数で使われているすべての品目について需要関数を推計することには困難が伴う。

５－10 品目ぐらいの大きなカテゴリー別の需要関数が推計されることが多い。

CES 効用関数

$$
u = (\Sigma\alpha_i q_i^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}} \quad \alpha_i > 0,\ \rho > -1
$$

この関数は相似拡大的であって、２財間の代替弾力性 $\sigma = 1/(1+\rho)$ は一定かつすべての財について同一である。$\rho \to 0$ の時はコブ・ダグラス型になる。１階条件より $\partial u/\partial q_i = u^{1+\rho}\alpha_i q_i^{-(1+\rho)} = \lambda p_i$ であるから、$\sigma = 1/(1+\rho)$ を代入して

$$
q_i = u\lambda^{-\sigma}\alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma}
$$

これを $y = \Sigma p_i q_i$ に代入すれば

$$
\lambda^{-\sigma} = yu^{-1}(\Sigma\alpha_i^\sigma p_i^{1-\sigma})^{-1}
$$

より需要関数は

$$
q_i = y\alpha_i^\sigma p_i^{-\sigma}(\Sigma\alpha_i^\sigma p_i^{1-\sigma})^{-1}
$$

間接効用関数は

$$
u^* = y(\Sigma\alpha_i^\sigma p_i^{1-\sigma})^{-\frac{1}{(\sigma-1)}}
$$

であり、これを $y = C(p,u)$ について解けば費用関数が得られる。

$$
C(p,u) = u^*(\Sigma\alpha_i^\sigma p_i^{1-\sigma})^{\frac{1}{(1-\sigma)}}
$$

理論物価指数は

$$
I_{0t} = \frac{C(p^t,u)}{C(p^0,u)} = \frac{u^*\left[\Sigma\alpha_i^\sigma(p_i^t)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}}{u^*\left[\Sigma\alpha_i^\sigma(p_i^0)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}} = \left[\Sigma\alpha_i\left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)^{1-\sigma}\right]^{1/1-\sigma}
$$

ここで $a_i = \frac{\alpha_i^\sigma(p_i/p_k)^{1-\alpha}}{\Sigma\alpha_i^\sigma(p_i/p_k)^{t-\alpha}} = \frac{p_i q_i}{\Sigma p_i q_i}$ である。つまり、理論物価指数は価格比率の $(1-\sigma)$ 次の加重平均であって、需要関数のパラメータ σ に依存している。ウェ

イト a_i は各財の総費用の比である。CES 関数は相似拡大的であるから、基準時の効用水準には依存しない。

Elasticity of Substitution
代替弾力性 $\sigma = o$ の時は

$$\frac{\Sigma p_i^0 q_i^0 \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)}{\Sigma p_i^0 q_i^0} = \frac{\Sigma p_i^t q_i^0}{\Sigma p_i^0 q_i^0}$$

ラスパイレス式となる。$\sigma = 2$ の時は価格比率の加重調和平均（ウェイト $p_i^0 q_i^0$）となる。$\sigma \to 1$ で効用関数がコブ・ダグラス型の時は

$$I_{0t} = \pi \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)^{a_i} \qquad a_i = \frac{\alpha_i}{\Sigma \alpha_i}$$

となる。コブ・ダグラス型効用関数に対応する理論物価指数は加重幾何平均式である。
比較時の支出割合による理論物価指数は

$$I_{0t} = \left[\Sigma a_i^t \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)^{-(1-\sigma)}\right]^{-1/(1-\sigma)}$$

と表せる。パーシェ指数は

$$p = \frac{\Sigma p_i^t q_i^t}{\Sigma p_i^0 q_i^t} = \left[\Sigma a_i^t \left(\frac{p_i^t}{p_i^0}\right)^{-1)}\right]^{-1}$$

であるから $\sigma = 0$ のケースに相当し、一般に理論的物価指数より小さい。

一般２次形式効用関数
Diewert(1976) は効用関数 $f(g)$ が 2 回微分可能で 1 次同次の任意の正関数であるとき、次の対称型 2 次形式

$$f_\beta(q) = \left(\sum_i \sum_j \alpha_{ij} q_i^{\frac{\beta}{2}} q_j^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad \beta \neq 0$$

が関数 $f(g)$ の 2 次微分近似となることを示した。
この式に対応する費用関数は

$$C_\beta(p) = \left(\sum_i \sum_j b_{ij} p_i^{\frac{\beta}{2}} p_j^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\frac{1}{\beta}} h(u), \quad b_{ij} = b_{ji},\ \beta \neq 0$$

$h(u)$ は $u = f_\beta(q)$ の単調正関数である。Diewert は指数算式が $f_\beta(q), C_\beta(p)$ に対応する場合に、その指数を**superative** であると呼んだ。
物価指数と数量指数を β 次の平方平均で定める。

$$P_\beta = \left[\frac{\Sigma (p^t/p^0)^{\beta/2} w^0}{\Sigma (p^0/p^t)^{\beta/2} w^t}\right]^{1/\beta}$$

$$Q_\beta = \left[\frac{\Sigma (q^t/q^0)^{\beta/2} w^0}{\Sigma (q^0/q^t)^{\beta/2} w^t}\right]^{1/\beta}$$

ここで $w = pq/\Sigma pq$

Diewert は効用関数 f_β が quasi-concave であって $q = q^t$ が $p = p^t$ に対する $f_\beta(q)$ 最大化の解であるとき、数量指数について次の関係が成り立つことを示した。

$$f_\beta(q^t)/f_\beta(q^0) = Q_\beta$$

また費用関数 $C_\beta(p)$ に対応する効用関数を $\tilde{f}_\beta(q)$ とし、$q = q^t$ が $p = p^t$ に対する $\tilde{f}_\beta(q)$ 最大化の解であるとき、物価指数について次の関係が成り立つことを示した。

$$C_\beta(p^t)/C_\beta(p^0) = P_\beta$$

すなわち、P_β は効用関数 $\tilde{f}_\beta(q)$ に対する最良理論物価指数であり、Q_β は効用関数 $f_\beta(q)$ に対する最良理論数量指数である。

β は需要関数から推計されるべきパラメータであるが、β が特別の値をとるときの P_β の形として示すことができる。

例えば、$\beta = 2$ の時

$$P_2 = \tilde{P}_2 = \left[\frac{\Sigma p^t q^0 \cdot \Sigma p^t q^t}{\Sigma p^0 q^t \cdot \Sigma p^0 q^t}\right]^{\frac{1}{2}}$$

となり、フィッシャーの理想算式になる。フィッシャー式の下になっている２次式の同次効用関数は

$$f_2(q) = \left(\sum_i \sum_j \alpha_{ij} q_i q_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

に対応する理論物価指数ということになる。

$\beta = 1$ の時

$\tilde{p}_1 = \frac{\Sigma p^t \sqrt{q^0 q^t}}{\Sigma p^0 \sqrt{q^0 q^t}}$,	$p_1 = \frac{\Sigma w^0 (p^t/p^0)^{1/2}}{\Sigma w^t (p^t/p^0)^{-1/2}} = \frac{\Sigma q^0 \sqrt{p^0 p^t}/\Sigma p^0 q^0}{\Sigma q^t \sqrt{p^0 p^t}/\Sigma p^t q^t}$
対する効用関数は	費用関数は
$f_1(q) = \sum_i \sum_j a_{ij} q_i^{1/2} q_j^{1/2}$	$C_1(p) = h(u) \sum_i \sum_j b_{ij} p_i^{1/2} p_j^{1/2}$
一般線形効用関数	一般レオンティエフ費用関数

$\beta \to 0$ の時、２次形式効用関数はトランスログ型となる。

２次近似定理（タイル・クローク）

$f(x)$ が任意の２次の実関数で微分可能であるとき、次の近似式が成り立つ。

$$f(x^t) - f(x^0) = \frac{1}{2}\left(f_t' - f_0'\right)\left(x^t - x^0\right)$$

ここで $f_t' = \frac{\partial f(x)}{\partial x^t}$ とする。

この近似式を利用すると、効用関数に対応する費用関数は次のように表せる。

$$\ln C(p) = \alpha_0^* + \Sigma \alpha_i^* \ln p_i + \frac{1}{2} \Sigma\Sigma \gamma_{ij}^* \ln p_i \ln p_j$$

ここで $\Sigma\alpha_i^* = 1$，$\gamma_{ij}^* = \gamma_{ji}^*$，$\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}^* = 0$

これに対応する理論物価指数は、次のように表せる。

$$p_0 = \frac{C(p^t)}{C(p^0)} = \pi\left(\frac{p^t}{p^0}\right)^{(w^0+w^t)/2}$$

これは、Theil の**ロッテルダム物価指数算式**である。

Deaton and Muellbauer (1980) は、ロッテルダム・モデルとトランスログ・モデルよりさらに一般的な**Almost-Ideal Demand System (AIDS)** モデルを提示した。

費用関数 $\ln C(u.p) = (1-u)\log\{a(p)\} + u\log\{b(p)\}$

$a(p)$ は必要費用、$b(p)$ は飽和状態の費用を表す。

$$\tfrac{\partial \ln C}{\partial \ln p_i} = \tfrac{p_i x_i}{C} = w_i \quad i\text{ 財の支出比率}$$

Deaton and Muellbauer は $a(p)$, $b(p)$ を具体化することで次のような需要関数を導いた。

$$w_i = \alpha_i + \Sigma\gamma_{ij}\log p_j + \beta_i \log\frac{x}{p}$$

ここで p は次のように定義される価格指数である。

$$\log p = \alpha_0 + \sum_k \alpha_k \log p_k + \frac{1}{2}\sum_j\sum_k \gamma_{kj}\log p_k \log p_j$$

現在の研究の最前線は、この AIDS モデルに家計関連変数をさらに加えて一般化したものを推計し、また価格指数を作成することにある。

これら固定効用関数アプローチによる理論物価指数の限界は、効用自体が変化するということであり、それに対応した**連鎖指数**と**フィッシャー理想算式**を整合的に満たすような**理論的枠組み**（Diewert の一般 2 次形式効用関数等）の**構築**が求められているのである。

4.3 応用分野

1. 卸売物価指数の見直し（日銀調査統計局）
2. アジア通貨バスケットの作成
3. 株価指数の見直し（クラッシュ時の情報として有効か？）
4. マネーサプライの見直し（ディビジア・マネー）
5. 消費税導入の価格効果
6. 資本ストック統計の見直し
7. その他

References

[1] 森田優三（1989）『物価指数理論の展開』、東洋経済新報社。

[2] Chirstensen, L.R., Jorgenson, D.W., and Lau, L.J. (1975) "Transcendental Logarithmic Production Functions," *American Economic Review*, 65(3), pp.367-383.

[3] Deaton, A. and Muellbauer, J.(1980a) "An Almost Ideal Demand System," *American Economic Review*, 70(3), pp.312-326.

[4] Deaton, A. and Muellbauer, J. (1980b) *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge University Press.

[5] Denny, M. (1974) "The Relationship between Functional Forms for the Production System," *Canadian Journal of Economics*, 7(1), pp.21-31.

[6] Diewert, W. Erwin (1976) "Exact and Superlative Index Numbers," *Journal of Econometrics* 4(2), pp.114-145.

[7] Mas-Colell, A., Whinston, M.D. and Green, J.R. (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford University Press.