第３講　指数の経済理論

簡単化のため、２財モデルを考える。消費者の無差別曲線を考えてみよう[1]。基準時点において価格（$p_{01}; p_{02}$）が与えられたときに消費者の所得 y_0 を使って、

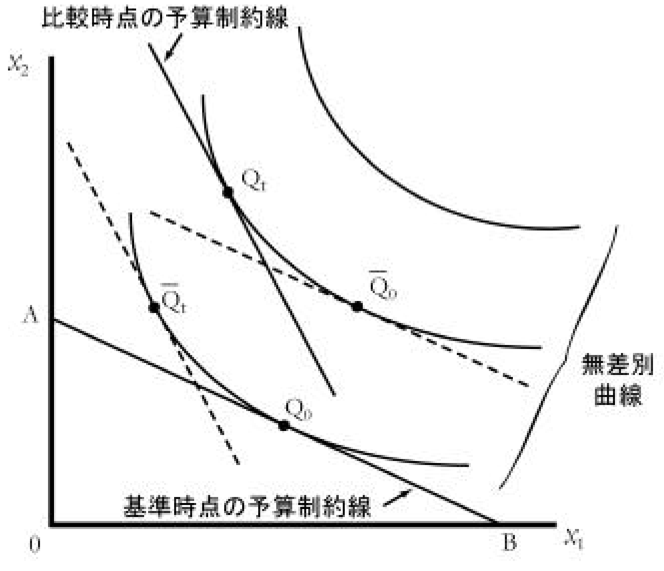
$$y_0 = \sum_i p_{0i}x_i = p_{0i}x_i + p_{02}x_2$$

という予算制約の下で効用を最大にするように購入量（$x_1; x_2$）を定める。その結果、各財の購入量が（$q_{01}; q_{02}$）となったとする t 時点における価格（$p_{t1}; p_{t2}$）と所得 y_t が与えられた時に、

$$y_t > \sum_i p_{ti}x_i = p_{t1}x_1 + p_{t2}x_2$$

という予算制約の下で効用を最大にする財の組み合わせが（$q_{t1}; q_{t2}$）となったものとする。

２時点における価格水準を比較するには、「同じ効用を得るために必要な金額の比」を用いるのが自然である。これを真の指数あるいは効用不変価格指数と呼ぶ。



AB 線で表される予算制約式の下での効用最大化は $Q_0 = (q_{01}; q_{02})$ で達成される。t 時点における価格体系下では $Q_t = (q_{t1}; q_{t2})$ で達成される。

[1]本節の議論は中村・新家・美添・豊田（1992, pp.88-99）に基づいている。

基準時点と同じ効用 u_0 を得るための最小費用の比として定義される真の指数を $I(u_0)$ と書けば、

$$I(u_0) = \frac{\hat{y}_t}{y_0} = \frac{\sum_i p_{ti}\hat{q}_{ti}}{\sum_i p_{0i}q_{0i}}$$

となる。比較時点と等しい効用を得るための最小費用として定義される真の指数 $I(u_t)$ は、

$$I(u_t) = \frac{y_t}{\hat{y}_0} = \frac{\sum_i p_{ti}q_{ti}}{\sum_i p_{0i}\hat{q}_{0i}}$$

となる。

図の $\hat{Q}_2$ を通る接線は、価格体系（p_{t1}, p_{t2}）における $\hat{y}_t$ に対応する予算制約線とみなすことができる。無差別曲線が原点に対して凸であることから、$\hat{Q}_t$ と同じ効用を与える点 Q_0 はこの直線の右上側に位置するはずであり、$\sum_i p_{ti}\hat{q}_{ti} < \sum_i p_{ti}q_{0i}$ が成り立つ。この両辺を $\sum_i p_{0i}q_{0i}$ で割ると、$I(u_0) < P_L(t)$ が導かれる。

同様に、Q_t と $\hat{Q}_0$ を比べると、$\sum_i p_{0i}\hat{q}_{0i} < \sum_i p_{0i}q_{ti}$ が導かれ、$I(u_t) > p_P(t)$ が成立する。

ラスパイレス指数とパーシェ指数は、真の指数の上限 $I(u_0)$ との下限 $I(u_t)$ を与えていることになる。

このように、効用不変の下での指数という考え方は、理論上極めてエレガントであるが、効用関数が時間的に変化しない（taste change が起こらない）ことが前提となっているが、これは実証することが難しい。

ラスパイレス指数とパーシェ指数の関係

ラスパイレス指数とパーシェ指数がある意味で真の指数の上限と下限になっていることを見たが、この２つの指数の間にはボルトキヴィッチ（Bortkiewicz, 1922-24）の関係式として知られている関係がある。

簡単化のために、$x_i = p_{ti}/p_{0i}$（個別価格指数）; $y_i = q_{ti}/q_{0i}$（個別数量指数）; $w_i = p_{0i}q_{0i}/\sum p_{0i}\cdot q_{0i}$ ($\sum w_i = 1$) とすると、w_i をウェイトとする x, y の加重平均はそれぞれラスパイレスの価格指数、数量指数となる。すなわち、

$$P_L = \bar{x} = \sum w_i x_i \quad Q_L = \bar{y} = \sum w_i y_i$$

が成り立つ。パーシェの価格指数は次のように表せる。

$$P_p = \frac{\sum w_i x_i y_i}{\sum w_i y_i} = \frac{\sum w_i x_i y_i}{Q_L}$$

以上から、w_i をウェイトとする x と y の共分散は、

$$S_{xy} = \sum w_i(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum w_i x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = Q_L(P_P - P_L)$$

であることが確かめられる。そこで w_i をウェイトとする x と y の標準偏差を

$$S_P = \sqrt{\sum w_i(x_i - \bar{x})^2}, \quad S_Q = \sqrt{\sum w_i(y_i - \bar{y})^2}$$

と表せば相関係数の定義 $r = S_{xy}/S_P S_Q$ より、

$$\frac{P_P - P_L}{P_L} = r\frac{S_P}{P_L}\cdot\frac{S_Q}{Q_L}$$

ここで、S_P, S_Q, P_L, Q_L は正であるから、左辺の符号は相関係数 r に依存していることがわかる。一般に、他の条件が一定であれば、価格の上昇した財の購入量は相対的に小さくなるから、この相関係数はマイナスになるはずである。したがって、$P_P < P_L$ となるのが普通である。しかし逆になる可能性も残っている。また r を一定とすれば、ラスパイレス指数とパーシェ指数の隔たりは標準偏差 S_P, S_Q に比例する。これは、一般には両指数が時間の経過とともに離れていくことを意味している。

より具体的に効用関数の形を特定化して議論しよう。

コブ・ダグラス型効用関数

$$u(q_1, \dots, q_n) = \prod_{i=1} q_i^{w_i} = q_1^{w_1} q_2^{w_2} q_3^{w_3} \cdots q_n^{w_n}$$

$$\sum w_i = 1 \quad w_i > 0$$

所得 y と価格 $p_1 \dots p_n$ が与えられたとき、制約条件 $y = \sum_i p_i q_i$ の下で効用を最大化すると、その解は次のようになる。

$$Max\, u(q_1, \dots, q_n) - \lambda\left(y - \sum p_i q_i\right)$$

を微分して 0 とおいた一階条件から求められる

$$q_1 = \left(\frac{w_i}{p_i}\right) y$$

$$u = u(q_1, \dots, q_n) = \prod_{i=1}\left(\frac{w_i}{p_i}\right)^{w_i} y$$

$\Rightarrow\ y = [\pi(w_i/p_i)^{w_i}]^{-1} u$ は u という効用を得るために必要な最小コストを表している。

この関係を用いると、２つの時点の価格体系から、同一の効用を得るために必要なコストの比は、効用 (u) を一定とする価格指数として表せる。

$$p_{(t)} = \frac{\left[\pi(w_i/p_{ti})^{w_i}\right]^{-1} u}{[\pi(w_i/p_{0i})^{w_i}]^{-1} u} = \pi\left(\frac{p_{ti}}{p_{0i}}\right)^{w_i}$$

これは効用水準には依存しない。ここで効用最大化条件より、ウェイトは $w_i = \frac{(p_i q_i)}{\sum p_i q_i}$ となっていることがわかる。特に 0 時点の価格と数量から w_i を定めれば、上式は品目の支出額をウェイトとした加重幾何平均となっている。

CES 型効用関数

$$u(q_1, \dots q_n) = \left[\sum_{i=1} c_i q_i^{-k}\right]^{-1/k} \qquad k > -1 \quad (k \neq 0); \quad \sum c_i = 1; \quad c_i > 0$$

代替弾力性（elasticity of substitution）とは、購入量の比 (q_i/q_j) の相対価格の比 (p_i/p_j) に関する弾力性 $s = \frac{\partial \log(q_i/q_j)}{\partial \log(p_i/p_j)}$ で表され、CES 型関数では代替弾力性が $s = 1/(1+k)$ で一定となる。ここで $k \to 0 (s \to 0)$ の時、コブ・ダグラス関数が得られる。

$y = \sum p_i q_i$ の下で効用最大化とすると、次の解が得られる。

$$q_i = \left[\sum_i c_i^s p_i^{1-s}\right]^{-1} c_i^s p_i^{-s} y \quad s = \frac{1}{1+k}\text{は代替弾力性}$$

最大効用は q_i を u に代入したものであり、

$$u = \left(\sum_{i=1} c_i^s p_i^{1-s}\right)^{-1/(1-s)} y$$

であり、逆に u という水準の効用を得るために必要な最小コストは、この式を y について解いて

$$y = \left(\sum_{i=1} c_i^s p_i^{1-s}\right)^{1/1-s} u$$

となる。ここで同一の効用を得るために必要なコスト比は、

$$p_{(t)} = \frac{\left\{\sum c_i^s p_{ti}^{1-s}\right\}^{\frac{1}{1-s}} u}{\left\{\sum c_i^s p_{0i}^{1-s}\right\}^{\frac{1}{1-s}} u} = \left[\frac{\sum c_i^s p_{ti}^{1-s}}{\sum c_i^s p_{0i}^{1-s}}\right]^{\frac{1}{1-s}}$$

で与えられ、効用水準には依存しない。

ここで $p_i q_i \propto c_i^s p_i^{1-s}$ と表せる。支出ウェイトを $w_i = \frac{p_i q_i}{\sum p_i q_i}$ とおくと、$w_i \propto c_i^s p_i^{1-s}$ であり、基準時点の p_{0i}, q_{0i} にこれを用いれば

$$p_{(t)} = \left[\sum w_i \left(\frac{p_{ti}}{p_{0i}}\right)^{1-s}\right]^{\frac{1}{1-s}}$$

となる。これは個別価格指数の $(1-s)$ 次加重平均と呼ばれる。$s = 0$ のときは代替弾力性がゼロとなり、ラスパイレス式が真の指数と一致する場合である。

これまでの効用不変価格指数では、実際には発生していない想定上の状態を基準状態と比較したもので、比較の基準として効用不変という条件を設けたものである。これは言わば比較静学の問題設定であって、経済全体が動学的に変化しているときには必ずしも有効な分析手法ではない。

現在、多くの国の消費者物価指数はラスパイレス指数に基づいているが、基準時点が古くなるに従って指数に偏りが生じてくる。これは、①基準時点と比較時点の間隔が離れるにつれて、実際の価格水準の変動が過大あるいは過小に評価される恐れがある。その差が大きくなれば基準時を変更する必要が生じてくる。②離れた 2 時点間の比較では、消費 (生産) 構造が大きく異なってくる。

これらの問題を解決するために考えられたのが、基準時点を固定せずに、一定期間 (例えば、5 年、10 年) ごとに基準時点を変えて計算された別々の指数系列を接続する方法である。例えば、鉱工業指数 (経済産業省) は旧指数を定数倍して新指数と接続する方法を用いている。このような指数は元の指数と区別して接続指数と呼ぶ。

これを 2 時点間で連続的に接続したものが連鎖指数である。これは次のように表すことができる。

$$\text{時点 } 0 \underbrace{\quad}_{p_{01}} 1 \underbrace{\quad}_{p_{12}} 2 \underbrace{\quad}_{p_{23}} 3 \cdots (t-1) \underbrace{\quad}_{p_{t-1,t}} t$$

$$\text{連鎖指数 } p_{0t} = p_{01} \times p_{12} \times p_{23} \times \cdots \times p_{t-1,t}$$

この指数では、毎期ウェイトが変更されるため自然に接続される。基準時点の変更指数の接続等についての問題は生じない。

この指数では価格と同時に数量に関する情報が毎期必要であり、そのためのコストが大きい。実際にはある特定期間ウェイトは固定することが多い。このようにウェイトを固定して求めた連鎖指数とラスパイレス指数との間の差は小さいことが知られている。

このような連鎖指標の中で最も重要なのがディヴィジア指数である。

ディヴィジア指数[2]

個々の財の価格を p_{it}、数量 q_{it} をとすると、ある期間 t の総購入額は $P_tQ_t = \sum_i p_{it}q_{it}$ である。ここで P_t は一般物価水準、Q_t は財の数量である。上式両辺の対数をとると

$$\log P_t + \log Q_t = \log\Big(\sum_i p_{it}q_{it}\Big)$$

両辺を t で微分して

$$\frac{1}{P_t}\frac{\partial P_t}{t} + \frac{1}{Q_t}\frac{\partial Q_t}{\partial t} = \frac{1}{\Sigma p_{it}q_{it}}\frac{\partial(\Sigma p_{it}q_{it})}{\partial t} = \frac{1}{\Sigma p_{it}q_{it}}\Sigma\left(\frac{\partial p_{it}}{\partial t}q_{it} + \frac{\partial q_{it}}{\partial t}p_{it}\right)$$
$$= \frac{\Sigma q_{it}\partial p_{it}}{\Sigma p_{it}q_{it}} + \frac{\Sigma p_{it}\partial q_{it}}{\Sigma p_{it}q_{it}}$$

を得る。これは購入額の変化を価格変化によるものと、数量変化によるものに分解したことを意味している。

価格指数の変化分を $\frac{1}{P_t}\frac{\partial P_t}{\partial t} = \frac{\Sigma q_{it}\partial p_{it}}{\Sigma p_{it}q_{it}} = F_{(t)}d_t$ とおいて P について解くと、

$$P_t = p_0 e^{\int_c F_{(t)}d_t}$$

と表せる。ここで p_0 は初期価格体系 $(p_0 = (p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0}))$ であり、c は積分区間であり、始点 0 から比較時点までの価格の経路が重要な情報となる（path dependent）。

ここでディビジア指数は次のように表せる。

$$I_{0t} = \frac{p_t}{p_0} = \exp\int_c F_{(t)}d_t$$

つまり、I_{0t} は基準時点 0 に対する比較時点 t の物価指数であるが、その導出にあたってディビジア指数は時点 0-t の間の消費者の購入量経過を線積分するのである。

これは、時点 0-t を任意の小区間に分割して求めた連鎖指数 $I_{0t} = I_{01}I_{12}I_{23}\cdots I_{t-1,t}$ において小区間を極限にまで小さくしたときにディビジア指数となることを意味している。

具体的には、$F(t) = \frac{1}{\Sigma p_{it}q_{it}}\left(\Sigma q_{it}\cdot\frac{\partial p_{it}}{\partial t}\right)$ において (p_i, q_i) がどのような経路を通るかに依存して I_{0t} が決まる。

（例１）q が一定の場合 $(q = \bar{q})$

$$\exp\int\frac{\Sigma\bar{q}\partial p}{\Sigma\bar{q}p}d_t = \exp\int\frac{\partial(\Sigma p\bar{q})}{\Sigma p\bar{q}}d_t = \exp(\log(\Sigma p\bar{q}) + c) = e^c\Sigma p\bar{q}$$

ここで $e^c = \alpha$ とおき、時点を 0 と 1 とすれば、

$$p_0 = \alpha\Sigma p_0\bar{q}; \quad p_1 = \alpha\Sigma p_1\bar{q}$$

[2] 本節の議論は、森田（1989）第 11 章に基づいている。

よって

$$I_{01} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{\Sigma p_1 \bar{q}}{\Sigma p_0 \bar{q}}$$

（例２）終点の数量 q_1 が始点の数量 q_0 に比例する場合 $(q_1 = \lambda q_0)$
ここで $q = \lambda q_0$ とおくと

$$\exp\int \frac{\Sigma q \partial p}{\Sigma qp} d_t = \exp\int \frac{\partial(\Sigma p q_0)}{\Sigma p q_0} d_t = \exp(\log \Sigma p q_0 + c) = e^c \Sigma p q_0$$

ここで $e^c = \alpha$、時点を 0 と 1 とすれば、

$$p_0 = \alpha \Sigma p_0 q_0; \quad p_1 = \alpha \Sigma p_1 q_0$$

よって

$$I_{01} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \quad \text{（ラスパイレス式）}$$

（例３）始点の数量 q_0 が終点の数量 q_1 に比例する場合 $(q_0 = \mu q_0)$

ここで $q = \mu q_1$ とおくと

$$\exp\int \frac{\Sigma q \partial p}{\Sigma qp} d_t = \exp\int \frac{\partial(\Sigma q_1 p)}{\Sigma q_1 p} d_t = \exp(\log \Sigma p q_1 + c) = e^c \Sigma p q_1$$

ここで $e^c = \alpha$、時点を 0 と 1 とすれば、

$$p_0 = \alpha \Sigma p_0 q_1; \quad p_1 = \alpha \Sigma p_1 q_1$$

よって

$$I_{01} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_1} \quad \text{（パーシェ式）}$$

（例４）角材の購入額 pq が連鎖期間内 $(pq = \upsilon)$ で一定の時、$q = \upsilon/p$ であるから、

$$\exp\int \frac{\Sigma q \partial p}{\Sigma qp} d_t = \exp\int \left(\Sigma \upsilon \frac{\partial p}{p} \div \Sigma \upsilon \right) d_t = \exp\{(\Sigma \upsilon \log p \div \Sigma \upsilon) + c\} = \alpha \exp(\Sigma \upsilon \log p \div \Sigma \upsilon)$$

ここで $e^c = \alpha$、時点を 0 と 1 とすれば、

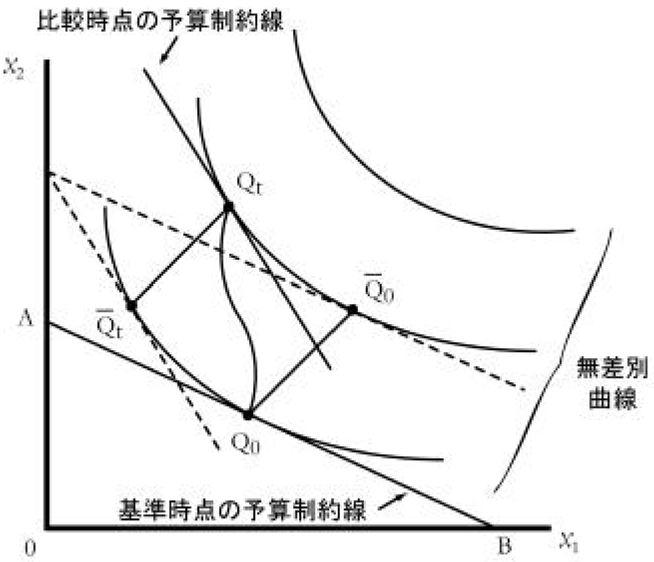
$$p_0 = \alpha \exp(\Sigma \upsilon \log p_0 \div \Sigma \upsilon); \quad p_1 = \alpha \exp(\Sigma \upsilon \log p_1 \div \Sigma \upsilon)$$

よって

$$I_{01} = \frac{p_1}{p_0} = \exp\left\{\frac{\Sigma \upsilon(\log p_1 - \log p_0)}{\Sigma \upsilon}\right\} = \exp\left[\log \Pi \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\upsilon/\Sigma \upsilon}\right] = \Pi \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\upsilon/\Sigma \upsilon}$$

一定の購入額をウェートとする加重幾何平均指数となる。このとき、ウェイトを当期と前期の平均値 $\upsilon/\Sigma \upsilon = \frac{w_{it} + w_{it-1}}{2}$ とすると、トゥルンクヴィスト指数に等しくなる（ディヴィジア指数の離散近似）

ディビジア指数と効用関数の関係
先と同様に２財モデルを考えよう。



先のラスパイレス指数、パーシェ指数では Q_0 と $\bar{Q}_t$, Q_t と $\bar{Q}_0$ とを比較することによって、現実に起こった Q_0 と Q_t との比較の代替としているわけだが、ディビジア指数では Q_0 から Q_t までの経路をたどりながら $Q_0 - Q_t$ の変化を連鎖指数的に表そうとするものである。

$$I_{01} = \frac{p_t}{p_0} = \exp\left(\frac{\Sigma Q \partial p}{\Sigma Q p}\right)$$

ディビジア指数は理論的にも実用的にも優れた指数である。実際の観察は離散形なので、積分計算は連鎖的積み上げ方式で近似するほかない。このとき、先に見たように、p, q に関して仮定を設けなければならず、この近似には誤差が伴う。しかし、他の多くの指数が基準・比較の２時点のみを見て、その中間時点でのウェートの変化を無視していることを考えると、ディビジア指数の方がまだましといえよう。実際、この観察時間の間隔が短いほど、連鎖指数のバイアスは少なくなる。

現代の情報化社会で需要情報がデジタル情報として逐次入ってくるようになれば、ディビジア指数の利用可能性はさらに広がるものと思われる。

References

[1] 中村隆英、新家建精、美添泰人、豊田敬（1992）『経済統計入門』（第 2 版)、東京大学出版会

[2] 森田優三（1989）『物価指数理論の展開』、東洋経済新報社