第２講　指数をめぐる諸問題

一般に物価指数、数量指数といった指数の算出は、個別情報を集約・評価するという**集計問題**（価格・数量の集計の他に、個人・産業の集計、財の集計等々各種の集計問題が、複合的に関係している）と理解することができる。このため、**関数論的指数**では、指数算式とそれに対応する**集計関数**を求め、指数算式の性質を検討していくことになる。

一般的には、

$$\begin{array}{ll} \mathbf{p}^i \equiv (p_1^i, \dots, p_N^i) & price\, data\, at\, time\, i.\, (i = 1, 2, \dots, I) \\ \mathbf{x}^i \equiv (x_1^i, \dots, x_N^i) & quality\, data\, on\, N\, goods \end{array} \tag{2.1}$$

指数問題（The index number problem）

指数問題とは、価格や数量について各時点 i での集計的な（平均的な）表現をするということである。つまり、

$$P^i X^i = \mathbf{p}^i \mathbf{x}^i = \sum_{n=1}^{N} p_n^i x_n^i \qquad for\, i = 1, \dots, I \tag{2.2}$$

p^i が価格指数、X^i が数量指数である。

問題は、毎年（毎期）、物価も消費数量も変化するし、同じ製品といっても、質的に変化したり（コンピュータ、車、カメラ、etc.）、新製品が入ってきたりする。またその結果、これまで消費していたもので消費されなくなるものもある。

経済理論に即していえば、予算制約式

$$Y^i = P^i X^i = \sum_{n=1}^{N} p_n^i x_n^i \tag{2.3}$$

が変化するときに、価格変化の部分と数量変化の部分に分けて、価格変化の部分を除いた上で、数量の変化（実質化）を見るという作業をするが、そのためには逆に数量変化がないとしたときの価格変化を求める必要がある。これを生産関数と考えた場合にも同様の問題になる。

理論と指数の関係については後ほど触れるが、消費者行動・生産者行動と密接に結びついており、その意味では指数問題はミクロ経済学の重要な応用分野である。因みに、物価指数に関していえば、経済活動がダイナミックに変化しているために、(1) 相対価格変動に伴う代替効果、(2) 品質変化の影響、(3) 新製品登場の影響、(4) 統計作成上の技術的な問題、などによって物価指数の計測誤差が生じているとされているが、これらは物価指数の構成要素である指数算式、調査価格、ウェイトの適切さ、精度などを通じての誤差と言いかえることもできる。

このうち、現在最もホットな問題は (2) や (3) の問題であり、多くの研究が進行中である。容易に想像できるように、医薬品やコンピュータ情報通信関連の技術革新はすさまじいので、品質の変化、新製品の登場が常に起こっている。これを適切に捉えないと、真の価格の変化を捉え損なうことになる。

(4) の統計作成上の問題とは、例えば調査品目のカバレッジ、調査頻度、調査時期の季節性、ディスカウントショップなど従来調査されていなかった店の消費比率の増加などがもたらすバイアスがあるし、ウェイトのもとになっている家計

調査にはそもそも標本抽出に偏りがあり、単身世帯も含まれていない等の問題もある。これらの問題は、行政上の問題、統計作成当局の問題ではあるが、研究者としてはそのバイアスを十分把握しておく必要がある。

本講義では、主として指数等式をめぐる問題に焦点を絞り、(2)(3)(4) の問題については別の機会に論ずることにする。

具体的に価格指数について考えてみよう。先ほどの例と同様に、n 財 i 時点の価格を p_n^i と表す。

基準時点を $i=0$ として、$i=\pm1,\pm2,\ldots$ を**比較時点**と呼ぶ。n 財が二時点で全く同一のものであるとすれば、個別価格指数は p_n^i/p_n^0 と表される。

算術平均指数

$$\begin{array}{cc} Carli(1764) & Dutot(1738) \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_n^i}{p_n^o}\right) & \left(\sum\frac{p_n^i}{N}\right)\left(\sum\frac{p_n^0}{N}\right)=\frac{p^i}{p^0} \end{array} \tag{2.4}$$

（日経平均株価）単純平均であって、ウェイト付けされていないので相対的需要量が反映されていない。価格の変化に対する相対的重要性が無視されている。

加重平均

$$\begin{array}{c} \text{幾何平均指数}\ (Jevous\ 1865) \\ \prod_{n=1}^{N}\left(p_n^i/p_n^0\right)^{\frac{1}{N}} \end{array} \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\sum\limits_n w_n}\sum_n w_n\left(\frac{p_n^i}{p_n^0}\right) \tag{2.6}$$

ここで w_n は各品目の重要性を表すウェイトであり、普通は取引金額や消費金額が指数の目的に応じて選ばれる。一般には $\sum w_n=1$ とするような相対ウェイトを用いる。

金額比指数

２つの時点で全く同じ品目の組み合わせ（マーケット・バスケット）を購入したときに必要な金額比は、２時点間の価格の変化を表すと考えられる。n 財を x_n だけ購入するときには、金額比指数は

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}p_n^i x_n}{\sum\limits_{n=1}^{N}p_n^0 x_n} \tag{2.7}$$

この式は、$w_n=p_n^0x_n$ というウェイトを考えると、次のように書き換えられる。

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}p_n^i x_n}{\sum\limits_{n=1}^{N}p_n^0 x_n}=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{N}p_n^0x_n}\sum_{n=1}^{N}\left(p_n^0x_n\right)\left(\frac{p_n^i}{p_n^0}\right)=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{N}w_n}\Sigma w_n\left(\frac{p_n^i}{p_n^0}\right) \tag{2.8}$$

これは加重平均の一種である。

ここで基準となる数量 x_n として何を選ぶかによって、いくつかの異なった指数が得られる。

x_n^i を n 財の i 時点における数量とすると、基準時点の数量を用いるのが**ラスパイレス指数**で、比較時点の数量を用いるのが**パーシェ指数**[1]である。

$$\text{ラスパイレス価格指数} \quad p_L^i = \frac{\sum p_n^i x_n^0}{\sum p_n^0 x_n^0} \quad (Laspeyres\ 1871) \tag{2.9}$$

$$\text{パーシェ価格指数} \quad p_P^i = \frac{\sum p_n^i x_n^i}{\sum p_n^0 x_n^i} \quad (Paache\ 1874) \tag{2.10}$$

いずれの指数も (5) のように加重平均として表せる。

ラスパイレス指数では $w_n = p_n^0 x_n^0$ と基準時点での n 財の購入金額が**固定ウェイト**として用いられる。基準時点以降は価格のデータさえあれば計算できるので、その簡便性から実用性が高い。

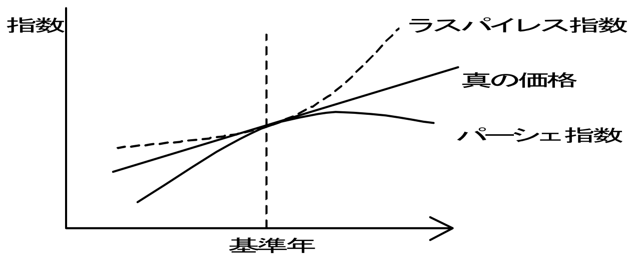
パーシェ指数では、$w_n = p_n^0 x_n^i$ となり、比較時点における購入量を基準時点の価格で測った架空の価値がウェイトになっている。これは比較時点 i 毎に変化する**可変ウェイト**である。パーシェ指数では価格だけでなく数量データも必要であるので、毎月発表される価格指数で用いるには調査コストがかかりすぎる。

ここである財の価格型に比べて相対的に上昇したとしよう。これが消費財であれば、消費者はその財の購入を控えて、他で代替するだろう（牛肉 → 豚肉、コーヒー → 紅茶）。一般に、価格が上昇した財に対する需要は減少するだろうから、その財のウェイトも低下する。従って、価格上昇の効果はウェイトの低下によって一部相殺される。

反対に、相対的に価格が低下した財に対する需要は一般的に増大するだろうから、その品目のウェイトは上昇するだろう。従って価格の低下はウェイトの上昇によって増幅される。このように、パーシェ指数は物価水準を低めに表す傾向がある。

ウェイトを基準年で固定するラスパイレス指数は、逆に物価水準を高めに表す傾向がある（そのロジックを考えてみよう）。

このように、パーシェ指数もラスパイレス指数も、いずれもバイアスを含むものであり、かつそれらが反対方向に働く（下図参照）。



両者の幾何平均をとったものをフィッシャー（Fisher）指数（1922）と呼ぶ。

$$\text{フィッシャー指数 (1922)} \quad p_F^i = \sqrt{p_L^i \cdot p_P^i} \tag{2.11}$$

[1]ラスパイレス、パーシェはいずれも 19 世紀のドイツの学者。

バイアスを除くという意味では、フィッシャー指数は金額比としての意味を持たないために、経済的解釈が難しい。

トゥルンクヴィスト (Törnqvist) 価格指数 (1936)
$$p_T^i = \frac{p^i}{p^0} = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{p_n^i}{p_n^0}\right)^{S_n}$$
$$\text{ここで } S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{p_n^0 x_n^0}{p^0 x^0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{p_n^i x_n^i}{p^i x^i}\right) \tag{2.12}$$

であり、加重幾何平均指数となっている。S_n は n 財の平均支出シェアーを表す。経済学的解釈は後で与える。

数量指数についても価格指数と全く同様に、個別数量指数、算術平均指数、加重平均指数、幾何平均指数、金額比指数、ラスパイレス数量指数、パーシェ数量指数、フィッシャー数量指数、トゥルンクヴィスト数量指数などが定義できる。

数量指数と価格指数の関係

i 時点における支出（生産）金額の合計は、$\Sigma p_n^i x_n^i$ で与えられる。2 時点における支出（生産額）の変化を表す金額指数を M^i と書くと、

$$M^i = \frac{\Sigma p_n^i x_n^i}{\Sigma p_n^0 x_n^0} \tag{2.13}$$

となる。そこで同じ対象について価格指数と数量指数が計算されるときには

$$M^i = p^i X^i \tag{2.14}$$

が成立することが望まれる。これは金額条件（Product Test）と呼ばれるが、ラスパイレス価格・数量指数では $M^i = p_L^i X_L^i$ は成り立たない。パーシェ価格・数量指数でも成り立たない。

しかし、ラスパイレスとパーシェを組み合わせると

$$M^i = p_n^i x_p^i = p_p^i x_L^i \tag{2.15}$$

が成立する。

このことは、金額条件を必須条件とするならば、価格指数にラスパイレスを選んだときは、数量指数としてパーシェを選ぶべきである。このようにして定められる指数を暗黙の指数（implicit index）と呼ぶことがある。数量指数を先に定めたときには、金額条件を満たすような価格指数をインプリシット・デフレーターと呼び、国民経済計算（SNA 統計）で用いられている。

容易に想像がつくように、フィッシャー指数は金額条件を満たす。

Dewert(1987) は、これらの指数が満たすべき条件（Axiom）を提示している。

(T1) Identity Test:

$$P(p^0, p^1, \alpha x^0, \beta x^i) = 1 \quad for\ \forall\alpha > 0, \beta > 0, \quad if\ p^0 = p^i\ and\ x^0 = x^i$$

もし価格も数量も 0 期と i 期で等しいとすれば、価格指数は 1 である。

(T2) Proportionality test（**比例性テスト**）:

$$P(p^0, \alpha x^i, x^0, x^i) = \alpha P(p^0, p^i, x^0, x^i) \quad for\ \alpha > 0$$

もし p^i の価格がすべて α 倍になったとすると、価格指数も α 倍にならなければならない。

(T3) Invariance to Changes in Scale Test（**規模無差別性テスト**）:

$$P(\alpha p^0, \alpha p^i, \beta x^0, \beta x^i) = P(p^0, p^i, x^0, x^i) \quad for\ \forall\alpha, \beta > 0$$

２時点で価格が α 倍され、数量が β 倍されても価格指数は不変である。

(T4) Invariance to Changes in Units Test（**単位無差別性テスト**）:

$$P(\alpha_1 p_1^0, \ldots, \alpha_N p_N^0, \alpha_1 p_1^i, \ldots, \alpha_N p_N^i, \alpha_1^{-1} x_1^0, \ldots, \alpha_N^{-1} x_N^0, \alpha_1^{-1} x_1^i, \ldots, \alpha_N^{-1} x_N^i) = P(p^0, p^i, x^0, x^i) \quad for\ \alpha_1 > 0 \ldots \alpha_N > 0$$

たとえ各財の価格が α_1 倍され数量が $1/\alpha_1$ 倍されようと、価格指数は不変である。

(T5) Symmetric Treatment of Countiries or Time (Country or Time reversal Test)（**時点転逆テスト**）:

$$P(p^i, p^0, x^i, x^0) = 1/p(p^0, p^i, x^0, x^i)$$

0 期と i 期の財の価格・数量が入れ替わるとすれば、新しい価格指数はもとの指数の逆数となる。

(T6) Symmetric Treatment of Commodities (Commodity Reversal) Test（**要素転逆テスト／商品転逆テスト**）:

$$P(\tilde{p}^0, \tilde{p}^i, \tilde{x}^0, \tilde{x}^i) = p(p^0, p^i, x^0, x^i)$$

すべての財は等しく扱われるべきであり、どの１財も特殊な扱いは受けない。

(T7) Monotonicity:

$$P(p^0, p^i, x^0, x^i) \leqslant p(p^0; p^{i+1}, x^0, x^i) \qquad if\ p \leqslant p^{i+1},\ i.e.\ if\ p_n^i \leqslant p_n^{i+1}\ for\ n = 1, \ldots, N$$

もし第 i 期の財の価格が上昇したとすれば、価格指数は減少することはない（すなわち、財の順序は総合指数の結果に無関係である)。

(T8) Mean Value Test:

$$m_1 n_n \left\{p_n^i/p_n^0\right\} \leqslant P(p^0, p^i, x^0, x^i) \leqslant \max_n \left\{p_n^i/p_n^0\right\}$$

価格指数は最大、最小価格比の間にはいる。

(T9) Circularity（**循環性テスト**）:

$P(p^0,p^i,x^0,x^i)p(p^0;p^{i+1},x^0,x^{i+1}) = p(p^0;p^{i+1},x^0,x^{i+1})$

0 期と i 期、i 期と $i+1$ 期における価格指数の積は、0 期と $i+1$ 期における価格指数に等しい。

ラスパイレス、パーシェ指数は (T5)(T9) を除いてすべて満たしている。
フィッシャー指数は (T9) を除いて合格、トゥルンクヴィスト指数は (T7)(T9) を除いて合格である。Jevons の**幾何平均指数**はすべてのテストに合格する。
追加的に次のようなテストを考えよう。

(T10) Irrelevance of tiny commodity test:

$$\lim_{x_N^0\to 0, x_N^i\to\sigma} p^N(p^0,p^i,x^0,x^i) = p^{N-1}(p_1^0,\dots p_{N-1}^0,p_1^i,\dots p_{N-1}^i,x_1^0,\dots x_{N-1}^0,x_1^i,\dots x_{N-1}^i)$$

N 財が 0 に近づくと、N 財の価格指数は $N-1$ 財の価格指数に近づく。

幾何平均指数はこのテストには合格しない。ラスパイレス、パーシェ、フィッシャー、トゥルンクヴィスト指数はすべてこのテストに合格する。

(T11) Product Test（**金額条件**）:

$P(p^0,p^i,x^0,x^i)Q(p^0,p^i,x^0,x^i) = \frac{p^ix^i}{p^0x^0}$

これより $Q = \frac{p^ix^i}{p^{0i}x^{0i}}/P$

と定義すると、Q は implicit quantity index と呼ばれる。

フィッシャーのインプリシット数量指数は、

$Q_F(p^0,p^i,x^0,x^i) \equiv p^ix^i/p^0x^0 \cdot P_F(p^0,p^i,x^0,x^i) = P_F(x^0,x^i,p^0,p^i)$

(T12) フィッシャーの**Factor Reversal Test**:

$P(p^0,p^i,x^0,x^i)p(p^0,p^i,x^0,x^i) = \frac{p^ix^i}{p^0x^0}$

フィッシャー指数は合格。価格と数量が入れ替わっても不変。

これらの Test を通してどの指数がよさそうかという絞り込みはできるが、決定的にこの指数が望ましいとか、最適な Axiom を満たす指数は作れないといった結果が出ているわけではないので、テスト・アプローチには限界がある。

練習問題：パンとミルクの２財を考えよう。昨年のパンは１斤当たり 50 セントで、ミルクは１リットル１ドルだった。今年はパン１斤が１ドルでミルク１リットルは 50 セントになった。適切な指数を選ぶことによって生活費が上がった、下がった、不変であったということがもっともらしく示せるか？(Krantz(1997), Exercises 8.5)
（答）予算制約は昨年も今年も 2 ドルとする。
(1) ラスパイレス指数を用いて昨年を基準年とし、昨年のパンの消費量を２斤、ミルクの消費利用を１リットルとすると

パンは 50 セントから 1 ドルに 200 %上昇し、

ミルクは 1 ドルから 50 セントに 50 %下落した。

$$p_L = \frac{100 \times 2 + 50 \times 1}{50 \times 2 + 100 \times 1} = \frac{250}{200} = 1.25$$

生活費は 25 % up

(2) パーシェ指数を用いて今年を基準年とする。今年のパンの消費量は 1 斤、ミルクの消費量を 2 リットルとする。パーシェ指数は

$$p_p = \frac{100 \times 1 + 50 \times 2}{50 \times 1 + 100 \times 2} = \frac{200}{250} = 0.8$$

生活費は 20 % down

(3) フィッシャー指数を用いて

$$p_F = \sqrt{p_L \cdot p_2} = \sqrt{\frac{250}{200} \cdot \frac{200}{250}} = 1$$

生活費は不変である。

References

[1] 白塚重典 (1998)『物価の経済分析』、東京大学出版会。

[2] Bresnahan, Timothey F. and Gordon, Robert J. (1997) *The Economics of New Goods*, Chicago: The University of Chicago Press.

[3] Diewert, W.E. (1987) "Index Numbers," *The New Palgrane: A Dictionary of Economics*; Vol.2. London: Macmillan, pp.767-780.

[4] Fisher, Franklin M. and Shell, Karl (1998) *Economic Analysis of Production Price Indexes*, Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Krantz, S.G. (1997) *Techniques of Problem Solving*, American Mathematical Society