第1講　生産関数

北村行伸
一橋大学経済研究所

2014年

1　はじめに

企業の直面している問題は、大きく分けると三つの段階に分けることができる。一つは、資金調達の段階であり、これには、金融機関や投資家との関係が重要である。二つめは生産活動に必要な資本や労働力の調達である。これは雇用決定、設備投資決定などの過程があり、それを行うためには企業は労働市場や資本財市場で競争しなければならない。三つめは、製造した財やサービスを提供する財市場での競争という段階である。ここで最終的に収益が確定する。企業活動を考える場合、本来はこの三つの段階での意思決定、競争条件を分離して考えることは不可能だと思われる。

図1　企業の意思決定の三段階

2　生産関数を考える

企業活動を知ることは、資本主義経済の機能を知るうえで最も重要なことの一つ。企業活動の実態を知るうえでは生産関数について考えることが重要。

2.1　生産関数をみることで何がわかるのか

投入物（資本、労働、土地、中間財）を生産物（製品、サービス）に変換する過程を生産関数として表現。

図2　Isoquant 曲線

K と L の技術的代替関係

（１）Leontieff 型（Clay-Clay）、（２）線形代替（Putty-Clay）、（３）曲線代替（Putty-Putty）などが考えられる。

2.2　Cobb-Douglas Function

$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$　or　$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$

Fix the value of output　$\bar{Y} = Y$　$\bar{Y} = AK^{\alpha}L^{\beta}$　$\rightarrow L = (\frac{5}{A})^{-\frac{1}{\beta}} \cdot K^{-\alpha/\beta}$
$\frac{\partial L}{\partial K} = -(\frac{\alpha}{\beta})(\frac{\bar{Y}}{A})^{-1/\beta} \cdot K^{-(1+\alpha/\beta)}$
$(\frac{\bar{Y}}{A})^{1/\beta} \cdot K^{-\alpha/\beta} = L$　$\rightarrow \frac{\partial K}{\partial K} = -(\frac{\alpha}{\beta})(\frac{L}{K})$

図３　負の傾きの Isoquant 曲線

負の傾きの homothetic な曲線（isoguant curve）　1
短期の資本ストック K を所与 $(\bar{K})$ とすると
$Y = A\bar{K}^{\alpha} \cdot L^{\beta}$　or　$Y = BL^{\beta}$　ここで $B = A\bar{K}^{\alpha}$　定数
短期の平均生産
$APL = \frac{Y}{L} = BL^{\beta-1}$

$\beta < 1$　APK は L の減少関数。
限界生産

$$MPL = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta BL^{\beta-1}$$

● 代替の弾力性 (elasticity of substitution)

$$\sigma = \frac{\partial(L/K)}{L/K} \Big/ \frac{\partial(\partial L/\partial K)}{\partial K/\partial K}$$

ここで

$$\bar{Y} = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

全微分して

$$0 = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}\partial K + A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}\partial L \Longrightarrow \frac{\partial L}{\partial K} = -\frac{\alpha}{\beta}(\frac{L}{K})$$

これを (L/K) で微分すると

$$\frac{\partial(\partial L/\partial K)}{\partial(L/K)} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\sigma = \frac{\partial L/\partial K}{L/K}\left(\frac{\partial(\partial L/\partial K)}{\partial(L/K)}\right)^{-1} \Longrightarrow \sigma = \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = 1$$

Cobb-Douglas Function では代替の弾力性は常に 1 となる。

● 規模の経済性

規模に関する弾力性を次のように定義する。

$$\sigma = \frac{\partial Y}{\partial K}\left(\frac{K}{Y}\right) + \frac{\partial Y}{\partial L}\left(\frac{L}{Y}\right) = \frac{\alpha Y}{K}\left(\frac{K}{Y}\right) + \frac{\beta Y}{L}\left(\frac{L}{Y}\right)$$

$$\varepsilon = \alpha + \beta$$

もし $\alpha+\beta=1$ 収穫一定、$\alpha+\beta>1$ 収穫逓増、$\alpha+\beta<1$ 収穫逓減

● 要素需要関数

要素需要は生産量を所与とした完全競争市場下での費用最小化問題として解かれる。

資本の価格 r、労働の価格 w とする。

$$\frac{r}{w} = \frac{\partial L}{\partial K} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{L}{K}\right)$$

$$\Longrightarrow K = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{w}{r}\right)L$$

$$L = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{r}{w}\right)K$$

生産関数は $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ なので

$$Y = A\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}L\right)^{\alpha}L^{\beta}$$

$$Y = AK^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{r}{w}K\right)^{\beta}$$

連立方程式と K と L に関して解くと、

$$\left.\begin{aligned} K &= \left[\tfrac{Y}{A}(\tfrac{w}{r}\tfrac{\alpha}{\beta})^{\beta}\right]^{1/(\alpha+\beta)} \\ L &= \left[\tfrac{Y}{A}(\tfrac{r}{w}\tfrac{\beta}{\alpha})^{\alpha}\right]^{1/(\alpha+\beta)} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial K}{\partial Y} = \left[\frac{1}{A}(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta})^{1/(\alpha+\beta)}\frac{1}{(\alpha+\beta)}Y^{1/(\alpha+\beta)-1}\right]$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} \tfrac{\partial K}{\partial Y} &= \tfrac{K}{Y}\tfrac{1}{\alpha+\beta} \Longrightarrow \tfrac{\partial K}{K}\Big/\tfrac{\partial Y}{Y} = \tfrac{1}{\alpha+\beta} \\ \tfrac{\partial K}{\partial L} &= \tfrac{L}{Y}\tfrac{1}{\alpha+\beta} \Longrightarrow \tfrac{\partial L}{L}\Big/\tfrac{\partial Y}{Y} = \tfrac{1}{\alpha+\beta} \end{aligned}\right\}$$

生産に関する生産要素の弾力性は L と K も同じ。

2.3 技術進歩（Technological Progress）

- Hicks Neutrality

$$\begin{aligned} \frac{K}{L} &= H_1(\frac{P_K}{P_L}) = H_1(\frac{r}{w}) \\ \frac{r}{w} &= \frac{\partial L}{\partial K}, \quad \frac{\partial L}{\partial K} = H_1^{-1}(\frac{K}{L}) \end{aligned}$$

資本と労働の相対価格を一定とする技術進歩。

- Harrod neutrality

$$\frac{K}{Y} = H_2(r)$$

利子が一定であれば、資本・所得比率が一定となるような技術進歩を指す。

- Solow neutrality

$$\frac{L}{Y} = H_3(w)$$

賃金が一定であれば、労働・所得比率が一定となるような技術進歩を指す。

Cobb-Douglas Production Function

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

技術進歩 A の関数型を考えよう。

$$A = Be^{mt}$$

とすれば

$$Y = Be^{mt}K^{\alpha}L^{\beta}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = mBe^{mt}K^{\alpha}L^{\beta} = mY$$

すなわち、

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \diagup Y = m$$

生産量の成長率は m %であり、L も K も一定である。

$$Y = Be^{mt}K^{\alpha}L^{\beta}$$

$$w = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\beta Y}{L}, \quad r = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\alpha Y}{K}$$

従って

$$\frac{r}{w} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{L}{K}$$

これは Hicks neutral を意味している。

w が変化しなければ L/Y は変化しないので、Solow neutrality を満たし、r が変化しなければ K/Y は変化しないので Harrod neutral でもある。

効率性単位（efficiency units）で計った技術進歩

$$K = e^{nt}Ka$$
$$L = e^{vt}La$$

Ka は実際の資本稼働時間、K は効率性単位で測った資本投入量、$L\alpha$ と L についても同様。

$$
\begin{aligned}
Y &= A(e^{nt}Ka)^{\alpha}(e^{vt}La)^{\beta} \\
&= Ae^{\alpha nt}e^{\beta vt}K_a^{\alpha}L_a^{\beta} \\
&= Ae^{(\alpha n+\beta v)t}K_a^{\alpha}L_a^{\beta}
\end{aligned}
$$

CES や Translog function では Harrod & Solow neutrality は満たさない。

- Technological Progress and Economic Growth

$$Y = F(K, L)$$

$$\Longrightarrow Y_t = F(K_t, L_t, t)$$

$$\partial Y_t = F_K dK + F_L \partial L + F_t d_t$$

ここで

$$
\begin{aligned}
F_K &= \frac{\partial Y}{\partial K} \\
&= r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_L &= \frac{\partial Y}{\partial L} \\
&= w
\end{aligned}
$$

$$F_t = \frac{\partial Y}{\partial t}$$

ここで技術進歩の成長への貢献は次のように表す。

$$F_t d_t = \partial Y_t - F_K \partial K - F_L \partial L$$

これは一般に Solow residual あるいは Total Fuctor Productivitiy (TFP) と呼ばれている。

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \cdot \frac{1}{Y} = \frac{F_K}{Y}\frac{\partial K}{\partial t} \cdot \frac{1}{K} + \frac{F_L L}{Y}\frac{\partial L}{\partial t}\frac{1}{L} + \frac{F_t}{Y}$$

$F_K = r, \ F_L = w$ とすると、それぞれの変化は次のように表せる。

$$\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{1}{Y} = \dot{Y} \quad \frac{\partial K}{\partial t}\frac{1}{K} = \dot{K} \quad \frac{\partial L}{\partial t}\frac{1}{L} = \dot{L}$$
$$\dot{Y} = \frac{rK}{Y}\dot{K} + \frac{wL}{Y}\dot{L} + \frac{F_t}{Y}$$

ここで $rK/Y =$ 資本シェア S_k、$wL/Y =$ 労働シェア S_L

$$\dot{Y} = S_K\dot{K} + S_L\dot{L} + \frac{F_t}{Q}$$
$$\Longrightarrow \frac{F_t}{Q} = \dot{Y} - S_K\dot{K} - S_L\dot{L}$$

参考文献

[1] Hackman, Steven T. (2008) *Production Economics*, Springer.

[2] Hearthfield, Daved F. and Wibe, Soren (1987) *An Introduction to Cost and Production Functions,* Macmillan.

図１　企業の意思決定の３段階

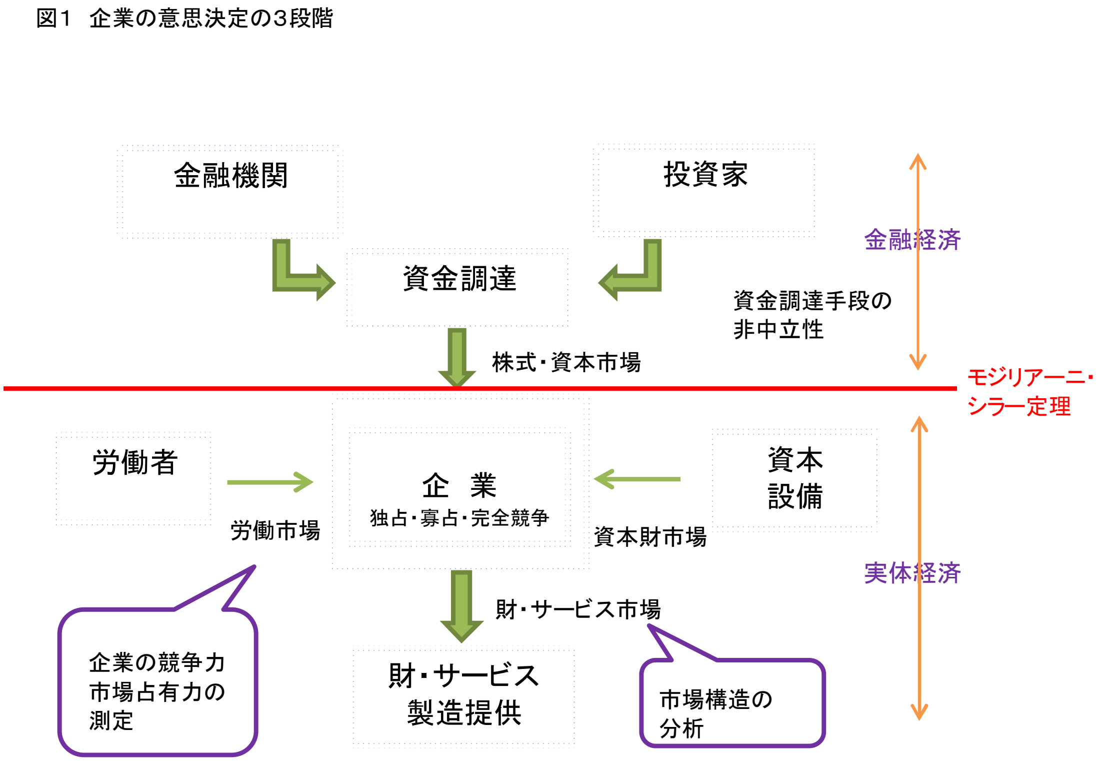

図２　Isoquant 曲線

$Y = F(K, L)$

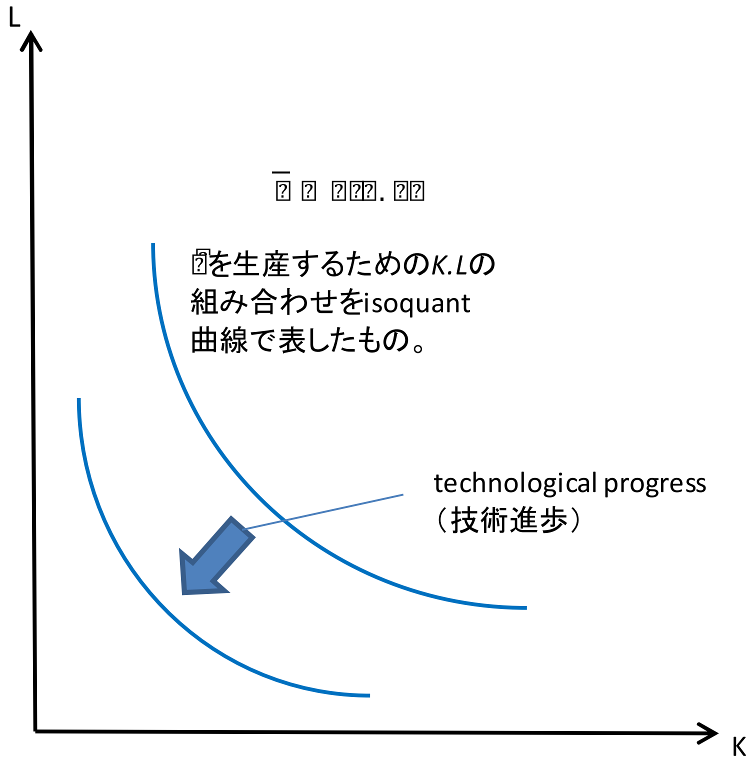

図３　負の傾きの Isoquant 曲線