第6講　同時方程式パネルデータ分析

6.1　はじめに

多くの経済変数は相互依存関係にあり、完全に外生的に決まっている変数はむしろ珍しいといってもいいかもしれない。もちろん、これは人間の経済活動自体が相互依存関係の中で決まっているという事実を勘案すれば当然のことであろう。

しかし、現実問題として、我々は実証研究で、同じ変数をある時は被説明（内生）変数に使い、ある時は説明（外生）変数に使ってきた。例えば、企業収益は企業活動の目的であると考えれば、これは被説明（内生）変数として扱うべきであるが、投資関数の推計においては企業収益を説明（外生）変数に使うことがある。同様に、賃金も被説明（内生）変数として使ったり、労働供給関数では説明（外生）変数として使うことがある。

変数が内生的であるという議論をする場合には、暗黙の内に同時方程式あるいは経済システムを考えていることが多い。経済活動の相互依存関係を捉えるという意味で一般均衡モデルを用いることが重要であるということは、多くの経済学者に認められてきたことであるし、経済政策分析においては益々その重要性が増してきているとも言える。実証研究においても、内生変数の取り扱いに注意して、それがもたらすバイアスを適切に取り除く必要があるということは広く認識されてきている。本章でもその手法について解説することを主眼としている。

同時に 1970 年代後半以後、大型計量経済モデルに対する批判が相次ぎ、同時方程式の研究自体も少なくなってきた。同時方程式パネルデータ分析もBaltagi (1981b)、Hausman and Taylor (1981) などの 1980 年代の研究から大きな進展がなく、Hsiao(2003) においても、旧版である Hisao(1986) から唯一変更がなかったのが同時方程式の第 5 章である。

本章でも同時方程式の相互依存関係を本格的に取り込んだ完全情報 3 段階最小二乗法（3SLS）や完全情報最小距離推定法などについては、簡単な解説にとどめ、より実用的な 2 段階最小二乗法 (2SLS) による単一方程式に議論を絞っている。また、同時方程式といっても全ての変数が相互依存関係にあるのではなく、一部の変数が影響を与えあっており、他の変数は外生変数と扱っても問題がない場合が往々にしてある。この特殊ケースとして三角配列システムがあるが、これについてはここでは論じない[1]。

[1] 三角配列システムを推計する方法は Chamberlain(1977) によって操作変数法が、Chamberlain and Griliches (1975) によって最尤法が提案されている。最尤法は有効推定ではあるが計算が難しい。操作変数法は有効ではないが、計算が簡単であり、一致推定は得られる。詳細については Hsiao(2003, chapter 5), pp.129-136 を参照されたい。

6.2 同時方程式パネルデータ分析の考え方

同時方程式パネルデータとは、次のような構造をもっている。

$$
\text{主体 } i \left\{ \begin{array}{ll} \boxed{1} & \boxed{Y_{1i} = \beta_{1i} X_{1i} + v_{1it}} \\ 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ g & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ G & Y_{Gi} = \beta_{Gi} X_{Gi} + v_{Git} \end{array} \right.
$$

$$
\text{主体 } j \left\{ \begin{array}{ll} \boxed{1} & \boxed{Y_{1j} = \beta_{1j} X_{1j} + v_{1jt}} \\ 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ g & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ G & Y_{Gj} = \beta_{Gj} X_{Gj} + v_{Gjt} \end{array} \right.
$$

例えば $\hat{\beta}_1$ を推計したい場合、

1. 各主体はクロスセクションで Y_{1i} を選択すると同時に Y_{gi} $(g = 1, \ldots, G)$ を選択している。
2. これを t 時点毎に行っている。
3. 一般の同時方程式問題では、各 i について各時点共通の β を推計している。
4. この β_g が異なる主体 i, j で共通しているとすると、誤差項の構造に違いに配慮した推計をする必要が出てくる (固定効果 A_i を用いる)。
5. 一般のパネル推計では時系列方向の平均 $\bar{Y} = \beta\bar{X}$ を用いたが、同時方程式パネル推計では、個別主体の同時方程式制約下での β の推定量と主体間のパネル推定量の差を最小にするような推定が有効かつ一致するように求めることが問題となる。

一般に、同時方程式体系を考えたとしても、パネルデータ分析の枠組みでは、その中から、関心の高い一本の方程式を選んで、それについて内生性の問題に配慮した推計方法を考えることが多い[2]。

$$
\begin{aligned}
\underset{NT\times 1}{\mathbf{y}_g} &= \mathbf{Y}_g \gamma_g + \mathbf{X}_g \mathbf{B}_g + \mathbf{v}_g \qquad (1) \\
&= \mathbf{w}_g \theta_g + \mathbf{v}_g \quad g = 1, \ldots, G
\end{aligned}
$$

[2]以下の議論は Hsiao (2003,pp.124-6）を参照している。

しかし、この方法は基本的には制限情報推定法 (limited-information estimation method) に従っており、同時方程式体系全体から得られる情報を完全に反映した推計 (完全情報推定法：full-information estimation method）を行えば、より有効な推定量を得られる。

ここで

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y}\prime, \ldots, \mathbf{y}'_G)', \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_G)'$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{w}_2 & & \mathbf{o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{w}_G \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_G \end{bmatrix}$$

G 本の構造方程式体系は次のように表わすことができる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}\theta + \mathbf{v} \tag{2}$$

(2) 式を３段階最小２乗法（3SLS）で推計して有効なのは誤差項（$v_{1_{it}}, v_{2_{it}}, \ldots v_{G_{it}}$）が i と t に関して iid の場合のみである。不均一分散や系列相関がある場合には、完全情報最小距離推定 (the full information minimum-distance estimator) か一般化３段階最小２乗法（G3SLS) を用いる必要がある。

完全情報最小距離推定は次のように定式化される。T は固定、N は無限であるとすると、T 期の推計式に対して個人 i の G 本の構造方程式を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{1_i} &= \mathbf{w}_{1_i}\theta_1 + \mathbf{v}_{1i} \\ \mathbf{y}_{2_i} &= \mathbf{w}_{2_i}\theta_2 + \mathbf{v}_{2i} \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{G_i} &= \mathbf{w}_{G_i}\theta_G + \mathbf{v}_{G_i} \quad i = 1, \ldots N \end{aligned} \tag{3}$$

最小距離推定値 θ は次の目的 (距離) 関数を最小化するように $\hat{\theta}$ を選ぶことによって得られる。

$$\left[\widehat{\pi} - \tilde{\mathbf{f}}(\theta)\right] \widehat{\Omega}^{-1} \left[\widehat{\pi} - \tilde{\mathbf{f}}(\theta)\right]$$

ここで $\widehat{\pi}$ は $\mathbf{y}_i$ の無制約の最小２乗法推定量、$\widehat{\tilde{\mathbf{\Omega}}}$ は $\widehat{\pi}$ と個人 i における $\tilde{\pi}$ の差の分散共分散行列の一致推定量 ($\tilde{\mathbf{\Omega}} = \sqrt{N}(\widehat{\pi} - \tilde{\pi})$)。もし $\mathbf{v}_i$ が iid であれば $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)$ は漸近的に正規分布となる。

G3SLS は次のように求められる。

$$\hat{\theta}_{G3SLS} = (S_{wx}\hat{\Psi}^{-1}S'_{wx})^{-1}(S_{wx}\hat{\Psi}^{-1}S_{xy}) \tag{4}$$

ここで

$$
S_{wx} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{w1x} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{S}_{w2x} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{S}_{wGx} \end{bmatrix},
$$

$$
\tilde{S}_{w_g\mathbf{x}} = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{w}_{gi1}\mathbf{x}'_{i1}, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{w}_{gi2}\mathbf{x}'_{i2}, \ldots \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{w}_{giT}\mathbf{x}'_{it}\right],
$$

$$
S_{xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{xy1} \\ \mathbf{S}_{xy2} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{xy\alpha} \end{bmatrix},
$$

$$
\underset{TK\times 1}{S_{xy_g}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_{i1}y_{gi1} \\ \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_{iT}y_{giT} \end{bmatrix}
$$

G3SLS は漸近的に最小距離推定に一致する。G3SLS も 3SLS も一致推定量ではあるが、誤差項の分散共分散に誤差構成要素が入っていると有効推定ではなくなる。

6.3 単一方程式推定

前節では同時方程式パネルデータ分析の考え方を示し、同時方程式体系全体の情報を有効に使うことで、はじめて有効一致推定を得ることができると論じた。しかし、現実的に複数の連立方程式に複雑な誤差構成要素を取り込んで計算することは極めてやっかいなことであり、現実のパネルデータにおける同時方程式の推計は次のように簡便化した 2 段階で行っている。

1. 観察不可能な（latent variable）効果を一階の階差を取って消去する。
2. 内生変数に対して操作変数を見つけて 2SLS 推計する。この場合、操作変数は時間とともに変化する変数を用いる。

次のようなモデルを考えよう。

$$
y_{it1} = \alpha_1 y_{it2} + z_{it1}\beta_1 + \alpha_{i1} + v_{it1} \tag{5}
$$

$$
y_{it2} = \alpha_2 y_{it1} + z_{it2}\beta_2 + \alpha_{i2} + v_{it2} \tag{6}
$$

ここで z_{it1}, z_{it2} は外生変数、一般モデルでは固定効果 α_{i1} と α_{i2} は全ての説明変数と相関している。誤差項 v_{it1} と v_{it2} は z とは無相関である。y_{it2} は v_{it1} と、y_{it1} は v_{it2} と相関している。

(5) 式を推計する場合、$\alpha_{i1}+v_{it1}$ は全ての説明変数と相関しているので OLS 推計は不適切である。そこで α_{i1} を階差を取って消去し、プーリング 2SLS で推計する。

$$\triangle y_{it1} = \alpha_1 \triangle y_{it2} + \triangle z_{it1}\beta_1 + \triangle v_{it1} \tag{7}$$

この場合、誤差項 $\triangle v_{it1}$ は $\triangle z_{it1}$ とは無相関となる。

しかし $\triangle y_{it2}$ と $\triangle v_{it1}$ は相関している可能性があり、$\triangle y_{it2}$ に対して操作変数をあてがう必要がある。一般には z_{it2} に含まれていて z_{it1} に含まれていない変数であり、かつ時間とともに変化する変数を用いる。

このようにして 2 段階最小二乗法あるいは操作変数法によってパラメータ β_1 をなるべくバイアスを少なくするように推定するというのが定石である。ここでの特徴は操作変数を外から探してくるのではなく、すでに同時方程式体系の中に含まれている外生変数を操作変数として用いるということである。問題は誤差項が一つの確率変数で表わされているのではなく、誤差構成要素が複数あり、それぞれの誤差分布に配慮しなければならないということである。

この問題をより厳密にするために、次のような同時方程式モデルを考えよう[3]。

$$y_1 = Z_1\delta_1 + u_1 \tag{8}$$

ここで $Z_1 = [Y_1, X_1]$, $\quad \delta_1' = (\gamma_1', \beta_1')$

Y_1 は要素 g_1 の内生変数、X_1 は要素 k_1 の外生変数、$X = [X_1, X_2]$ は同時方程式体系共通の外生変数である。この方程式は X_2 の式から除外されている外生変数の数 k_2 が $g_1 - 1$ と同数かそれより大きいときに識別できる[4]。

誤差構成要素を次のように仮定する。

$$u_1 = Z_\mu\mu_1 + v_1 \tag{9}$$

ここで $Z_\mu = (I_N \otimes \iota_T)$, $\quad \mu_1' = (\mu_{11}, \ldots, \mu_{N1})$ と $v_1' = (v_{111}, \ldots, v_{NT1})$ は平均ゼロの確率変数である。

$$E\begin{pmatrix}\mu_1\\ v_1\end{pmatrix}(\mu_1', v_1') = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mu_{11}} I_N & 0 \\ 0 & \sigma^2_{v_{11}} I_{NT} \end{bmatrix} \tag{10}$$

(8) は次のように変換できる。$Q = I_{NT} - P$, $P = I_N \otimes \bar{J}_T$,

$$Qy_1 = QZ_1\delta_1 + Qu_1 \tag{11}$$

$\tilde{y}_1 = Qy_1$, $\tilde{Z}_1 = QZ_1$ として (11) 式を 2SLS 推計する。その際 $\tilde{X} = QX$ を操作変数として用いる。

[3]以下の議論は Baltagi(2001、pp.111-15) に依拠している。

[4]識別のための必要条件は、モデル全体に含まれる外生（先決）変数 K から当該方程式に含まれる外生（先決）変数の数 k の差が、当該方程式に含まれる内生変数の数 g との間に次のような関係を持つことである。$K - k \geqq g - 1$

Within2SLS 推計は

$$\tilde{\delta}_{1with2SLS} = (\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1)^{-1} \tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{y}_1 \tag{12}$$

$$var(\tilde{\delta}_{1with2SLS}) = \sigma^2_{v_{11}} (\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1)^{-1}$$

Within2SLS は次の式を GLS 推計することによっても導出可能である。

$$\tilde{X}'\tilde{y}_1 = \tilde{X}\tilde{Z}_1\delta_1 + \tilde{X}'\tilde{u}_1 \tag{13}$$

$\bar{y}_1 = Py_1, \bar{Z}_1 = PZ_1$ とおき $\bar{X} = PX$ を操作変数として (5) 式を 2SLS 推計すると Between2SLS 推計が得られる。

$$\hat{\delta}_{1btw2SLS} = (\bar{Z}_1' P_{\bar{x}} \bar{Z}_1)_1^{-1} \bar{Z}' P_{\bar{x}} \bar{y}_1 \tag{14}$$

$$var(\hat{\delta}_{1btw2SLS}) = \sigma^2_{1_{11}} (\bar{Z}_1' P_{\bar{x}} \bar{Z}_1)^{-1}$$

$$\sigma^2_{1_{11}} = T\sigma^2_{\mu_{11}} + \sigma^2_{v_{11}}$$

Between2SLS は GLS 推計としても導出可能である。

$$\bar{X}'\bar{y}_1 = \bar{X}\bar{Z}_1\delta_1 + \bar{X}'\bar{u}_1 \tag{15}$$

(13) と (15) を同時方程式として扱う。

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{y}_1 \\ \bar{X}'\bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{Z}_1 \\ \bar{X}'\bar{Z}_1 \end{pmatrix} \delta_1 + \begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{u}_1 \\ \bar{X}'\bar{u}_1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

ここで

$$E\begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{u}_1 \\ \bar{X}'\bar{u}_1 \end{pmatrix} = 0, \quad var\begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{u}_1 \\ \bar{X}'\bar{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{v_{11}}\tilde{X}'\tilde{X} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{1_{11}}\bar{X}'\bar{X} \end{bmatrix}$$

(16) 式を GLS 推計すると the error component two-stage least squares (EC2SLS) を得る。

$$\hat{\delta}_{1,EC2SLS} = \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right]^{-1} \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{y}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{y}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right] \tag{17}$$

ここで

$$\hat{\delta}_{1EC2SLS} = w_1\hat{\delta}_{1with2SLS} + w_2\hat{\delta}_{1btw2SLS}$$

$$w_1 = \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right]^{-1} \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}}\right]$$

$$w_2 = \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right]^{-1} \left[\frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right]$$

$$\hat{\sigma}^2_{v_{11}} = (y_1 - Z_1\tilde{\delta}_{1with2SLS})'Q(y_1 - Z_1\tilde{\delta}_{1with2SLS})/N(T-1) \tag{18}$$

$$\hat{\sigma}^2_{1_{11}} = (y_1 - Z_1\tilde{\delta}_{1btw2SLS})'P(y_1 - Z_1\hat{\delta}_{1btw2SLS})/N \tag{19}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\mu_{11}} = (\hat{\sigma}^2_{1_{11}} - \hat{\sigma}^2_{v_{11}})/T > 0$$

この結果は、第 1 章でも繰り返し論じたように、EC2SLS 推定はウイズイン推定とビトウィーン推定の加重平均になっている。

(8) 式に $\Omega_{11}^{-1/2}$ をかけて

$$y_1^* = Z_1^* \delta_1 + u_1^* \tag{20}$$

ここで $y_1^* = \Omega_{11}^{-1/2} y_1, \quad Z_1^* = \Omega_{11}^{-1/2} Z_1, \quad u_1^* = \Omega_{11}^{-1/2} u_1$

$$\Omega_{11}^{-1/2} = (P／\sigma_{1_{11}}) + (Q／\sigma_{v_{11}}) \tag{21}$$

$$y_{1_{it}}^* = (y_{1_{it}} - \theta_1 \bar{y}_{1i.})／\sigma_{v_{11}}, \quad \theta_1 = 1 - (\sigma_{v_{11}}／\sigma_{1_{11}})$$

$$\bar{y}_{1i.} = \sum_{t=1}^{T} y_{1it}／T$$

操作変数 A を用いて (20) 式を 2SLS 推計すると

$$\hat{\delta}_{1,2SLS} = (Z_1^{*'} P_A Z_1^*)^{-1} Z_1^{*'} P_A y_1^* \tag{22}$$

ここで $P_A = A(A'A)^{-1}A'$

最適操作変数を次のように表す。

$$X^* = \Omega_{11}^{-1/2} X = \frac{QX}{\sigma_{v_{11}}} + \frac{PX}{\sigma_{1_{11}}} = \frac{\tilde{X}}{\sigma_{v_{11}}} + \frac{\bar{X}}{\sigma_{1_{11}}}$$

$A = X^*$ とすると G2SLS を得る。

$$\hat{\delta}_{1,G2SLS} = (Z_1^{*'} p_{X^*}^* Z_1)^{-1} Z_1^* P_{X^*} y_1^* \tag{23}$$

(20) 式に操作変数 $A = [QX, PX] = \left[\tilde{X}, \bar{X}\right]$ を用いて 2SLS 推計を行う。ここで QX は PX に直交しており、$P_A = P_{\tilde{X}} + P_{\bar{X}}$ である。

$$\begin{aligned} P_A Z_1^* &= (P_{\tilde{X}} + P_{\bar{X}}) \left[\Omega_{11}^{-1/2} Z_1\right] \\ &= (P_{\tilde{X}} + P_{\bar{X}}) \left[\frac{Q}{\sigma_{v_{11}}} + \frac{P}{\sigma_{\ell_{11}}}\right] Z_1 = \frac{P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma_{v_{11}}} + \frac{P_{\bar{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma_{1_{11}}} \end{aligned} \tag{24}$$

ここで

$$Z_1^{*\prime} P_A Z_1^* = \left(\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma_{v_{11}}^2} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma_{1_{11}}^2}\right)$$

$$Z_1^{*\prime} P_A y_1^* = \left(\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{y}_1}{\sigma_{v_{11}}^2} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{y}_1}{\sigma_{1_{11}}^2}\right)$$

(17) 式の $\hat{\delta}_{1,EC2SLS}$ は $A = \left[\tilde{X}, \bar{X}\right]$ の時 (23) 式と同値である。

すなわち、$EC2SLS$ は既存の 2SLS 推計法を用いて推計することが可能なのである。

第 1 ステップ：(8) 式 Within2SLS と (15) 式 Between2SLS を 2SLS で推計し、(12) と (14) 式を得る。

第 2 ステップ：$\hat{\sigma}_{v_{11}}^2$ と $\hat{\sigma}_{1_{11}}^2$ を (18)(19) によって推計し、(22) 式で用いる y_1^*, Z_1^*, X^* を得る。(8) 式を $\Omega_{11}^{-1/2}$ で変換して (20) 式を得る。

第 3 ステップ：操作変数 $A = X^*$ か $A = [QX, PX]$ を用いて (20) 式を 2SLS 推計すると、それぞれ (22) と (17) 式を得る。

6.4 内生性効果

第 1 章の操作変数法の節でも解説した通り、内生性テストとしては一般には、Wu-Hausman 検定として知られているもの（最小二乗法推定と操作変数法推定のパラメータをハウスマン検定する）や内生変数に関するモデルを最小二乗推定し、その式から得られた誤差をもともとの式に代入し、そのパラメータが 0 かどうかを t 検定するという方法が提案されている。

ここでは、従来の内生性の問題とは違って、固定効果が内生であり、説明変数と相関している場合を考える[5]。はじめに全ての説明変数が固定効果に相関している場合を考え、次いで一部の説明変数のみが固定効果と相関している場合を考えよう。

$$y = \alpha_{\iota NT} + X\beta + Z_\mu \mu + v = Z\delta + Z_\mu \mu + v \tag{25}$$

$$\mu_i = \bar{X}_i' \pi + \varepsilon_i \tag{26}$$

ここで $\varepsilon_i \backsim iid(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad \bar{X}_i'$ は $1 \times K$ ベクトル
(26) は次のように書き換えられる。

$$\mu_i = Z_\mu' X\pi / T + \varepsilon_i \tag{27}$$

ここで $\mu' = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$, $Z_\mu = I_N \otimes \iota_T$, $\varepsilon_i' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$.
(27) を (25) に代入すると、

$$y = X\beta + PX_\pi + (Z_\mu \varepsilon + v) \tag{28}$$

ここで $P = I_N \otimes \bar{J}_T$, ε と v は無相関で、$(Z_\mu \mu + v)$ は平均ゼロで次のような分散共分散行列構造をもつ。

$$V = E(Z_\mu \varepsilon + v)(Z_\mu \varepsilon + v)' = \sigma_\varepsilon^2 (I_N \otimes J_T) + \sigma_v^2 I_{NT} \tag{29}$$

(28) の GLS 推計は次のようになる。

$$\hat{\beta}_{GLS} = \tilde{\beta}_{with} = (X'QX)^{-1} X'Qy \tag{30}$$

$$\hat{\pi}_{GLS} = \hat{\beta}_{btw} - \tilde{\beta}_{with} = (X'PX)^{-1} X'Py - (X'QX)^{-1} X'Qy \tag{31}$$

$$var(\hat{\pi}_{GLS}) = var(\hat{\beta}_{btw}) + var(\tilde{\beta}_{with}) \tag{32}$$

$$= (T\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_v^2)(X'PX)^{-1} + \sigma_v^2 (X'QX)^{-1} \tag{33}$$

[5] 以下は Baltagi (2001,pp.118-122) を引用している。これは賃金関数において、個人の固定効果である能力と学歴や職歴が相関している場合、生産関数において潜在変数である経営能力が労働や資本などの投入財と相関している場合など様々なケースで出てくる問題である。

Mundlak(1978) が示したように、(25) 式の最良線形不偏推定量 (BLUE) は固定効果（within）推定である。ランダム効果推定は (26) 式を無視しておりバイアスが残る。(28) 式では全ての説明変数は固定効果に相関しているが、ランダム効果モデルでは説明変数と固定効果は無相関であることが想定されている。

Hausman and Taylor(1981) では、一部の説明変数のみが μ_i と相関しているというモデルを考えている。

$$y_{it} = X_{it}\beta + Z_i\gamma + \mu_i + v_{it} \tag{34}$$

Hausman and Taylor（1981）は $X = [X_1; X_2]$ と $Z = [Z_1; Z_2]$ を 2 分割した。すなわち、X_1 は $n \times k_1$, X_2 は $n \times k_2$, Z_1 は $n \times g_1$ Z_2 は $n \times g_2$, $n = NT$ に分割し、X_1 と Z_1 は外生変数、X_2 と Z_2 は内生変数で μ_i と相関し、v_{it} とは無相関であるとする。

ウィズイン誤差項を次のように求める。

$$\hat{d}_i = \bar{y}_i - \bar{X}_i\hat{\beta}_w \tag{35}$$

(35) の時間平均をとり、$\hat{d}_i$ を z_i に関して、操作変数 $A = [X_1, z_1]$ を用いた 2 SLS 推計を行う。

$$\hat{\gamma}_{2SLS} = (Z'P_AZ)^{-1}Z'P_A\hat{d} \tag{36}$$

ここで $P_A = A(A'A)^{-1}A'$。$Z'P_AZ$ は非特異 (non singular) 行列であり、次数条件 $k_1 \geqslant g_2 - 1$ を満たしている。

分散は次のように求められる。

$$\hat{\sigma}_v^2 = \tilde{y}'\bar{P}_{\tilde{X}}\tilde{y}/N(T-1) \tag{37}$$

ここで $\tilde{y} = Qy$, $\tilde{X} = QX$, $\bar{P}_A = 1 - P_A$

$$\sigma_1^2 = \frac{(y_{it} - X_{it}\tilde{\beta}_w - Z_i\hat{\gamma}_{2SLS})'P(y_{it} - X_{it}\tilde{\beta}_w - Z_i\hat{\gamma}_{2SLS})}{N} \tag{38}$$

(35) を次のように変換する。

$$\Omega^{-1/2}y_{it} = \Omega^{-1/2}X_{it}\beta + \Omega^{-1/2}Z_1\gamma + \Omega^{-1/2}u_{it} \tag{39}$$

Hausman and Taylor 推定は、(39) 式を $\mathrm{A}_{HT} = \left[\tilde{X}, \tilde{X}_1, Z_1\right]$ を操作変数とした 2SLS 推計であると理解できる。

1. $k_1 < g_2 - 1$ であれば過小識別、$\hat{\beta}_{HT} = \tilde{\beta}_{with}$ であり $\hat{\gamma}_{HT}$ は存在しない。
2. $k_1 = g_2 - 1$ であれば適正識別、$\hat{\beta}_{HT} = \hat{\beta}_{with}$, $\hat{\gamma}_{HT} = \hat{\gamma}_{2SLS}$ である。
3. $k_1 > g_2 - 1$ であれば過剰識別、(39) 式より得られた $\hat{\beta}_{HT}$ は $\hat{\beta}_{with}$ より有効である。

過剰識別テストは次の統計量によってテストできる。

$$\hat{m} = \hat{q}'\left[var(\tilde{\beta}_{with}) - var(\hat{\beta}_{HT})\right]^{-1}\hat{q} \tag{40}$$

ここで $\hat{q} = \hat{\beta}_{HT} - \tilde{\beta}_{with}$, $\hat{\sigma}_v^2\hat{m} \overset{H_0}{\to} X_\iota^2$, $\ell = \min[k_1 - q_2, NT - k]$ である。

6.5 STATA コード

ここでも第 7 章で紹介する『企業活動基本調査』のデータを用いて次のような雇用調整関数を考えてみよう。

$$\ln L_{it} = \alpha + \beta \ln L_{it-1} + \gamma \ln Y_{it} + \delta \ln w_{it} + \zeta(debt/asset) + \eta(debt/asset)^2 + \vartheta(own\ capital\ ratio) + \varepsilon_{it} \tag{41}$$

ここで、$\ln Y_{it} = \ln rs$、実質売上高、$\ln K_{it} = \ln k$、実質資本ストック、$\ln L_{it} = \ln L$、労働者数、$\ln w_{it} = \ln w$、実質賃金、$debt/asset_{it} = darat$、負債資産比率、$(debt/asset)^2_{it} = darat2$、負債資産比率の 2 乗、$(own\,capital\,ratio)_{it} = ocaprat$、自己資本比率、$(sales\ share)_{it} = ss$、売り上シェア、という表示になっている。

雇用調整関数にはいる説明変数の内、実質売上高は第 3 章では被説明変数になっていたように内生変数であると考えられる。そこで、操作変数として $\ln K_{it}$ と $sales\ share_{it}$ を用いて、2SLS 推定を行う。ランダム効果推定においては Baltagi(2001) で議論されており、本章でも紹介した EC2SLS を用いている。また、固定効果推定とランダム効果推定をハウスマン検定している。

さらに、第 4 章で議論した Arellano-Bond 推定も追加的に行っている。ここでは他の式と同じく、雇用調整ラグは 1 に限定している。

```
/*Panel Instrumental Variable Estimation*/
xtivreg lnL lnL1 lnw darat darat2 ocaprat (lnrs=lnk ss), fe
i(ari1)
est store fixed

xtivreg lnL lnL1 lnw darat darat2 ocaprat (lnrs=lnk ss), re ec2sls
i(ari1) nosa
est store random
hausman fixed random

/*Arellano-Band GMM Estimation*/
xtabond lnL lnw darat darat2 ocaprat, lags(1) diffvars(lnrs)
inst(ss lnk) artests(2)
```

まず、固定効果推定は STATA では推計式の末に fe と書けばよい。ここでは固定効果を個別企業に割り振らずに産業分類 (ここでは ari1 という表示になっている) に振っている。これは i(ari1) と書ける。ランダム効果推定は STATA では re と入れる。Baltagi の EC2SLS を用いたいときは re ec2sls と続けて書けばよい。nosa は Baltagi and Chang の分散共分散推定を用いることを意味している。ハウスマン検定は STATA コードでは hausman と書けばよい。

図表 6.1

図表 6.1 は固定効果推定、ランダム効果推定、ハウスマン検定の結果をまとめたものである。標本数は 89925 であり、産業分類は 33 種類に分かれている。推計されたパラメータは固定効果推定とランダム効果推定でほぼ同じであり、推定方法がパラメータ推計にバイアスを与えていないことがわかる。固定効果推定を見ると、労働者数のラグにかかるパラメータは 0.872 であり、かなり雇用調整は遅いと読める。実質賃金は理論通り負の効果を持っている。それ以外の財務変数や売上高も雇用調整を促進する方向に有意に効いている。最後の行の F テストは固定効果推定とプーリング推定を比較したものであるが、固定効果が有意ではないという帰無仮説は棄却されている。また、ハウスマン検定の結果はランダム効果推定が説明変数と相関していないという帰無仮説を棄却するもので、固定効果推定が残る。固定効果推定、ランダム効果推定ともに高い決定係数を記録しており、モデルとしてのフィットは極めて良好である。

図表 6.2

図表 6.2 では Arellano-Bond 推定を行った。ここでは id は各企業に割り振っている。この推定方法では労働者数のラグにかかるパラメータが 0.399 と大幅に低下している。逆に実質賃金の負の効果は大きくなっている。また、財務変数や売上高の効果も大幅に小さくなるか、有意性が落ちているなど、通常の操作変数による 2SLS 推定の結果とは異なっている。一つの理由として、図表 6.2 の Arellano-Bond Test として表示されている誤差系列相関検定で示唆されているように、誤差系列相関があり、通常の操作変数法では一致推定が得られていない可能性が考えられる。操作変数による 2SLS 推定と Arellano-Bond 推定の優劣をつける検定方法はいまのところないので総合的に判断するほかない。

ここでは推計の性格が違うので利用しなかったが、Hausman and Taylor (1981) の推定方法も STATA コードにあり、xthteylor というコードを使えば簡単に推定できる。

図表6.1

Dependent Variable: InL	Fixed		Random	
	Estimated Coefficient	z-statistics	Estimated Coefficient	z-statistics
Inrs	0.1064257	32.34	0.1042144	32.04
InL1	0.8726691	250.21	0.8749978	253.60
Inw	-0.1416748	-39.50	-0.1400051	-39.22
darat	0.1969855	19.88	0.1934163	19.34
darat2	0.0046667	8.35	0.0046318	8.29
ocaprat	0.2612128	27.61	0.2576575	27.01
_cons	0.2059450	14.57	0.2274617	14.64
Diagnostic Test				
Number of observation	89925		89925	
Number of groups	33		33	
R-sq: within	0.9676		0.9676	
between	0.9847		0.9852	
overall	0.9674		0.9675	
F test that all u_i=0:	F(32, 89886) = 43.11			
sigma_u	0.04245679		0.02351515	
sigma_e	0.17164877		0.17164304	
rho	0.05765323		0.01842330	
Hausman specification test	chi2(6) = 24.36 Prob>chi2 = 0.0004			

注1） 被操作変数＝Inrs。操作変数＝InL1、Inw、darat、darat2、ocaprat、Ink、ss。
注2） ランダム効果推計は Baltagi(2001) の the error component two-stage least square (EC2SLS) に従ってい

図表6.2

Dependent Variable: InL	GMM	
One-step results	Estimated Coefficient	z-statistics
InL1	0.3993	16.04
Inw	-0.2334	-51.77
darat	0.0159	0.87
darat2	0.0017	0.81
ocaprat	0.0868	7.01
Inrs	0.0020	4.67
_cons	-0.0101	-5.15
Diagnostic Test		
Number of observation	42,244	
Number of groups	23,300	
Sargan test	chi2(4) = 97.92 Prob>chi2 = 0.00	
Wald Test	chi2(6) = 2975.32	
Arellano-Bond Test for residual AR(1)	z = -22.16 Prob>z = 0.00	

注1） 操作変数＝Ink、ss。