第４講　同時方程式パネルデータ分析

4.1 はじめに

一般にパネルデータにおける同時方程式の推計は 2 段階で行う。

1. 観察不可能な（latent variable）効果を一階の階差を取って消去する。
2. 内生変数に対して操作変数を見つけて 2SLS 推計する。この場合、操作変数は時間とともに変化する変数でなければならない。

次のようなモデルを考えよう。

$$y_{it1} = \alpha_1 y_{it2} + z_{it1}\beta_1 + \alpha_{i1} + v_{it1} \tag{1}$$

$$y_{it2} = \alpha_2 y_{it1} + z_{it2}\beta_2 + \alpha_{i2} + v_{it2} \tag{2}$$

ここで z_{it1}, z_{it2} は外生変数、一般モデルでは固定効果 α_{i1} と α_{i2} は全ての説明変数と相関している。誤差項 v_{it1} と v_{it2} は z とは無相関である。y_{it2} は v_{it1} と、y_{it1} は v_{it2} と相関している。

(1) 式を推計する場合、$\alpha_{i1}+v_{it1}$ は全ての説明変数と相関しているので OLS 推計は不適切である。そこで α_{i1} を階差を取って消去し、プーリング 2SLS で推計する。

$$\triangle y_{it1} = \alpha_1 \triangle y_{it2} + \triangle z_{it1}\beta_1 + \triangle v_{it1} \tag{3}$$

この場合、誤差項 $\triangle v_{it1}$ は $\triangle z_{it1}$ とは無相関となる。

しかし $\triangle y_{it2}$ と $\triangle v_{it1}$ は相関している可能性があり、$\triangle y_{it2}$ に対して操作変数をあてがう必要がある。一般には z_{it2} に含まれていて z_{it1} に含まれていない変数であり、かつ時間とともに変化する変数が用いられる。

$$\triangle hours_{it} = \beta_0 + \alpha_1 \triangle \log(wage_{it}) + \triangle(other\ \mathrm{factor}\, s_{it}) \tag{4}$$

ここで $\triangle \mathsf{exper}_{it}$(経験年数) を $\triangle \log(wage_{it})$ の操作変数として用いると、労働を続けている人であれば常に $\triangle \mathsf{exper}_{it} = 1$ となり（すべての i, t に対して同じ値をとることになり)、操作変数としては不適切である。例えば job-training に対する補助金などを用いるとこの問題に対応できる。

4.2 同時方程式パネルデータ分析の意義

同時方程式パネルデータとは、次のような構造をもっている。

例えば $\hat{\beta}_1$ を推計したい場合、

$$
\text{主体 } i \begin{cases} \boxed{1} & \boxed{Y_{1i} = \beta_{1i} X_{1i} + v_{1it}} \\ 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ g & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ G & Y_{Gi} = \beta_{Gi} X_{Gi} + v_{Git} \end{cases}
$$

$$
\text{主体 } j \begin{cases} \boxed{1} & \boxed{Y_{1j} = \beta_{1j} X_{1j} + v_{1jt}} \\ 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ g & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ G & Y_{Gj} = \beta_{Gj} X_{Gj} + v_{Gjt} \end{cases}
$$

1. 各主体はクロスセクションで Y_{1i} を選択すると同時に Y_{gi} $(g = 1, \ldots, G)$ を選択している。
2. これを t 時点毎に行っている。
3. 一般の同時方程式問題では、各 i について各時点共通の β を推計している。
4. この β_g が異なる主体 i, j で共通しているとすると、誤差項の構造に違いに配慮した推計をする必要が出てくる (固定効果 A_i を用いる)。
5. 一般のパネル推計では時系列方向の平均 $\bar{Y} = \beta \bar{X}$ を用いたが、同時方程式パネル推計では、個別主体の連立方程式制約下での β の推定量と主体間のパネル推定量の差を最小にするような推定が有効かつ一致するように求めることが問題となる。

これまで連立方程式体系から一本の方程式を選んで、それについて内生性の問題に配慮した推計方法を考えてきた。[1]

$$
\begin{aligned}
\underset{NTX1}{\mathsf{y}_g} &= \mathsf{Y}_g \gamma_g + \mathsf{X}_g \mathsf{B}_g + \mathsf{v}_g \qquad (5) \\
&= \mathsf{w}_g \theta_g + \mathsf{v}_g \quad g = 1, \ldots, G
\end{aligned}
$$

しかし、この方法は基本的には制限情報推定法 (limited-information estimation method) に従っており、連立方程式体系全体から得られる情報を完全に反映した推計 (完全情報推定法：full-information estimation method）を行えば、より有効な推定量を得られる。

[1]以下の議論は Hsiao (2003, chap. 5), pp. 119-124 を参照している。

ここで

$$\mathsf{y} = (\mathsf{y}\prime, \dots, \mathsf{y}'_G)', \quad \mathsf{v} = (\mathsf{v}'_1, \dots, \mathsf{v}'_G)'$$

$$\mathsf{w} = \begin{bmatrix} \mathsf{w}_1 & \mathsf{o} & \cdots & \mathsf{o} \\ \mathsf{o} & \mathsf{w}_2 & & \mathsf{o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{o} & \mathsf{o} & \cdots & \mathsf{w}_G \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_G \end{bmatrix}$$

G 本の構造方程式体系

$$\mathsf{y} = \mathsf{w}\theta + \mathsf{v} \tag{6}$$

(6) 式を 3 段階最小 2 乗法 (3SLS) で推計して有効なのは誤差項 ($v_{1_{it}}, v_{2_{it}}, \dots v_{G_{it}}$) が i と t に関して iid の場合のみである。不均一分散や系列相関がある場合には、完全情報最小距離推定 (the full information minimum-distance estimator) か一般化 3 段階最小 2 乗法 (the generalized 3SLS) を用いる必要がある。

完全情報最小距離推定は次のように定式化される。

T は固定、N は無限であるとすると、T 期の推計式に対して個人 i の G 本の構造方程式を考える。

$$\begin{aligned} \mathsf{y}^{1_i}_{t\times 1} &= \mathsf{w}_{1_i}\theta_1 + \mathsf{v}_{1i} \\ \mathsf{y}_{2_i} &= \mathsf{w}_{2_i}\theta_2 + \mathsf{v}_{2i} \\ &\vdots \\ \mathsf{y}_{G_i} &= \mathsf{w}_{G_i}\theta_G + \mathsf{v}_{G_i} \quad i = 1, \dots N \end{aligned} \tag{7}$$

最小距離推定値 θ は次の目的 (距離) 関数を最小化するように $\hat{\theta}$ を選ぶことによって得られる。

$$\left[\widehat{\tilde{\pi}} - \tilde{\mathsf{f}}(\theta)\right] \widehat{\tilde{\Omega}}^{-1} \left[\widehat{\tilde{\pi}} - \tilde{\mathsf{f}}(\theta)\right]$$

ここで $\widehat{\tilde{\pi}}$ は y_i の無制約の最小 2 乗法推定量、$\widehat{\tilde{\Omega}}$ は $\widehat{\tilde{\pi}}$ と個人 i における $\tilde{\pi}$ の差の分散共分散行列の一致推定量 ($\tilde{\Omega} = \sqrt{N}(\widehat{\tilde{\pi}} - \tilde{\pi})$)。

もし v_i が iid であれば $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta)$ は漸近的に正規分布となる。

一般化 3SLS は次のように求められる。

$$\hat{\theta}_{G3SLS} = (S_{wx}\hat{\Psi}^{-1}S'_{wx})^{-1}(S_{wx}\hat{\Psi}^{-1}S_{xy}) \tag{8}$$

ここで

$$S_{wx} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{w1x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{w2x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{S}_{wGx} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{S}_{w_g\mathsf{x}} = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathsf{w}_{gi1}\mathsf{x}'_{i1}, \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathsf{w}_{gi2}\mathsf{x}'_{i2}, \ldots \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathsf{w}_{git}\mathsf{x}'_{it}\right],$$

$$S_{xy} = \begin{bmatrix} \mathsf{S}_{xy1} \\ \mathsf{S}_{xy2} \\ \vdots \\ \mathsf{S}_{xy\alpha} \end{bmatrix},$$

$$\underset{TK\times 1}{S_{xy_\mathsf{g}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathsf{x}_{i1}y_{gi1} \\ \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathsf{x}_{it}y_{git} \end{bmatrix}$$

一般化 3SLS は漸近的に最小距離推定に一致する。一般化 3 SLS も 3 SLS も一致推定量ではあるが、誤差項の分散共分散に誤差構成構造が入っていると有効推定ではなくなる。Baltagi(1981) は EC2SLS と同様に、error-component three-stage least squares estimator (EC3SLS) を提案している。EC3SLS は漸近的に完全情報最尤法と一致する。

4.3 三角配列システム

4.3.1 識別（identification）

連立方程式間の相関と個人の異時点間の相関を同時に扱う場合には、潜在変数（latent variable）を用いるのが便利である。[2]

$y_{g_{it}}$ を個人 i の t 時点における y_g の値とする。

誤差項については次のように仮定する。

$$v_{g_{it}} = d_g h_{it} + u_{g_{it}} \tag{9}$$

ここで u_g は方程式間も個人 i と時間 t の間とも無相関の独立した誤差である。

方程式間の誤差相関は共通の omitted variable h によってもたらされており、次のような分散共分散構造をもっている。

$$h_{it} = \alpha_i + w_{it} \tag{10}$$

[2]本節は Hsiao (2003, chap.5), pp.127-129 を参照している。

ここで α_i は時間に関しては一定で、個人間では iid に従っている。w_{it} は i と t に関して iid に従っており、α_i とも無相関である。

次のような三角配列システムを考える。

$$\begin{aligned} y_{1it} &= \beta_1'\mathsf{x}_{it} + d_1 h_{it} + u_{1_{it}}, \\ y_{2it} &= -\gamma_{21} y_{1_{it}} + \beta_2'\mathsf{x}_{it} + d_2 h_{it} + u_{2_{it}}, \\ y_{3it} &= -\gamma_{31} y_{1_{it}} + \gamma_{32} y_{2_{it}} + \beta_3'\mathsf{x}_{it} + d_3 h_{it} + u_{3_{it}} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで x_{it} は外生変数、h は観察できない潜在変数。

もし h を考慮しないか $d_g = 0$ であれば、このシステムは単純な recursive system であり、各式毎に最小 2 乗法を適用することができる。

しかし、$d_g \neq 0$ であれば、同時性バイアス問題が出てくる。しかも十分な外生変数 x がなければ 2SLS や EC2SLS を用いることもできない。

この場合、誤差項の分散共分散行列に制約を課す必要が出てくる。

$$d_g^2(\sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2) = c d_g^2 \left(\frac{1}{c}\sigma_\alpha^2 + \frac{1}{c}\sigma_w^2 \right) \tag{12}$$

と表すことができる。$\sigma_\alpha^2 = 1$ として h を正規化すると、

$$E\mathsf{v}_{it}\mathsf{v}_{it}' = (1+\sigma_w^2)\mathsf{d}\mathsf{d}' + diag(\sigma_1^2, \dots, \sigma_G^2) = \Omega \tag{13}$$

$$E\mathsf{v}_{it}\mathsf{v}_{is}' = \mathsf{d}\mathsf{d}' = \Omega_w \qquad if \quad t \neq s \tag{14}$$

$$E\mathsf{v}_{it}\mathsf{v}_{js}' = \mathsf{0} \qquad if \quad i \neq j \tag{15}$$

ここで $\mathsf{d} = (d_1, \dots, d_G), \quad diag(\sigma_1^2, \dots, \sigma_G^2)$ は $G \times G$ の $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_G^2$ を対角要素とする対角行列である。

$\alpha_i, w_{it}, u_{g_{it}}$ は正規分布に従っていると仮定すると、y の分布に関するすべての情報は次のように集約できる。

$$c_{y_{it}} = \Gamma^{-1}\mathsf{B} c_{x_{it}} \mathsf{B}'\Gamma^{'-1} + \Gamma^{-1}\Omega\Gamma'^{-1} \tag{16}$$

$$c_{y_{ts}} = \Gamma^{-1}\mathsf{B} c_{x_{its}} \mathsf{B}'\Gamma^{'-1} + \Gamma^{-1}\Omega_w\Gamma'^{-1} \qquad t \neq s \tag{17}$$

$$c_{yx_{ts}} = -\Gamma^{-1}\mathsf{B} c_{x_{ts}} \tag{18}$$

ここで $c_{yts} = E\mathsf{y}_{it}\mathsf{y}_{is}', \quad c_{yx_{ts}} = E\mathsf{x}_{it}\mathsf{x}_{is}'$

係数行列 Γ と B を $1 \times G(G+k), \quad \theta' = (\gamma_1', \dots, \gamma_G'; \beta_1', \dots, \beta_G')$ と並べ、θ は M の事前制約に直面しているとする。

$$\Phi(\theta) = \phi \tag{19}$$

ここで ϕ は $M \times 1$ の定数ベクトル。

$\Gamma, \mathsf{B}, \mathsf{d}, \sigma_w^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_G^2$ を識別するための必要十分条件は (16) − (19) 式の未知数に関する偏微行より (Jocobian) のランクが $G(G+K) + 2G + 1$ に等しいということである（Hsiao(1983))。

4.3.2 推計方法

これらを推計する方法は Chamberlain(1977) によって操作変数法 (the purged-instrumental variable method) が、Chamberlain and Griliches (1975) によって最尤法 the maximum-likelihood method) が提案されている。最尤法は有効推定ではあるが計算が難しい。操作変数法は有効ではないが、計算が簡単であり、一致推定は得られる（詳細については Hsiao(2003, chapter 5), pp.129-136 を参照)。

4.4 単一方程式推計

このアプローチをより厳密に考えてみよう。次のような同時方程式モデルを考える。[3]

$$y_1 = Z_1\delta_1 + u_1 \tag{20}$$

ここで $Z_1 = [Y_1, X_1]$, $\delta_1' = (\gamma_1', \beta_1')$

Y_1 は要素 δ_1 の内生変数、X_1 は要素 k_1 の外生変数、$X = [X_1, X_2]$ は連立方程式体系共通の外生変数。

誤差構成は次のように仮定する。

$$u_1 = Z_\mu \mu_1 + v_1 \tag{21}$$

ここで $Z_\mu = (I_N \otimes \iota_T)$, $\mu_1' = (\mu_{11}, \ldots, \mu_{N1})$ と $v_1' = (v_{111}, \ldots, v_{NT1})$ は平均ゼロの確率変数である。

$$E\begin{pmatrix}\mu_1 \\ v_1\end{pmatrix}(\mu_1', v_1') = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\mu_{11}} I_N & 0 \\ 0 & \sigma^2_{v_{11}} I_{NT} \end{bmatrix} \tag{22}$$

SUR 推計とはに右辺の内生変数が含まれている点が違う。SUR 推計の場合は次のように表せる。

$$E(u_1 u_1') = \Omega_{11} = \sigma^2_{v_{11}} I_{NT} + \sigma^2_{\mu_{11}}(I_N \otimes J_T) \tag{23}$$

(19) は次のように変換できる。$Q = I_{NT} - P$, $P = I_N \otimes \bar{J}_T$,

$$Qy_1 = QZ_1\delta_1 + Qu_1 \tag{24}$$

ここで $\tilde{y}_1 = Qy_1$, $\tilde{Z}_1 = QZ_1$ として (23) 式を 2SLS 推計する。その際 $\tilde{X} = QX$ を操作変数として用いる。

Within2SLS 推計は

$$\tilde{\delta}_{1W2SLS} = (\tilde{Z}_1' p_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1)^{-1} \tilde{Z}_1' p_{\tilde{X}} \tilde{y}_1 \tag{25}$$
$$var(\tilde{\delta}_1, W_{2SLS}) = \sigma^2_{v_{11}} (\tilde{Z}_1' p_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1)^{-1}$$

[3] 以下の議論は Baltagi(2001) 第 7 章に全面的に依拠している。

Within2SLS は次の式を GLS 推計することによっても導出可能である。

$$\tilde{X}'\tilde{y}_1 = \tilde{X}_1'\tilde{Z}\delta_1 + \tilde{X}'\tilde{u}_1 \tag{26}$$

$\bar{y}_1 = py_1, \tilde{Z}_1 = pZ_1$ とおき $\bar{X} = PX$ を操作変数として (5) 式を 2SLS 推計すると Between2SLS 推計が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{1B2SLS} &= (\bar{Z}_1' P_{\bar{x}} \bar{Z}_1)_1^{-1} \bar{Z}' P_{\bar{x}} \bar{y}_1 \qquad (27) \\ var(\hat{\delta}_{1B2SLS}) &= \sigma^2_{1_{11}} (\bar{Z}_1' P_{\bar{x}} \bar{Z}_1)^{-1} \\ \sigma^2_{\ell_{11}} &= T\sigma^2_{\mu_{11}} + \sigma^2_{v_{11}} \end{aligned}$$

Between2SLS は GLS 推計としても導出可能である。

$$\bar{X}'\bar{y}_1 = \bar{X}_1'\bar{Z}\delta_1 + \bar{X}'\bar{u}_1 \tag{28}$$

(25) と (27) を連立方程式として扱う。

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{y}_1 \\ \bar{X}'\bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{Z}_1 \\ \bar{X}'\bar{Z}_1 \end{pmatrix} \delta_1 + \begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{u}_1 \\ \bar{X}'\bar{u}_1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

ここで

$$E\begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{u}_1 \\ \bar{X}'\bar{u}_1 \end{pmatrix} = 0, \quad var\begin{pmatrix} \tilde{X}'\tilde{u}_1 \\ \bar{X}'\bar{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{v_{11}}\tilde{X}'\tilde{X} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{1_{11}}\bar{X}'\bar{X} \end{bmatrix}$$

(28) 式を GLS 推計すると the error component two-stage least squares (EC2SLS) を得る。

$$\hat{\delta}_{1,EC2SLS} = \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right]^{-1} \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{y}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{y}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right] \tag{30}$$

ここで

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{1EC2SLS} &= w_1\hat{\delta}_{1w2SLS} + w_2\hat{\delta}_{1B2SLS} \\ w_1 &= \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right]^{-1} \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}}\right] \\ w_2 &= \left[\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma^2_{v_{11}}} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right]^{-1} \left[\frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma^2_{1_{11}}}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2_{v_{11}} &= (y_1 - Z_1\tilde{\delta}_{1W2SLS})'Q(y_1 - Z_1\tilde{\delta}_{1W2SLS})\text{Á}N(T-1) \qquad (31) \\ \hat{\sigma}^2_{1_{11}} &= (y_1 - Z_1\hat{\delta}_{1B2SLS})'P(y_1 - Z_1\hat{\delta}_{1B2SLS})\text{Á}N \qquad (32) \\ \hat{\sigma}^2_{\mu_{11}} &= (\hat{\sigma}^2_{1_{11}} - \hat{\sigma}^2_{v_{11}})\text{Á}T > 0 \end{aligned}$$

(19) 式に $\Omega_{11}^{-1/2}$ をかけて

$$y_1^* = Z_1^*\delta_1 + u_1^* \tag{33}$$

ここで $y_1^* = \Omega_{11}^{-1/2} y_1, \quad Z_1^* = \Omega_{11}^{-1/2} Z_1, \quad u_1^* = \Omega_{11}^{-1/2} u_1$

$$\Omega_{11}^{-1/2} = (P\,\text{Á}\,\sigma_{1_{11}}) + (Q\,\text{Á}\,\sigma_{nu_{11}}) \tag{34}$$

$$y_{1_{it}}^* = (y_{1_{it}} - \theta_1 \bar{y}_{1i.})\,\text{Á}\,\sigma_{nu_{11}}, \quad \theta_1 = 1 - (\sigma_{nu_{11}}\,\text{Á}\,\sigma_{1_{11}})$$

$$\bar{y}_{1i.} = \sum_{t=1}^{T} y_{1it}\,\text{Á}\,T$$

操作変数 A を用いて (32) 式を 2SLS 推計すると

$$\hat{\delta}_{1,2SLS} = (Z_1^{*'} P_A Z_1^*)^{-1} Z_1^{*'} P_A y_1^* \tag{35}$$

ここで $P_A = A(A'A)^{-1}A'$
最適操作変数を次のように表す。

$$X^* = \Omega_{11}^{-1/2} X = \frac{QX}{\sigma_{v_{11}}} + \frac{PX}{\sigma_{1_{11}}} = \frac{\tilde{X}}{\sigma_{v_{11}}} + \frac{\bar{X}}{\sigma_{1_{11}}}$$

$A = X^*$ とすると generalized two-stage least squares (G2SLS)

$$\hat{\delta}_{1,G2SLS} = (Z_1^{*'} p_{X^*}^* Z_1)^{-1} Z_1^* P_{X^*} y_1^* \tag{36}$$

を得る。
(32) 式に操作変数 $A = [QX, PX] = \left[\tilde{X}, \bar{X}\right]$ を用いて 2SLS 推計を行う。

$$\begin{aligned} P_A Z_1^* &= (P_{\tilde{X}} + P_{\bar{X}}) \left[\Omega_{11}^{-1/2} Z_1\right] \\ &= (P_{\tilde{X}} + P_{\bar{X}}) \left[\frac{Q}{\sigma_{nu_{11}}} + \frac{P}{\sigma_{\ell_{11}}}\right] Z_1 = \frac{P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma_{nu_{11}}} + \frac{P_{\bar{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma_{1_{11}}} \end{aligned} \tag{37}$$

ここで

$$Z_1^{*\prime} P_A Z_1^* = \left(\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{Z}_1}{\sigma_{nu_{11}}^2} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{Z}_1}{\sigma_{1_{11}}^2} \right)$$

$$z_1^{*\prime} P_A y_1^* = \left(\frac{\tilde{Z}_1' P_{\tilde{X}} \tilde{y}_1}{\sigma_{nu_{11}}^2} + \frac{\bar{Z}_1' P_{\bar{X}} \bar{y}_1}{\sigma_{1_{11}}^2} \right)$$

(29) 式の $\hat{\delta}_{1,EC2SLS}$ は $A = \left[\tilde{X}, \bar{X}\right]$ の時 (34) 式と同値である。
$EC2SLS$ は既存の 2SLS 推計法を用いて推計することが可能である。
第 1 ステップ： (19) 式 W2SLS と (27) 式 B2SLS を 2SLS で推計し、(24) と (26) 式を得る。
第 2 ステップ： $\hat{\sigma}_{v_{11}}^2$ と $\hat{\sigma}_{1_{11}}^2$ を (30)(31) によって推計し、(34) 式で用いる y_1^*, Z_1^*, X^* を得る。(19) 式を $\Omega_{11}^{-1/2}$ で変換して (32) 式を得る。
第 3 ステップ： 操作変数 $A = X^*$ か $A = [QX, PX]$ を用いて (32) 式を 2SLS 推計すると、それぞれ (34) と (29) 式を得る。

4.5 内生性テスト

(3) において誤差項 $\triangle u_{it1} = r_{it1}$ が系列相関を持つかどうかをテストする。[4]プーリング 2SLS で (3) 式を推計し $\hat{r}_{it1}$ を得る、(3) 式に $\hat{r}_{it1}$ の 1 期のラグを入れて、2SLS で再推計してやり、ラグの誤差項の係数を t 検定してやればよい。

代替的手法としては、固定効果を消去させ (期間平均をとって、それを各年の式から引く)、それに操作変数法を用いて 2SLS 推計する。期間平均との階差モデルを次のように表す。

$$\ddot{y}_{it1} = \alpha_1 \ddot{y}_{it2} + \ddot{z}_{it1}\beta_1 + \ddot{u}_{it1}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{38}$$

$\ddot{z}_{it1}$ と $\ddot{z}_{it2}$ が操作変数となる。

(37) 式を直接推計すると、自由度は $N(T-1) - k_1$ となり、k_1 は α_1 と β の要素の数になる。

この議論をさらに厳密に行うと次のようになる。

$$y = \alpha \iota_{NT} + X\beta + Z_\mu \mu + v = Z\delta + Z_\mu \mu + v \tag{39}$$

$$\mu_i = \bar{X}_i' \pi + \varepsilon_i \tag{40}$$

ここで $\varepsilon_i \vee iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\quad \bar{X}_i'$ は $1 \times K$ ベクトル

(39) は次のように書き換えられる。

$$\mu_i = Z_\mu' X \pi Á T + \varepsilon_i \tag{41}$$

ここで $\mu' = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$, $Z_\mu = I_N \otimes \iota_T$, $\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$.

(40) を (38) に代入すると、

$$y = X\beta + PX_\pi + (Z_\mu \varepsilon + v) \tag{42}$$

ここで $P = I_N \otimes \bar{J}_T$, ε と v は無相関で、$(Z_\mu \mu + v)$ は平均ゼロで次のような分散共分散行列構造をもつ。

$$V = E(Z_\mu \varepsilon + v)(Z_\mu \varepsilon + v)' = \sigma_\varepsilon^2 (I_N \otimes J_T) + \sigma_v^2 I_{NT} \tag{43}$$

(41) の GLS 推計は次のようになる。

$$\hat{\beta}_{GLS} = \tilde{\beta}_{Within} = (X'QX)^{-1} X'Qy \tag{44}$$

$$\hat{\pi}_{GLS} = \hat{\beta}_{Between} - \tilde{\beta}_{Within} = (X'PX)^{-1} X'Py - (X'QX)^{-1} X'Qy \tag{45}$$

[4]本節は Baltagi (2001, chap. 7), pp. 118-122 を引用している。

$$var(\hat{\pi}_{GLS}) = var(\hat{\beta}_{Between}) + var(\tilde{\beta}_{Within}) \tag{46}$$
$$= (T\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_v^2)(X'PX)^{-1} + \sigma_v^2(X'QX)^{-1} \tag{47}$$

Mundlak(1978) が示したように、(38) 式の最良線形不偏推定量 (BLUE) は固定効果（Within）推定である。ランダム効果推定は (39) 式を無視しておりバイアスが残る。(41) 式では全ての説明変数は固定効果に相関しているが、ランダム効果モデルでは説明変数と固定効果は無相関であることが想定されている。

Hausman and Taylor(1981) では、一部の説明変数のみが μ_i と相関しているというモデルを考えている。

$$y_{it} = X_{it}\beta + Z_i\gamma + \mu_i + v_{it} \tag{48}$$

Hausman and Taylor は $X = [X_1; X_2]$, $Z = [Z_1; Z_2]$, ここで X_1 は $n \times k_1$, X_2 は $n \times k_2$, Z_1 は $n \times g_1$ Z_2 は $n \times g_2$, $n = NT$ に分割し、X_1 と Z_1 は外生変数、X_2 と Z_2 は内生変数で μ_i と相関し、v_{it} とは無相関であるとする。

ウィズイン誤差項を次のように求める。

$$\hat{d}_i = \bar{y}_i - \bar{X}_i\hat{\beta}_w \tag{49}$$

(47) の時間平均をとり、$\hat{d}_i$ を z_i に関して、操作変数 $A = [X_1, z_1]$ を用いた 2 SLS 推計を行う。

$$\hat{\gamma}_{2SLS} = (Z'P_AZ)^{-1}Z'P_A\hat{d} \tag{50}$$

ここで $P_A = A(A'A)^{-1}A'$。

分散は次のように求められる。

$$\hat{\sigma}_v^2 = \tilde{y}'\bar{P}_{\tilde{X}}\tilde{y}\text{Á}N(T-1) \tag{51}$$

ここで $\tilde{y} = Qy$, $\tilde{X} = QX$, $\bar{P}_A = 1 - P_A$

$$\sigma_1^2 = \frac{(y_{it} - X_{it}\tilde{\beta}_w - Z_i\hat{\gamma}_{2SLS})'P(y_{it} - X_{it}\tilde{\beta}_w - Z_i\hat{\gamma}_{2SLS})}{N} \tag{52}$$

(47) を次のように変換する。

$$\Omega^{-1/2}y_{it} = \Omega^{-1/2}X_{it}\beta + \Omega^{-1/2}Z_1\gamma + \Omega^{-1/2}u_{it} \tag{53}$$

Hausman and Taylor 推計は、(51) 式を $\mathrm{A}_{HT} = \left[\tilde{X}, \tilde{X}_1, Z_1\right]$ を操作変数とした 2SLS 推計であると理解できる。

1. $k_1 < g_2$ であれば過小識別 $\hat{\beta}_{HT} = \tilde{\beta}_w$ であり $\hat{\gamma}_{HT}$ は不在。
2. $k_1 = g_2$ であれば適正識別でき、$\hat{\beta}_{HT} = \hat{\beta}_w$, $\hat{\gamma}_{HT} = \hat{\gamma}_{2SLS}$ である。
3. $k_1 > g_2$ であれば、過剰識別、(51) 式より得られた $\hat{\beta}_{HT}$ は $\hat{\beta}_w$ より有効である。

過剰識別テストは次の統計量によってテストできる。

$$\hat{m} = \hat{q}' \left[var(\tilde{\beta}_w) - var(\hat{\beta}_{HT}) \right]^{-1} \hat{q} \tag{54}$$

ここで $\hat{q} = \hat{\beta}_{HT} - \tilde{\beta}_w$, $\hat{\sigma}_v^2 \hat{m} \overset{H_0}{\to} X_\iota^2$, $\ell = \min[k_1 - q_2, NT - k]$ である。

参考文献

Baltagi, B.H. (1981b) "Simultaneous Equations with Error Components," Journal of Econometrics, 17, pp.189-200.

Baltagi, B.H.(2001) Econometric Analysis of Panel Data, 2nd ed, New York: John Wiley & Sons.

Chamberlain, G. (1977) "Education, Income, and Ability Revisited," in Latent Variables in Socio-Economic Models, eds. by D.J. Aigner and A.S. Goldberger, pp.143-61, Amsterdam: North Holland.

Chamberlain, G. and Z. Griliches (1975) "Unobservables with a Variance-Components Structure: Ability, Schooling and the Economic Success of Brothers," International Economic Review, 16, p.422-50.

Hausman, J.A. and W.E. Taylor (1981) "Panel Data and Unobservable Individual Effects," Econometrica, 49, pp.1377-1398.

Hsiao, C. (1983) "Identification," in Handbook of Econometrics, vol.I, edited by Z. Griliches and M. Intriligator, pp.223-283. Amsterdam: North-Holland.

Hsiao, C. (2003) Analysis of Panel Data 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Mundlak, Y. (1978a) "On the Pooling of Time Series and Cross-Section Data," Econometrica, 46, pp.69-85.