第3講　質的従属変数クロスセクションデータ分析

3.1　質的従属変数クロスセクション推定

これまでクロスセクションデータでよく用いられてきた質的（離散的）従属変数を用いた推定はパネルデータでも有効である[1]。具体的に例を挙げれば、車を買うかどうか、あるいは車を所有しているかどうか、住宅を買うかどうか、労働組合に参加するかどうか、結婚するかどうかなどの意思決定問題に計量経済学的に答えることができる。このような場合、従属変数 y_{it} は一般に選択しなければ０、選択すれば１の２項選択の形をとることが多いが、経済主体 i が時間 t に意思決定をする（例えば、結婚する）確率を p_{it} と表せば、従属変数の期待値は $E(y_{it}) = 1 \cdot p_{it} + 0 \cdot (1 - p_{it}) = p_{it}$ となり、これは通常、なんらかの変数 (x_{it}) で説明される。

$$p_{it} = \Pr[y_{it} = 1] = E(y_{it}|x_{it}) = F(x'_{it}\beta) \tag{1}$$

クロスセクションデータを用いた実証研究では $F(x'_{it}\beta)$ の定式化としてプロビット・モデルとロジット・モデルがそれぞれ次のように定義されている。

プロビット・モデル

$$F(x'_{it}\beta) = \Phi(x'_{it}\beta) = \int_{-\infty}^{x'_{it}\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \tag{2}$$

ロジット・モデル

$$F(x'_{it}\beta) = \frac{e^{x'_{it}\beta}}{1 + e^{x'_{it}\beta}} \tag{3}$$

これらのモデルでは、実際に何らかの意思決定がなされたとすると、従属変数が直接は観察できないある水準を超えたことを意味している。すなわち、

$$\begin{aligned} y_{it} &= 1 \quad if \ y^*_{it} > 0 \\ y_{it} &= 0 \quad if \ y^*_{it} \leqslant 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$y^*_{it} = x'_{it}\beta + u_{it}$. つまり

$$\Pr[y_{it} = 1] = \Pr[y^*_{it} > 0] = \Pr[u_{it} > -x'_{it}\beta] = F(x'_{it}\beta) \tag{5}$$

となる。

[1] この分野における基本文献は Maddala(1983, 1987) である。また、最近の文献には Gourieroux (2000)、Lee (2002) がある。残念ながら、ここでは Maltinominal logit, ordered probit, sequential Tobit、Count data などについては扱わない。

3.2 パネル・プロビット・モデルとパネル・ロジット・モデル

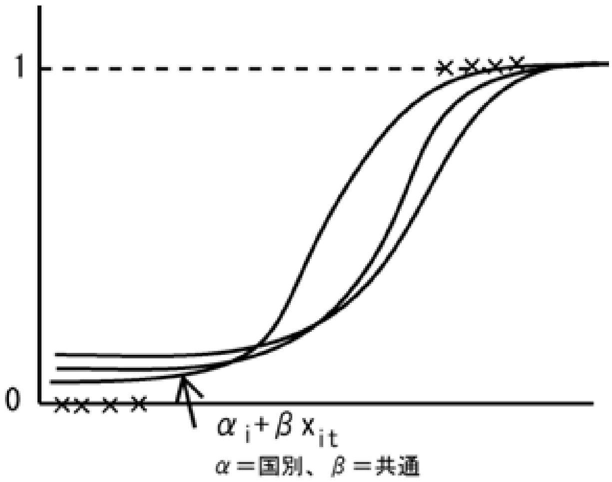
パネルデータの場合、誤差項に固定効果 α_i が入ることで従来のプロビット分析、ロジット分析とは異なってくる。次のような固定効果モデルを考えよう。

$$y^*_{it} = x'_{it}\beta + \alpha_i + \nu_{it} \tag{6}$$

$$\Pr[y_{it} = 1] = \Pr[y^*_{it} > 0] = \Pr[\nu_{it} > -x'_{it}\beta - \mu_i] = F(x'_{it}\beta + \alpha_i) \tag{7}$$

ここで、T を固定すると、固定効果 α_i のパラメータは N に応じて増加する。これは、パラメータ α_i は固定された T に対して一致推定を得ることが出来ないことを意味している[2]。線形パネルデータ回帰モデルでは、パラメータ α_i はウィズイン推定によって除去して、β だけに対しては一致推定を得ることができる[3]。

簡単なロジット、プロビットモデルを考えてみよう。



クロスセクション推計であれば α_i は $\alpha = \alpha_i \forall_i$ で全てのデータに対し共通であったが、パネル推計では国別の α_i が成り立つ可能性がある。しかも同時に推計するパラメータ β は全てのデータに共通であると想定されている。この場合、α を付随（incidental）パラメータと呼び β を構造（structural）パラメータと呼ぶ。

問題は、このような α_i が確定 (識別) できるかということと、その場合 β の推定にバイアスはないかということである。

[2] この問題は Neyman and Scott (1948) によって古典的付随パラメータ問題 (the classical incidental parameter problem) と呼ばれているものに相当する。Lancaster (2000) はこの問題は現在も解決されていないことを指摘した上で、固定効果の直交条件を見つけることが重要であると指摘している。

[3] Hsiao(2002) でも示されているように、β と μ_{i} が漸近的に独立であれば、線形モデルの最尤法で β の一致推計を得ることが出来る。これが非線形モデルの場合やプロビット・モデルの場合には一致推計を得ることが出来ない。

3.2.1 Incidental Parameter Problem (付随パラメータ問題)

一般的な線形パネルモデルを考える。

$$y_{it} = \alpha_i + \beta x_{it} + \varepsilon_{it}$$

α_i 付随パラメータと β 構造パラメータがともに適切に推計できれば問題はないが、誤差構成から α_i が直交条件によって分離できなければ β の推計は不一致となる。

条件付け分離による解決

もし α_i と β を条件付け関数として 2 つの尤度関数に分離できるとする。

$$l(y \mid \alpha, \beta) = l_1(s \mid \alpha) l_2(y \mid s, \beta) \tag{8}$$

尤度関数 l_1 が l_2 から完全に独立（likelihood orthogonal）であれば、α_i, β は一致推計となる。すなわち

$$\frac{\partial^2 \log l}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \tag{9}$$

l_1 と l_2 が完全には独立していない場合

$$l(y \mid \alpha, \beta) = l_1(s \mid \alpha, \beta) l_2(y \mid s, \beta) \tag{10}$$

s は α には依存していないが、β には依存している。この場合でも、尤度関数 l_2 を最大化するような β を得ることは可能である。

尤度関数が次のように分離できる場合

$$l(y \mid \alpha, \beta) = l_1(s \mid \beta) l_2(y \mid s, \alpha, \beta) \tag{11}$$

s の限界分布に基づいて、β と α を推計することが可能である（これを partial likelihood procedure と呼ぶこともある)。

もし α_i が固定効果であり、β が共通パラメータであるとき、$\alpha_i = \alpha(\alpha_i^*, \beta)$ と表せるとする。ここで α_i^* は β と直交している。

次のような関係が導ければ

$$\frac{\partial^2 \log l_i}{\partial x_i^* \partial \beta} = 0 \tag{12}$$

ここで l_i は個別主体 i の尤度貢献分であると考えられる。対数尤度関数を α^* と β について微分して、期待値をとると

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_j} E\left(\frac{\partial^2 \log l_i}{\partial \alpha_i^2} \right) + E\left(\frac{\partial^2 \log l_i}{\partial \alpha_i \partial \lambda_j} \right) = 0 \quad j = 1, \ldots, k \tag{13}$$

を得る。これを解くと α_i が β に依存していることが明らかになる。直交条件付固定効果 α_i^* を用いて β を最尤法推定するというのが一つの解決策である。具体的には次のような尤度関数を考える。

$$l_M(\beta) = l(\beta, \alpha_\beta^*) \mid j_{\alpha^* \alpha^*}(\beta, \hat{\alpha}_\beta^*) \mid^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

ここで $j_{\alpha^*\alpha^*}(\beta,\alpha^*) = -\frac{\partial^2 \log l(\lambda,\alpha^*)}{\partial\alpha^*\partial\alpha^*}$

付随パラメータ問題は未解決であるが、Chamberlain (1980) は μ_i の最小十分統計量は $\sum_{t=1}^{T} y_{it}$ であることを示し、次のような条件付尤度関数を最大化して β のロジット推定を得ることを提唱した。

$$L_c = \prod_{i=1} \Pr(y_{i1}, \ldots y_{iT} \mid \sum_{t=1}^{T} y_{it}) \tag{15}$$

この方法では十分統計の定義により、推定されたパラメータ β は α_i に依存しない。

パネルロジットの場合 P_r は次のように表せる。

$$P_r(y_{it} = 1 \mid \alpha_i, \beta, x_{i1}, \ldots, x_{iT}) = \frac{1}{\mid 1 + e^{-\alpha_i - \beta' x_{it}}} \tag{16}$$

α は情報的に β と直交していない。β と直交しているような固定効果を次のように定義する。

$$\alpha_i^* = \sum P_r(y_{it} = 1 \mid \alpha_i, \beta, x_{i1}, \ldots, x_{iT}) \tag{17}$$

この最尤推定量は

$$\hat{\alpha}_i^* = \sum_{t=1}^{T} y_{it} \tag{18}$$

となる。この $\hat{\alpha}_i^*$ を用いて推計される β は一致推定量となる。ベイジアン推計として α_i^* に相当する prior(事前情報) が利用可能かどうかは不明である。

このモデルは Chamberlin の提示した条件付最尤法と固定効果を考慮しない通常のロジット推定の差を Hausman の χ^2 検定の要領で検定できる。通常のロジット推定が有効一致推定であるのは固定効果がない場合であり、固定効果がある場合には一致推定にはならない。Chamberlin の推定は固定効果の有無にかかわらず一致しているが、固定効果がない場合には、有効ではなくなる[4]。

代替的なモデルとして Liang and Zeger (1986) が提案した Generalized Estimating Equations (GEE) Population-averaged Model がある。これは、ランダム効果線形推定法であり、プロビット推定法を線形近似した簡便法である。

[4] これに対して、固定効果プロビット・モデルでは計算はロジット・モデルのように簡単ではない。一般に固定効果を含んだ最尤法は、N が大きく、T が固定されている場合には、一致推計量が得られない。Heckman (1981b) を参照。

3.3 パネル・トービット・モデル

これまで、従属変数が０か１の二項選択のモデルを考えてきたが、０と連続変数の選択はトービット・モデルで扱うことができる。パネルデータでは固定効果トービット・モデルは次のように定義できる[5]。

$$y_{it}^* = x_{it}^{'}\beta + \alpha_i + \nu_{it} \qquad \nu_{it} \sim IIN(0, \sigma_\nu^2) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} y_{it} &= y_{it}^* \quad if\ y_{it}^* > 0 \\ y_{it} &= 0 \quad otherwise \end{aligned} \tag{20}$$

ここで $d_{it} = 1 \ \ if \ y_{it}^* > 0,\ d_{it} = 0 \ \ otherwise$ とすると、対数尤度関数は次のように定義できる。

$$LogL = \sum_{i,t}(1 - d_{it})Log\Phi(\frac{-x_{it}\beta - \alpha_i}{\sigma}) + \sum_{i,t} d_{it}\{-\frac{1}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(y_{it} - x_{it}^{'}\beta - \alpha_i)^2\} \tag{21}$$

線形モデルとは違い β と σ は α_i に依存する。これまで何度も論じてきたように、パラメータ α_i は固定された T に対して一致推定を得ることが出来ない。この不一致はパラメータ β と σ を通して発生する。

Heckman and MaCurdy (1980) は反復法 (iterative methods) によって推定することを提唱した[6]。すなわち、β と σ に対して初期値を与え、それを所与として、上述の対数尤度関数を α_i に関して最大化する。その値を再び尤度関数に代入し、今度は β と σ に関して最大化し、新たな β と σ を得る。この作業を β と σ が収束するまで繰り返すのである。

Honoré(1992) は誤差項の分布を特定化しないセミパラメトリック推定を提唱している。具体的には（15）式より次のように定義する。

$$u_{ist}(b) = \max\{y_{is}, (x_{is} - x_{it})b\} - \max\{0, (x_{is} - x_{it})b\} \tag{22}$$

$b = \beta$ の場合、

$$\begin{aligned} u_{ist}(\beta) &= \max\{y_{is}, (x_{is} - x_{it})\beta\} - \max\{0, (x_{is} - x_{it})\beta\} \\ &= \max\{\alpha_i + \nu_{it}, -x_{is}\beta, -x_{it}\beta\} - \max\{-x_{is}\beta, -x_{it}\beta\} \end{aligned} \tag{23}$$

[5] ランダム効果トービット・モデルはランダム効果プロビット・モデルを拡張することによって推計できる。しかし、これまでのところ Hausman and Wise (1979) などを例外として、あまり実証研究には用いられていない。

[6] 彼らは、従属変数のラグが説明変数に入っていないのならば、$\mu_{\rm i}$ の一致推計を得ることが出来ないということはそれほど大きな問題ではないと述べている（Heckman and MaCurdy(1980, P.59))。

ここで $u_{ist}(\beta)$ は s と t に関して対称である。ν_{it} が $i.i.d.$ に従っているとすれば、$u_{ist}(\beta)$ と $u_{its}(\beta)$ も $i.i.d.$ に従う。このことから、次のモーメント条件が導かれる。

$$E[(\xi(\psi(u_{its}(\beta)-\psi(u_{ist}(\beta))))|x_{it},\mu_i]=0 \tag{24}$$

この条件を満たすようにGMM推定すれば β は一致推定となる。モンテカルロ実験によれば、N が小さければ β 推定は歪みを持つことが示されている。

パネルプロビットの場合 P_r は次のように表せる。

$$P_r(y_{it}=1 \mid \alpha_i,\beta,\{x_{i1},\dots,x_{iT}\})=\Phi(\alpha_i+\beta x_{it}) \quad t=1,\dots,T \tag{25}$$

Φ は標準正規分布に従う。

直交条件を用いた α_i^* の推定量は

$$\alpha_i^*=\sum_{t=1}^{T}\int_{-\infty}^{\alpha_i+\beta x_{it}} h(u)du, \quad h(u)=\frac{\Phi(u)^2}{\Phi(u)\bar{\Phi}(u)} \tag{26}$$

となる。

参考文献

Gourieroux, C. and A. Monfort (1993) “Simulation-based Inference: A Survey with Special Reference to Panel Data Models,” Journal of Econometrics, 59, pp.5-33.

Hausman, J.A. and D. Wise (1979) “Attrition Bias in Experimental and Panel Data: the Gary Income Maintenance Experiment,” Econometrica, 47, pp.455-473.

Heckman, J.J. (1981b) “The Incidental Parameters Problem and the Problem of Initial Conditions in Estimating a Discrete time-Discrete Data Stochastic Process,” in C.F. Manski and D. McFadden (eds.), Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications, MIT Press, Cambridge.

Heckman, J.J. and T.E. MaCurdy (1980) “A Life-Cycle Model of Female Labor Supply,” Review of Economic Studies, 47, pp.47-74.

Honoré, B.E. (1992) “Trimmed LAD and Least Squares Estimation of Truncated and Censored Regression Models with Fixed Effects,” Econometrica, 60, pp.533-565.

Hsiao, C. (2002) Analysis of Panel Data 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Lancaster, T. (2000) “The Incidental Parameter Problem Since 1948, Journal of Econometrics 95, pp.391-413.

Lee, M.J.(2002) Panel Data Econometrics: Methods-of-Moments and Limited Dependent Variables, San Diego: Academic Press.

Liang, K.Y. and L. Zeger (1986) "Longitudinal Data Analysis Using Generalized Linear Models," Biometrika 73, pp.13-22.

Maddala, G.S. (1983) Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics, Cambridge: Cambridge University Press.

Maddala, G.S. (1987) "Limited Dependent Variable Models Using Panel Data," The Journal of Human Resources, 22, pp.307-338.

Neyman, J. and E.L. Schott (1948) "Consistent Estimates Based on Partially Consistent Observations," Econometrica, 16, pp.1-32.