第 5 講　パネルデータ分析の基礎編

パネルデータ分析の手法としては、大きく、静学的アプローチと動学的アプローチに分けることができる。静学的アプローチとしては固定効果推定法、ランダム効果推定法があり、動学的アプローチには操作変数法によるものと、一般化積率法 (GMM) によるものがある。また動学的アプローチの拡張としてパネル単位根推定がある。さらに進んだトピックとしてはクロスセクション・データ分析の手法を応用した質的従属変数パネル推定についても概観する[1]。また、パネルデータ分析の場合、モデル選択が重要になってくるので、モデル選択検定法についても説明する。

5.1　固定効果推定

先の（1）式と（2）式で表されるパネルモデルをさらに簡単化 ($\alpha = 0; \lambda_t = 0$ と仮定）して固定効果推定を説明する。基本的な考え方は次のようにまとめることが出来る。

$$y_{it} = \beta x_{it} + \mu_i + \varepsilon_{it} \tag{1}$$

ここで μ_i は固定効果を表す。$\varepsilon_{it} \sim IN(0; \sigma^2)$ とする。
まず、モデル全体（プーリング）の平均を $\bar{x}$ と $\bar{y}$ と定義すると

$$\bar{x} = \frac{1}{TN}\sum_{t=1}\sum_{i=1} x_{it} \tag{2}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{TN}\sum_{t=1}\sum_{i=1} y_{it} \tag{3}$$

この変数から各個体の残差平方和と x と y それぞれに関する残差を相乗したものを次のように定義する。

$$S_{xx}^{pool} = \sum_{i=1}\sum_{t=1}(x_{it} - \bar{x})^2 \tag{4}$$

$$S_{xy}^{pool} = \sum_{i=1}\sum_{t=1}(x_{it} - \bar{x})(y_{it} - \bar{y})^2 \tag{5}$$

$$S_{yy}^{pool} = \sum_{i=1}\sum_{t=1}(y_{it} - \bar{y})^2 \tag{6}$$

[1] 本論文では、連立方程式パネル推定、可変パラメータ・パネル推定などは扱わない。

同一個体内で被説明変数と説明変数の時系列 (ウィズイン) 平均を次のように定義する。

$$\bar{x}_i = \frac{1}{T}\sum_t x_{it} \tag{7}$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_t y_{it} \tag{8}$$

この変数からの個体内（ウィズイン）時系列平均の残差平方和と x と y それぞれに関する残差を相乗したものを次のように定義する。

$$S_{xx}^{with} = \sum_{i=1}\sum_{t=1}(x_{it} - \bar{x}_i)^2 \tag{9}$$

$$S_{xy}^{with} = \sum_{i=1}\sum_{t=1}(x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i) \tag{10}$$

$$S_{yy}^{with} = \sum_{i=1}\sum_{t=1}(y_{it} - \bar{y}_i)^2 \tag{11}$$

次に、個体間（ビトウィーン）の残差平方和を次のように定義する。

$$S_{xx}^{btw} = \sum_{i=1} T(\bar{x}_{it} - \bar{x})^2 \tag{12}$$

$$S_{xy}^{btw} = \sum_{i=1} T(\bar{x}_{it} - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y}) \tag{13}$$

$$S_{yy}^{btw} = \sum_{i=1} T(\bar{y}_i - \bar{y})^2 \tag{14}$$

以上より、次のような関係が導かれる。

$$S_{xx}^{pool} = S_{xx}^{with} + S_{xx}^{btw} \tag{15}$$

$$S_{xy}^{pool} = S_{xy}^{with} + S_{xy}^{btw} \tag{16}$$

$$S_{yy}^{pool} = S_{yy}^{with} + S_{yy}^{btw} \tag{17}$$

推計される β に関しては、プーリング推定（OLS）(β^{pool})、ウィズイン推定（β^{with})、ビトウィーン推定（β^{btw}）に対しておのおのの次のような関係が導かれる。

$$\beta^{pool} = [S_{xx}^{pool}]^{-1}S_{xy}^{pool} = [S_{xx}^{with} + S_{xx}^{btw}]^{-1}[S_{xy}^{with} + S_{xy}^{btw}] \tag{18}$$

$$\beta^{with} = [S_{xx}^{with}]^{-1}S_{xy}^{with} \tag{19}$$

$$\beta^{btw} = [S_{xx}^{btw}]^{-1}S_{xy}^{btw} \tag{20}$$

これより次の式を得る。

$$S_{xy}^{with} = S_{xx}^{with}\beta^{with} \tag{21}$$

$$S_{xy}^{btw} = S_{xx}^{btw}\beta^{btw} \tag{22}$$

これを (21) に代入すると次のように整理できる。

$$\beta^{pool} = m^{with}\beta^{with} + m^{btw}\beta^{btw} \tag{23}$$

ここで

$$m^{with} = [S_{xx}^{with} + S_{xx}^{btw}]^{-1}S_{xx}^{btw} = I - m^{btw} \tag{24}$$

(26) 式はプーリング推定（OLS）はウィズイン推定とビトウィーン推定の加重平均であることを示している。もしウィズイン推定の変動が小さく m^{with} が小さい場合には、ビトウィーン推定とプーリング推定は近似してくる。

5.2 ランダム効果推定

固定効果推定では各主体に対してダミーを割り当てるために、N が大きくなれば、推定すべきパラメータの数が膨大なものになり、その結果、推定における自由度は著しく低下する。固定効果 μ_i をランダム（確率変数、μ_i = IID（0、σ_μ^2））だと仮定すれば、この問題は回避できる。ランダム効果推定を用いるのに適しているのは母集団から N 個を無作為に抽出したような場合である[2]。

ランダム効果モデルでは、固定効果 μ_i を確率変数として扱う。μ_i は撹乱項 u_{it} から独立している。

$$\mu_i \sim IID(0, \sigma_\mu^2) \tag{25}$$

$$u_{it} \sim IID(0, \sigma_u^2) \tag{26}$$

単純化のために説明変数はひとつとし、μ_i を確率変数とする。誤差項は次のように表せる。

$$v_{it} = \mu_i + u_{it}$$

ここで

$$\begin{aligned} cov(v_{it}, v_{is}) &= \sigma_u^2 + \sigma_\mu^2 \quad for\ t = s \\ &= \sigma_\mu^2 \qquad for\ t \neq s \\ cov(v_{it}, v_{js}) &= 0 \qquad for\ \forall_{t,s} \quad if\ i \neq j \end{aligned}$$

[2]家計に関するサンプル調査等がこれに相当する。

これは同一主体内の誤差項 $¹_i$ と u_{it} が相関していることを表し、効率的な推定値を得るためには一般化最小二乗法（generalized least square: GLS）を用いる必要がある。Maddala (1971a,b) に従って以下のように簡略化できる。

$$—^{rnd}_{GLS} = \frac{S^{with}_{xy} + µS^{btw}_{xy}}{S^{with}_{xx} + µS^{btw}_{xx}};\ µ = \frac{¾^2_u}{¾^2_u + T¾^2_®} \qquad (27)$$

先の (21)(22)(23) より

$$—^{pool} = \frac{S^{pool}_{xy}}{S^{pool}_{xx}}$$

$$—^{with} = \frac{S^{with}_{xy}}{S^{with}_{xx}}$$

であり、プーリング推定（OLS）とウィズイン推定（LSDV：least squares with dummy variables）はランダム効果推定（GLS）においてそれぞれ $µ = 1$ と $µ = 0$ に相当する特殊ケースであることがわかる。

5.3 モデル選択のための検定

計量経済学の検定には一般に二つの意味がある。第一に、理論モデルが正しいかどうかを検定するということである。これは、理論的に演繹された関係式が統計的に支持されるかどうかを確認する作業であり、仮説検定の基礎にある考え方である。しかし、すでに第 2 節で述べたように、パネルデータ分析は多様な経済主体の多様な状況に対する反応を含んでいるという意味で、同質的な経済主体の行動関係を仮説検定するということだけでは不十分である。

第二には、与えられたデータに対して適切な推定方法が用いられているかどうかを検証するということである。これは、実験計画法あるいは分散分析を基礎にして、集められたデータから、様々なノイズやコントロールできる要因を取り除いていく作業の一環と考えることができる。一般にパネルデータは時系列データやクロスセクションデータよりも多くの観察点を含み、事前に全体的な傾向を把握することが難しいことが多い。このような場合、手元にあるパネルデータをどのような手法で分析するのが望ましいかは、データ自体に決めさせるというのが正当な考え方である。そのためには、システマティックな検定手続きが必要になる[3]。

[3] もちろん、データ自体に決めさせると言っても、理論モデル設定が悪く、用いられた変数に間違えがあれば、統計量は不十分となる。ここでは不均一分散や系列相関、誤差項の正規性について論じる余裕はないが、これらの問題は基本的にはモデルの特定化に問題があることによって生じていると考えられるので、統計的にこれらの問題が検出されれば、理論モデルに戻って、検討し直す必要があり、小手先の修正は勧められない。

以下では第 2 節で説明した様々な推定法に基づく静学モデルを対象にしたモデル選択の手順を説明する[4]。

第一に、固定効果推定法が正当化されるかどうかは、先ず、一元配置固定効果推定法（LSDV）とプーリング推定法（OLS) を比べる。これは一元配置固定効果推定法における経済主体別の定数項が全て等しいという制約が課される場合がプーリング推定法であるとして、その制約について F 検定でテストする。つまり、制約が無効であるとの帰無仮説が棄却されると、一元配置固定効果推定法が正当化される。次に、二元配置固定効果推定法がプーリング推定法や一元配置固定効果推定法に対して正当化されるかどうかも同様に係数制約問題に関する F 検定を通して判断できる。

第二に、ランダム効果推定法がプーリング推定法に対して正当化されるかどうかについてはラグランジュ乗数法 (Lagrange Multiplier test) を用いる。すなわちプーリング推定法（OLS）の誤差項が平均的にゼロであるとの帰無仮説についてラグランジュ乗数統計量をもとめカイ二乗検定を行うのである。この結果、帰無仮説が棄却されると、誤差項に経済主体毎の異質性が存在することを意味し、ランダム効果推定法（GLS）が正当化される。

第三に、固定効果推定法とランダム効果推定法の間のモデル選択は Hausman test を用いる。これは、個別主体要因が、説明変数と無相関であるとの帰無仮説を立て、それをカイ二乗検定するものである。仮説が棄却されると固定効果推定法が正当化されることとなる。

上述の手続きをトーナメント方式で順次行って行くことによって最適な推定方法が選択できる。モデル選択の構造は図 2 にまとめられている。具体的な検定テストの考え方は以下で順に説明していきたい。

5.3.1 F 検定

これまでの議論から明らかなように、まず時系列推定法、すなわち各経済主体別の定数項および傾きが全てばらばらの場合と、それらが全て等しいという制約が課されるプーリング推定法の場合について F 検定でテストする。

因みに、ここで用いる F 検定は分散分析で用いる F 検定に準じるものである。すなわち、ある帰無仮説の下で推定される残差平方和（RSS_0）を自由度 ($º_0$) で割ったものは、その自由度のカイ二乗分布に従い、対立仮説の下でも同様に残差平方和 (RSS_1) を自由度 ($º_1$) で割ったものを求め、帰無仮説と対立仮説の比をとったものは F（$º_0; º_1$）分布に従うという関係を用いる。

$$F(º_0; º_1) = \frac{RSS_0=º_0}{RSS_1=º_1} \qquad (28)$$

[4] パネルデータは年次データであったり、あるいは 5 年に一回のデータであったりして、データ頻度が低いことが多く、実際には静学モデルを用いることが多い。むしろ、年次データに動学モデルを当てはめても、データ自体が動学的な調整過程を捉えていない可能性が高い。

具体的には、全ての定数項と傾きが共通であるとの帰無仮説の下に、第一自由度 $(N ¡ 1)(k+1)$、第二自由度 $(NT ¡ N(K+1))$ の F 分布に従う。この検定量は次のように表せる。

$$F(\text{pool vs time series}) = \frac{(RSS_{Pool} ¡ RSS_{TimeSeries})=(N ¡ 1)(k+1)}{(1 ¡ RSS_{TimeSeries})=(NT ¡ N(k+1))} \tag{29}$$

ここで、RSS_{pool} はプーリング推定法の残差平方和、$RSS_{TimeSeries}$ は時系列推定法の残差平方和を表している。他の変数はすでに定義した通りである。

次に、単純なプーリング推定法が棄却された場合、各主体の定数項はばらばらだが、傾きは等しいという一元配置固定効果推定法を帰無仮説として、時系列推定法を F 検定でテストする。具体的な F 分布は次のようになる。

$$F(\text{oneway fixed vs time series}) = \frac{(RSS_{of} ¡ RSS_{TimeSeries})=(N ¡ 1)}{(1 ¡ RSS_{TimeSeries})=(N(T ¡ 1)k)} \tag{30}$$

ここで、RSS_{of} は一元配置固定効果推定法の残差平方和である。ここで帰無仮説が棄却されなければ、一元配置固定効果推定法が採択される。

さらに、一元配置固定効果推定法が時系列推定法に対して採択されたとして、これがプーリング推定法に対して正当化されるかどうかを検定する。すなわち、一元配置固定効果推定法において定数項が全て等しい場合がプーリング推定法である。このとき第一自由度 $(N ¡ 1)$、第二自由度 $(NT ¡ (N+1))$ の F 分布に従う。

$$F(\text{pool vs oneway fixed}) = \frac{(RSS_{pool} ¡ RSS_{of})=(N ¡ 1)}{(1 ¡ RSS_{of})=(NT ¡ (N+1))} \tag{31}$$

最後に、一元配置固定効果推定法がプーリング推定法に対して採択されたとして、これが二元配置固定効果推定法に対して正当化されるかどうかを検定する。すなわち、二元配置固定効果推定法における時間ダミーのパラメータがすべてゼロである場合が一元配置固定効果推定法となるとすると、F 分布は第一自由度 $(T ¡ 1)$、第二自由度 $(NT ¡ (N+1)) ¡ (T ¡ 1))$ に従う。

$$F(\text{oneway fixed vs twoway fixed}) = \frac{(RSS_{of} ¡ RSS_{tf})=(T ¡ 1)}{(1 ¡ RSS_{tf})=(NT ¡ (N+1) ¡ (T ¡ 1))} \tag{32}$$

ここで、RSS_{tf} は二元配置固定効果推定法の残差平方和である。

このように、F 検定を順次行うことによって時系列 (個別) 検定とプーリング検定、一元配置固定効果推定、二元配置固定効果推定の間に序列をつけることが出来る。

5.3.2 Hausman検定

Hausman検定はモデル特定化を検証するために用いられている。帰無仮説H_0はモデルの特定化が正しいというものであり、対立仮説H_1はモデルの特定化に誤りがあるというものである。これは、簡単に言えば、二つの仮説に基づいて推定されたパラメータが等しいかどうかを検定して、等しくなければ、モデルの特定化に問題があるということになる。

次のようなモデルを考えよう[5]。

$$y = \beta x + u \tag{33}$$

OLS推定するためには、xはuから独立していなければならない。仮説検定の形で表すと次のようになる。

$$H_0 : x\text{と}u\text{は互いに独立}$$
$$H_1 : x\text{と}u\text{は互いに依存}$$

ここで、Hausman検定のための設定として、βに関して次のような二つの推定が得られたとしよう。

$\hat{\beta}_0$はH_0の下で一致かつ有効推定であるが、H_1の下では一致推定ではない。

$\hat{\beta}_1$はH_0でもH_1の下でも一致推定であるが、H_0の下では有効推定ではない。

そこで$\hat{q} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$と定義する。ここから、Hausmanは次の関係を導いた[6]。

$$\mathrm{var}(\hat{q}) = \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) - \mathrm{var}(\hat{\beta}_0) \quad H_0\text{の下でそれぞれの分散を推定}$$

$\hat{V}(\hat{q})$を$\mathrm{var}(\hat{q})$の一致推定とすると、次の統計量は自由度1のカイ二乗分布に従うかどうかで帰無仮説H_0を検定できる。

$$m = \frac{\hat{q}^2}{\hat{V}(\hat{q})} \sim \chi^2(1) \tag{34}$$

具体的にパネルデータ分析に関して、固定効果かランダム効果のどちらが望ましいかというテストをするためには次のような仮説を検定することになる。

$$H_0 : \text{ランダム効果は説明変数}\,x_{it}\text{と相関していない}$$
$$H_1 : \text{ランダム効果は説明変数}\,x_{it}\text{と相関している}$$

[5] 以下の説明はMaddala(2001、pp.494-495）に従っている。

[6] まず、$\mathrm{var}(\hat{q}) = \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) - \mathrm{var}(\hat{\beta}_0)$が成り立つためには、$\mathrm{cov}(\hat{\beta}_0; \hat{q}) = 0$を証明しなければならない。この証明はMaddala(2001, pp.495-496)で与えられている。

H_0 の下ではランダム効果推定（$\hat{\beta}_r$）が有効一致推定である。固定効果推定 $\hat{\beta}_f$ は帰無仮説に関係なく一致推定となる。ここで $q = \hat{\beta}_f - \hat{\beta}_r$ と定義し、$V(q) = V(\hat{\beta}_f) - V(\hat{\beta}_r)$ を Hausman 検定、$m = \hat{q}'[\hat{V}(\hat{q})]^{-1}\hat{q} \sim \chi^2(k)$ を計算することになる。β が $k \times 1$ ベクトルであり、V_1 と V_0 が行列式で表される場合には、上の Hausman 検定量は次のように書き換えられる。

$$m = \hat{q}'[\hat{V}(\hat{q})]^{-1}\hat{q} \sim \chi^2(k) \tag{35}$$

結果はスカラーの場合と全く同じである[7]。

5.3.3 Breusch-Pagan 検定

もう一つのモデル特定化テストとしては固定効果の分散がゼロかどうかを検定する Breusch-Pagan 検定がある。

次のようなモデルを考えよう。すなわち、定数項 μ は個別固定効果 μ_i ではなく、すべての i に対する定数である。

$$y_{it} = \mu + x_{it}\beta + u_{it} \tag{36}$$

これは個別固定効果が存在しないので最小二乗法推定ができる。その残差項を $\hat{u}_{it}$ とすると、つぎのような統計量を定義できる。

$$S_1 = \sum_{i=1} \left(\sum_{t=1} \hat{u}_{it} \right)^2 \tag{37}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}\sum_{t=1} \hat{u}_{it}^2 \tag{38}$$

これに対して Lagrange Multiplier (LM) 統計を次のように定義すると、この統計量は自由度１のカイ二乗分布に従うはずである。

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)}\left(\frac{S_1}{S_2} - 1 \right)^2 \sim \chi^2(1) \tag{39}$$

この検定が有意であれば、個別固定効果 (プーリング推定) を棄却し、ランダム効果推定を採択することが望ましいことを意味する。

Hausman 検定と Breusch-Pagan 検定をあわせるとプーリング推定、ランダム効果推定、固定効果推定の間に序列をつけることが出来る。

[7] ここで用いる k は推計すべきパラメータ β から定数項と時間ダミーを除いたパラメータの数を表している。

参考文献

[1] Maddala, G.S. (1971a) \the Use of Variance Components Models in Pooling Cross Section and Time Series Data," Econometrica, 39, pp.341-358.\

[2] Maddala, G.S. (1971b) \The Likelihood Approach to Pooling Cross-Section and time Series Data," Econometrica, 39, pp.939-53.

[3] Maddala, G.S.(2001) Introduction to Econometrics, 3rd ed, New York: John Weily & Sons.