

セットアップ

- 起業家が（分割不能な）リスクを伴う投資プロジェクトに投資しようとしている。
- 起業家の資金は限定されているので，資金潤沢なリスク中立の投資家に資金を提供してもらう。
- 唯一の消費財があり，ニューメレールの役割を果たす。
- プロジェクトの初期投資額は k で，確率 $p_i > 0$ で y_i の収益が得られる ($i = 0, 1, \dots, m$)。一般性を失うことなく，

$$y_0 = 0 < y_1 \dots < y_m$$

を仮定する。

- 起業家の初期資産額は $w > 0$ で，リスク中立であるとする。
- 投資家の資産額は， k より十分に大きいものとする。
- 利子率はゼロ。
- 起業家はコストなしで y_i を観察できる。投資家はコスト $c > 0$ を払って y_i を観察し，起業家に契約の遂行を強制できる。
- ここでの「負債契約 (e, z, B) 」は，起業家の投資額 $0 \leq e \leq w$ の決定と，投資家が y_i を観察する状態 i の集合 B ，個々の状態 i に対応する起業家から投資家への支払額 z_i を特定するものになる。
- したがって状態 i での起業家の消費は

$$x_i \equiv y_i - z_i + (w - e)$$

となる。

- 起業家については消費の非負制約と，有限責任の制約を仮定する。したがって負債契約は $x_i \geq 0$ を満たす必要がある。

エージェント問題

- 本人（投資家）の最大化問題は以下のようなになる。

$$\sum_i p_i z_i - \sum_{i \in B} p_i c_i - (k - e)$$

- 代理人（起業家）のペイオフは $\sum_i p_i x_i$ となる。代理人の効用の留保水準を \bar{u} で表すものとする。代理人の参加のための条件（individual rationality constraint: IR）は、

$$\sum_i p_i x_i \geq \bar{u}.$$

- 代理人が真の状態を報告するインセンティブを持たなければならない（incentive compatibility constraint: IC）。これは、真の状態が $i \in B$ で、投資家が $j \notin B$ を報告した場合、 $z_i \leq z_j$ でなければならないことを意味する。
- したがって本人（投資家）の最大化問題は、正式には以下のように記述される。

$$\sum_i p_i z_i - \sum_{i \in B} p_i c_i - (k - e) \tag{1}$$

subject to

$$(IR) \quad \sum_i p_i x_i \geq \bar{u}.$$

$$(IC) \quad z_i \leq z_j, \forall j \notin B$$

単純な負債契約の最適性

$$z_i = \min\{y_i, r\}$$

- Maximum equity participation: MEP

もし (e, z, B) が本人＝代理人問題の解であるなら, $e = w$ を仮定することができる.

- (1) 式において, すべての i に関して (e, z, B) を (e', z', B) に置き換える. ただし, $e' = w$ で $z'_i = z_i - (e - w)$ である.
- このとき (1) 式の値はまったく変化しない. したがって一般性を失うことなく, $e = w$ を仮定することができる.

- Uniform repayment:

もし (e, z, B) が本人＝代理人問題の最適解であるなら, $z_i = z_j, \forall i, j \notin B$

- IC 制約からすぐにこの結果は導出される.
- $r = z_i, \forall i, j \notin B$ と置くことにする.

- Bankruptcy rule:

もし (z, B) が本人=代理人問題の解であるなら, $B = \{i : y_i < r\}$ である. ただし, $r = z_i$ for some $i \notin B$.

- $y_i < r$ であるなら, $z_i < r$ であるはずであり, したがって $i \in B$.
 - いまある $i \in B$ について, $y_i \geq r$ であったものとしよう. すると IC 制約から, $z_i \leq r$. 検討しなければならないケースは2つある.
1. $z_i = r$ なら, i を除いた B' を定義することが可能であり, (z, B') は明らかに (z, B) よりも改善している. しかし, これは (z, B) が最適であるという定義に反する.
 2. $z_i < r$ なら, 以下のような契約 (z', B') を定義することができる.

$$z'_j = \begin{cases} r - d & j = i \\ z_j - d & j \neq i \end{cases}$$

ただし, $d = p_j(r - z_j)$ である. IR 制約・IC 制約は満たされるので, (1) 式の目的関数は増加する. これは (z, B) が最適であるという定義に反する.

- Maximum Recovery:

もし (z, B) が最適契約であるなら，一般性を失うことなく $i \in B$ について， $z_i = y_i$ を仮定することが可能である。

証明: (z, B) が最適契約であることから， つぎのような r' を定義しよう。

$$\sum_i p_i \max \{y_i - r', 0\} = \bar{u}.$$

すると， 以下のような契約 (z', B) を定義することが可能である。

$$B' = \{i : y_i < r'\}$$

$$z'_i = \min \{y_i, r'\}.$$

あきらかに $r' \leq r$ なので， $B' \subset B$ である。

一方， (IR) 条件は明らかに成立するので，

$$\sum_i p_i x_i \geq \sum_i p_i x'_i$$

したがって，

$$\sum_i p_i z_i - \sum_{i \in B} p_i c_i - (k - w) \leq \sum_i p_i z'_i - \sum_{i \in B'} p_i c_i - (k - w)$$

以上で， 単純な負債契約が本人＝代理人問題の最適解であることを示すことができた。

- もし (z, B) が最適契約であるなら, 以下のような条件を満たす r が存在する: $z_i = \min\{y_i, r\}$ and $B = \{i : y_i < r\}$.
したがって最適契約は返済額 r の選択によって記述される.
- また本人=代理人問題は, 以下のように記述することが可能である:

$$\max . \sum_i p_i \min\{y_i, r\} - \sum_{i \in B} p_i c_i - (k - w) \quad (2)$$

subject to

$$(IR) \quad \sum_i p_i \max\{y_i - r, 0\} \geq \bar{u}.$$

- この問題の最適解は, (IR) 条件の式で等号が成立する場合に相当する.

Reference:

Gale, D. and M. Hellwig "Incentive-Compatible Debt Contracts: The One-Period Problem," *Review of Economic Studies* 52 (1985) 647-663.