上級マクロ経済学
Summer 2017　講義ノート (RBC)

by Naohito Abe
x8347
nabe@ier.hit-u.ac.jp
2017_June

1　はじめに

本講義ノートの最初のバージョンを書いたのは 10 年以上前である。当時、日本の主要大学で数量的なマクロ分析をコースワークの一部としている所は存在せず、大学院のマクロ経済学では AD-AS や内生成長モデル、世代重複モデル等を位相図を用いた、定性的な分析の紹介が中心であった。2000 年代の半ばになると状況は一変し、現在では Matlab や Dyner、さらには R や Python を用いる定量的分析が大学院レベルのマクロ経済学に欠かせぬ一部となっている。

マクロ経済学に、本格的な数量分析、それも、VAR 等の時系列分析ではなく、最適化と資源制約を明示的に取り込んだ動学構造モデルの数値解析に本格的に取り込んだのは、1982 年の Kydland and Prescott と Long and Plosser による実物景気循環理論研究である。彼らのモデルが発表された当時、いわゆる、RBC(Real Business Cycle) は強烈な批判を浴び、大論争の中心となった。今でも、ケインズ的モデルにシンパシーを感じる有名マクロ経済学者で、RBC への嫌悪感を隠さない人も少なくない。しかしながら、様々な批判を浴びながらも、RBC は Solow モデル、Diamond モデルと並ぶ、主要ベンチマークモデルとして、今日のマクロ経済学において、必要不可欠なものとなっている。景気循環モデルとしてどこまで正しいかどうかはさておき、RBC モデルが、ミクロ的基礎付けと資本蓄積を含む最も単純な確率的動学モデルであるためである。したがって、近年の動学モデルの展開を知るためには、たとえ RBC に対して批判的な立場に立つものであっても、基本的な RBC モデルの特徴を理解し、実際にカリブレートできることは必要なスキルとなっている。近年流行の DSGE(Dynamic Stochastic General Equilibrium) モデルの解法も、基本的には本講義ノートで触れられる RBC モデルの解法と同じである。

本講義ノートは、動学マクロモデルの解法の中でも、もっとも単純な KPR(King, Plosser, and Rebelo) と呼ばれる解法を説明することを主眼としているが、そこでは、オイラー方程式や資源制約式を一つ一つ、手で対数線形近似をとる必要がある。これは、近年主流になりつつある、数値微分を多用するアプローチに比べ面倒であり、かつ、途中で計算ミスをしやすいという欠点を有する。にもかかわらず、筆者は、マクロ経済学モデルを構築するものは、すくなくとも一度はこの作業を行うべきであると考えている。それは、マクロモデルを「解く」プロセスをブラックボックス化するのではなく、数式やアルゴリズムの各ステップが何を意味し、どのような作業がなされているのかを追いかけることが極めて重要であるからである。線形近似された資源制約やオイラー方程式の直感的な意味を追い

かけること、そして、Forward に解く、ということがどのような情報と構造に依存するのか、結果を大きく左右するメカニズムは何か、それらを把握するには、マクロモデルの細部の構造まで理解する必要があるためである。

2 参考文献

RBC の入門書としては

George McCandless [2008] *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models* Harvard University Press.

がある。その他にも、毎年のように、実践的な教科書が出版されている。

RBC に関する初期の入門および様々な応用に関しては、多少古くなったが

Thomas F. Cooley ed. [1995] *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press.

は、最初の章が導入用のテキストとして非常によく書かれている。また、不完全競争や国際経済、金融への応用も詳しく述べられており、この分野で論文を書こうとするものであれば、持っている価値は今でも十分にある。

King, Robert, Plosser, Charles and Rebelo, Sergio, [1988a], Production, growth and business cycles: I. The basic neoclassical model, *Journal of Monetary Economics*, 21, issue 2-3, p. 195-232.

King, Robert, Plosser, Charles and Rebelo, Sergio, [1988b], Production, growth and business cycles: II. New directions, *Journal of Monetary Economics*, 21, issue 2-3, p. 309-341.

この二本の JME 論文は、その後の多くのマクロ経済学者に大きな影響を与えた論文であり、現在でも、ここで提唱されたアルゴリズムは KPR と呼ばれ、頻繁に利用されている。その後、今から 10 年ほど前までの RBC の貢献と当時の Frontier に関する Rebelo によるサーベイが下記である。

Sergio Rebelo [2005] "Real Business Cycle Models: Past, Present and Future," *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 107(2), pages 217-238

また、清滝氏による短いサーベイも、リーマンショックを踏まえたうえで、近年の景気循環モデルについてよくまとめている。

Kiyotaki, Nobuhiro, [2011] "A Perspective on Modern Business Cycle Theory" (September 1, 2011). *FRB Richmond Economic Quarterly*, vol. 97, no. 3, Third Quarter , pp. 195-208.

実証的観点を完全に無視し、ミクロ経済学な理論構造を厳密に説明しているのは、やはり

Ljungqvist and Sargent [2012] の第八章であり、完備資本市場における一財の動学一般均衡モデルを丁寧に解説している。逆に、実証分析を強調したものに関しては

Carlo A. Favero [2001] *Applied Macroeconometrics*, Oxford University Press.

が計量の基礎から VAR, Cowles Commission Approach, GMM および Caribration にわたる広範囲な方法論に関して簡潔にまとめている。

マクロ経済学の分野で将来、本格的に研究をしていくのであれば、高価であるが

John B. Taylor and Michael Woodford Ed. [1999] *Handbook of Macroeconomics 1A, 1B, and 1C*, North-Holland.
を手元に揃えておくと良い。多少古くなってはいるが、景気循環、成長、失業、投資、消費、数値解析、ミクロ計量的視点からのマクロ経済学や政策分析等、多くの分野に関する一流の研究者達によるサーベイおよび文献リストは、研究のスタートとして、投資額に見合う価値がある。

より本格的に数値解析を駆使した動学一般均衡を分析する際には

Heer, Burkhard and Alfred Maussner [2009] *Dynamic General Equilibrium Modeling*, Springer
は、線形近似から Projection Methods, Discretization や多項式近似等の非線形解法のら解説、さらには異質な主体が存在する不完備市場におけるマクロショックと分布の変化を追いかけるような複雑な動学均衡モデルを詳細に説明している。多くのプログラム例も提供しているが、ソフトは GAUSS および FORTRAN であり、Matlab ではない。

近年、Gali や Smets、および各国の中央銀行の研究者を中心に、RBC モデルに様々な friction を導入し、マクロ諸変数の挙動を一気に説明しようとする、いわゆる New Keynesian Dynamic Stochastic General Equilibirum Model (NKDSGE) と言われる研究分野が現れている。

Gali, J., 2008. *Monetary policy, intution and the businesscycle: An introduction to the New Keynesian framework*, Princeton University Press.
がその教科書である。NKDSGE は、推計手法やモデリングの際の考え方が、初期の RBC、および Ljungqvist and Sargent [2012] 等の、いわゆる新古典派的 (不完備資本市場を重視する立場) 動学マクロモデルと大きく異なる。NKDSGE の論文として影響力のあったものとして、Gali の他に下記を特に挙げておく。

Fernández-Villaverde, J., 2010, The econometrics of DSGEmodels, *SERIEs*.

Smets, F.R., and Wouters, R., 2003, "An estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium model for the Euro area," *Journal of the European Economic Association*.

最後に、リーマンショック (Great Financial Crisis) という巨大ショックを予測できなかったとして、当時、マクロ経済学は強い批判を浴びた。
Friedman, B.M. and M. Woodford ed. (2011) *Handbook of Monetary Economics Volume 3A,B.* North Holland
は、リーマンショック後の、金融・貨幣的側面を重視する第一人者による最先端のサーベイ集であり、この分野で論文を書きたい者は一読することを強く進める。

リーマンショックとマクロ理論との関係については沢山の研究があり、様々なスタンスがある。下記、興味深いものをいくつか挙げるが、特に McGrattan and Prescott はこの分野の第一人者による研究であり、強い影響力を持っている。

Mark Mink & Jan P.A.M. Jacobs & Jakob de Haan, [2012]. "Measuring coherence of output gaps with an application to the euro area," *Oxford Economic Papers*, Oxford University Press, vol. 64(2), pages 217-236, April.

Jeske, Karsten & Krueger, Dirk & Mitman, Kurt, [2013]. "Housing, mortgage bailout guarantees and the macro economy," *Journal of Monetary Economics*, Elsevier, vol. 60(8), pages 917-935.

Ellen R. McGrattan & Edward C. Prescott, [2014] "A Reassessment of Real Business Cycle Theory," *American Economic Review*, American Economic Association, vol. 104(5), pages 177-182, May.

3　RBC モデルと経済成長

RBC または DSG モデルが 1970 年代までの景気循環理論と異なる点は、議論の出発点を、ケインジアンの理論ではなく、最適成長モデルとし、経済成長と景気循環のメカニズムを同一のフレームワークで説明しようとしたことである。それまでの景気循環理論、特に Keynesian 達によるものでは、出発点は Phillips 曲線であったことと対照的である。彼らは、景気循環の原動力と、経済成長の原動力の間に密接な関係がある、と仮定したわけである。その理由の一つは、以下のようなものであったと思われる。Solow による経済成長の要因分解 (Growth Accounting) によると、経済成長の 1/3 は資本ストックの増大に、2/3 は技術革新によるものである。すなわち、技術革新が成長に大いに貢献しているのである。しかし、技術革新そのものを観察することはできず、推定の際の残差 (Solow Residuals) としてしか観察できない。生産性を向上させるような技術革新として、CPU の高速化、流れ作業の導入などの革新は確かに存在する。一方、オイルショックのような外生要因を考えることもできる。石油価格の上昇は生産コストの上昇、すなわち生産性の低下と同じ効果をもたらす。負の残差が発生する可能性もあるということである[1]。2007 年から 2008 年にかけて、石油価格は歴史的にないくらい高い水準にあった。この経済効果を、標準的な経済成長モデルで分析してみよう。日本経済を念頭に置き、石油価格を外生と考えることにする。石油価格の上昇は、石油を生産に用いる財の生産を減少させることになる。次に、資本の生産性が低下することから資本収益率を低下させ、投資を減少させる。投資の減少は将来の資本ストックの減少をもたらし、将来の生産水準の低下を引き起こす。すなわち、石油価格の上昇が生産に与える影響は、当期にとどまらず、将来にもわたるのである。逆に、2014 年以降の石油価格の急落は、逆に将来の生産力を拡大させることが予想される。Solow Residuals の変化は、生産水準の (比較的) 長期的な変化を引き起こすのである。RBC、または DSGE モデルの初期の研究者達は、この成長モデルのもつ特性が、景気循環の説明のベースになりうると考えたのである。

それでは、景気循環を成長モデルで説明する場合、景気循環のどのような側面の説明を目標にすべきなのであろうか?初期の RBC の研究者がまず行ったことは、主要なマクロ変数の時系列を並べることであった。具体的には、GDP, 非耐久消費財、投資、政府支出、雇用、賃金などである。無論、これら全ての変数は、長期トレンドをもっている。成長モデルに従えば、この長期トレンドの源泉は生産性の向上である。しかし、景気循環の源泉も Solow Residuals の変動に求めるのであれば、この長期トレンドは単なる直線ではなくなる。長期トレンドは、ふらふらと動き景気循環を引き起こす Solow Residuals の変化が、長期的には上昇傾向にあることから生じることになる。

GDP 等のマクロ時系列の長期トレンドと景気循環を識別することは難しい。計量経済学的には、データを定常にする作業ということになり、階差を次々と取っていくことができるし、線形トレンドに回帰し、その残差として捕らえることもできる。前者は、指標に測定誤差がある場合は、その影響を拡大させてしまうし、また階差をとることで定常化しすぎる可能性がある。また、後者ではトレンドが線形である必然性がなく、例えば、高度成長期と現在の日本の長期トレンドが同じであると考えることには大分無理があるであろう。

[1] 無論、資本や労働の測定誤差、または基礎となっている生産関数そのものが間違っている場合にも Solow Residuals は発生する。

一つの慣例として用いられる手法として、Hodric-Prescott のフィルター (the H-P filter) と呼ばれるフィルターを用いて長期トレンドを除去することである。具体的には、各系列、例えば y_t を以下の式を最小化させるような二つの components(y_t^c, y_t^g) に分離するのである。なお、y_t^c は Cyclical Component であり、y_t^g がトレンド Component である。

$$Min \sum_{t=1}^{T} (y_t^c)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left[\left(y_{t+1}^g - y_t^g \right) - \left(y_t^g - y_{t-1}^g \right) \right]^2, \tag{1}$$

$$y_t = y_t^c + y_t^g. \tag{2}$$

λ は、四半期では 1600 に設定する[2]。第一項は変動項、第二項は成長項を示す。$\lambda = 0$ のとき、解は変動項のみとなり、このフィルターの解は実際の系列と一致する。逆に λ が非常に大きい場合は、成長率が一定の単なるトレンドとなる。λ を調整することで、除去する変動の周波数を調整することができる。$\lambda = 1600$ のとき、このフィルターは 8 年以上の低周波を除去することが知られている[3]。このフィルターを用いることにより、Solow Residuals の長期的な傾向と、短期的な傾向を分離することになるのである[4]。表 1 は Cooley ed.[1995] からとってきたものであり、アメリカ合衆国のマクロ諸変数を、上記の H-P filter をかけ、さらに各変数の Cross Correlation を調べたものである。

やはり、Cooley ed.[1995] に従い、この表から読み取れることを整理すると、以下のようになる。

(1)　総生産の変動と労働時間の変動の大きさはほぼ等しい。表では前者は 1.72、後者は 1.59 or 1.69 である。

(2)　雇用者の一週間の平均労働時間の変動は小さい。これは、調整されるのは時間ではなく雇用であることを示唆している。

(3)　非耐久消費財は smooth であり、変動は小さい。

(4)　投資、耐久消費財は総生産よりも変動が大きい。

(5)　労働の平均生産性の変動は小さく、わずかに Pro Cyclical である。

(6)　賃金は平均生産性よりも変動が小さい。

(7)　政府支出は総生産との相関はほとんどない。

---

[2] Annual の場合は 100、Monthly の場合は 14400 に設定するのが慣習となっている。もっとも近年ではこのような恣意的な設定に対してはかなり厳しい批判が浴びせられている。後で多少説明する。

[3] Burnside[1999] には、H-P filter に関する詳しい説明が書かれているが、周波数領域に関する基本的な知識を前提としている。周波数領域に関して興味のあるものは、山本拓氏の『経済の時系列分析』の最後の章が参考になる。

[4] このフィルターは、現在では多くの統計パッケージで利用可能である。Eviews や TSP 等の時系列分析に強みのあるパッケージは無論、Stata 用にも下記の web から入手することもできる (http://ideas.repec.org/c/boc/bocode/s447001.html)。

である。これらの現象 (Stylized Facts) を再現するようなモデルを作ることが、初期の RBC の目標であった。

なお、近年では H-Pfilter そのもの、および λ の値に関して批判的な研究が増加しており、昔のように H-Pfilter のみが主流の Detrending Method とは言えなくなっている。、

Baxter and King [1999] "Measuring Busibess Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Econmic Time Series," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 81, Issue 4 .

は Band-Pass Filter を提唱しており、プログラムも簡単に入手可能である。Band-Pass Filter を理解するためにはフーリエ解析の知識が必要なため、本講義ノートでは説明しないが、この手法は、特定の周波数のサイクルのみを抽出するものであり、非常に強力である。Figure 1 は、単純な Band Pass Filter と HP Filter を用いて日本の国内総生産 (季調済み対数実質値) をデトレンドしたものである。図から明らかなように、両者の差は少ないが、細かなところに相違があり、共分散などを計算すると無視できない差が生じてくる。詳しくは

Favio Canova.[1998], "Detrending and Business Cycle Facts," *Journal of Monetary Economics* 41, 475—512.

Timothy Cogley and Japnes M. Nason [1995] "Effects of the Hodrick-Prescott Filter on Trend and Difference Stationary Time Series," *Journal of Economic Dynamics and Control* vol 19.

および

Lawrence J. Christiano & Terry J. Fitzgerald [2003]. "The Band Pass Filter," *International Economic Review*, vol. 44(2), pages 435-465, 05.

を参照すること。[5]

4 モデル

国民所得計算は 1 年間に 4 回発表される、4 半期データである。それに対応するように、時間の単位を 4 半期ごとに 1 単位進むと仮定し、モデルを構築しよう。もっとも単純な生産経済における成長モデルは、

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t\right), \tag{3}$$

$$\text{s.t. } k_{t+1} = f\left(k_t\right) + \left(1-\delta\right) k_t - c_t \text{ for all t}, \quad k_o > 0\text{: } given. \tag{4}$$

成長モデルでは雇用は一定とされているが、景気循環において雇用変動は非常に重要な問題であるため、雇用の変動をモデルに組み込む必要がある。雇用変動を組み込む手法には様々なものがあるが、一番単純なケースは、家計が労働と余暇消費の選択をおこない、賃金が余暇と消費の限界代替率に等しいところまで労働を供給し、企業は労働の限界生産性が賃金に等しい水準まで需要すると仮定することである。そこで、各期の効用関数に労働供給を導入し、以下のように仮定する。

[5]なお、日本経済を対象に、
井堀、中里、川出 [2002] 『90 年代の財政運営：評価と課題』 「フィナンシャル・レビュー」July は様々なフィルターの比較を行っている。

$$u\left(c_t, 1-l_t\right) \tag{5}$$

l_t　は家計による労働供給であり、$1-l_t$ は余暇消費にあたる。単位期間当たり、余暇か労働にあてることのできる時間を 1 に基準化している。一日が単位であれば 24 時間であるし、1 年であれば 24×365 と解釈可能である。

同様に、生産サイドにも労働を明示する必要がある。それと同時に、このモデルの最大の特色の一つである、生産性ショックも生産サイドに導入する必要がある[6]。具体的には、以下のような生産関数を仮定する。

$$y_t = e^{z_t} F\left(k_t, l_t\right), \tag{6}$$

z_t は生産性に対するショックであり、一階の自己回帰 (AR1) に従うとする。すなわち、

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1} \tag{7}$$

ここで、ε は平均値ゼロの同一の正規分布に従い、各期間で独立であるとする (i.i.d., i.i.n.)。また、$0 < \eta < 1$ を仮定する。この仮定のもとでは、z_t は長期的には 0 に収束し、発散しなくなる。なお、η が正の値をとる、ということは生産性ショックには正の系列相関があることを意味する。ε が i.i.d. である、ということは、生産性ショックは経済諸変数に影響を与えることはあっても、それらから逆に影響をうけることはなく、外生であることを意味する。経済理論では説明できない、ショック要因として扱うということである。技術ショックの導入の仕方には様々なものを考えることができるが、上記の定式化は最も単純なものである。なお、AR1 の生産性ショックを導入することにより、この経済の消費者は不確実性に直面することになる。現在、2013 年の時点では、2014 年の技術に何が起きるかわからないということである。このような不確実性に直面する場合、標準的な経済学では、消費者は効用の期待値、すなわち期待効用を最大化すると定式化する。ここでもそれに従うことにする[7]。ただし、注意せねばならないことは、標準的なミクロ経済学に従い人々が合理的であると仮定する場合、現在利用可能な情報を元に、将来を予想する、条件付期待値を最大化することになることである。t 期における条件付期待値を E_t と表記すると、消費者の最大化する効用は以下のように定義される。

$$E_0\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t, 1-l_t\right)\right]. \tag{8}$$

[6]ハロッド中立ではなく、ヒックス中立としている理由は、この理論が成長よりも循環に注目していることと、後にコブダグラス型効用関数を考えるため、両者は同一になること、さらには、z としてソロー残差を考える際、この定式化のほうがデータと整合的であるためである。

[7]近年、期待効用最大化という形式では、消費者の行動をうまく描写できないと主張する経済学者が増加している。Behavioral Economics と呼ばれる分野であり、現在精力的に分析がなされている。Robert Shiller や Alan Blinder などの著名なマクロ・金融の専門家も近年様々な研究を行っている。Yellen による Behavior Macro に関する講演内容を http://www.frbsf.org/our-district/press/presidents-speeches/yellen-speeches/2007/september/implications-of-behavioral-economics-for-monetary-policy/
で読むことかできる。

たとえ不確実性が導入されていても、市場が完全完備であると仮定する限り、この経済の均衡はパレート効率的となる。前回の講義ノートより、選好が同一である限り、たとえ家計所得の実現値が家計により異なっていても、完備資本市場の下では各家計の消費は完全に連動し、マクロの消費水準に比例して動く。したがって、上記のような代表的個人の最適化として経済を描写することが可能である。換言すれば、RBC は完備資本市場における景気循環モデルなのである。

生産関数が標準的な新古典派の性質を満たす限り、厚生経済学の第二基本定理が適用可能であり、資源制約を用いて消費者の厚生を最大化する解は、一般均衡としてある価格体系で再現 (support) される。したがって、我々のモデルは、以下のように定式化することができる。

[基本モデル]

$$\text{Max } E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t, 1 - l_t\right) \right], \tag{9}$$

$$\text{s.t. } k_{t+1} = e^{z_t} F\left(k_t, l_t\right) + \left(1 - \delta\right) k_t - c_t, \text{for all t}, \quad k_o > 0\text{: } given, \tag{10}$$

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1}. \tag{11}$$

このモデルを解く、ということを考えてみる。経済成長モデルでは、市場均衡を満たす消費と資本の水準は、鞍点に収束する一本の曲線で描かれていた。すなわち、ある時点での資本水準が与えられた場合、それに対応する消費水準は、Saddle Path 上の一点で示される。数式で書くと

$$c_t = h\left(k_t\right), \tag{12}$$

という関数で Saddle Path が定義された。この関係は、Policy Function と呼ばれる。資本ストックは jump できない変数であり、State Variable、または Predetermined Variable と呼ばれる。t 期において変更することが出来ないという意味である。それに対し、消費は t 期で自由に設定することができる。そのような変数のことを Control Variable、または Non-Predetermined Variable と呼ばれる。Predetermined Variable に依存して Control Variable の水準を決定する式を Policy Function と定義するのである。

我々の単純な RBC モデルでは、State Variable は資本 k_t と技術水準 z_t である[8]。なぜなら、t 期において、この経済の代表的個人は両変数を動かすことが出来ないためである。一方、Control Variable は消費 c_t と労働供給 l_t である。経済成長モデルとのアナロジーに従えば、我々のモデルの解は、以下のような形になることが予想される。

$$c_t = h_1\left(k_t, z_t\right) \tag{13}$$

[8]研究者の中には内生変数のみを State Variables と呼び、ショック項は外生変数として区別する者もいる。

$$l_t = h_2(k_t, z_t) \tag{14}$$

ここで問題になるのは、そのような解が存在するか否か、存在するならば、どのようにすればそれを導くことができるか、である。前者の問題は数学的には必ずしも自明ではないが、ここでのモデルに関しては、最適化の解が存在することが知られている。より一般的なモデルで解の存在を保証させることは難しいが、ここではその問題には深く立ち入らず[9]、解が存在すると仮定し、上記のような 2 つの Policy Function を導く手法を考察する。最もナイーブな方法は、財政学や国際経済学などの応用ミクロ経済分析で行われるように、一般均衡を定義する最適化の一階条件と市場均衡条件を全て並べ[10]、連立方程式体系にし、その根を求めることである。あるいは、より洗練された手法で、Scarf Algorithm 等を用いることも考えることは可能である。しかし、ここでのモデルにおいて上記の手法を適用することは非常に困難である。それは、この経済は無限期間であり、均衡を定義する連立方程式は無限次元になってしまうためである。したがって、我々は別の手法を探さねばならない。

近年のマクロ経済学の進展は、如何にして上記の問題や、さらに複雑な動学最適化問題を実際に解いていくか、その解法の進展と密接な関係がある。Closed Form で Policy Function を求めることができない以上、なんらかの近似を用いて解くことになる。解法には大きく分けて (1) 離散近似、またはスプライン補間によるノンパラメトリック法と (2) 線形、または多項式によるパラメトリック法に分けることが出来る。ここでは、数ある手法のうち、もっとも単純で、なおかつ、諸変数がスムースに動く経済モデルでは広く適用可能な線形近似法を用いる。離散近似手法に関しては、動的計画法の広義の際に多少触れる予定である。多項式近似手法に関しては、来年度の開講予定の応用マクロ経済学でカバーする予定であるが、興味あるものは、Miranda and Fackler [2002] *Applied Computational Economics and Finance*, MIT Press. が独学に向いている。

5 線形近似手法 (Linear-Quadratic Methods)

この手法はもともと Blanchard and Kahn[1980] により開発されたものであり、King, Plosser, and Rebelo [1988a, b] がさらに利用しやすい形に拡張して紹介したため、Blachard-Kahn 法あるいは KPR 法とも呼ばれる。基本的なアイディアは、Policy Functions が Predetermined Variables に関して線形である、と仮定し、線形関数の中で、「もっともらしいもの」を選ぶというもののである。具体的には、定常状態において経済システムを線形近似することで Saddle Path が線形になることを保証し、その上で、Saddle Path を導く。この手法は、最適成長モデルで Saddle Path を線形近似してもとめる手法とほぼ同じであるが、この経済には不確実性が存在しており、将来の不確実性を考慮して代表的個人が行動を決定するところが異なっている。

[9]解の存在証明に関して、詳しく知りたいものは Stokey and Lucas [1989], *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press を参照せよ。ただし、関数解析に関する知識が必要となる。マクロ動学モデルは、1960 年代に極めて高度な数学展開がなされ、力学系の専門家が参入するなど、応用数学としての性格が強くなった時期があった。工学的な性格が強い現在とは全く違う雰囲気がある。

[10]無論、ワルラス法則があるため、一本は必要なくなる。

まず、上記の基本モデルを Random Lagrange Methods を用いて一階条件を求める。ラグランジュアンを次のように作る。

$$L = E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t, 1-l_t\right) + \beta^t \lambda_t \left(e^{z_t} F\left(k_t, l_t\right) + \left(1-\delta\right) k_t - c_t - k_{t+1}\right) \right]. \tag{15}$$

これを t 期における情報を用いて、c_t、l_t、k_{t+1} について微分する。

$$E_t \left[\frac{-\partial}{\partial c_t} u\left(c_t, 1-l_t\right) - \lambda_t \right] = 0, \tag{16}$$

$$E_t \left[\frac{\partial}{\partial l_t} u\left(c_t, 1-l_t\right) + \lambda_t e^{z_t} \frac{\partial}{\partial l_t} F\left(k_t, l_t\right) \right] = 0, \tag{17}$$

$$E_t \left[-\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} \left(e^{z_{t+1}} \frac{\partial}{\partial k_{t+1}} F\left(k_{t+1}, l_{t+1}\right) + \left(1-\delta\right) \right) \right] = 0. \tag{18}$$

ところで、最初の 2 つの式では、条件付期待値オペレーターの中には t 期で決定される変数しか存在しない。したがって、それらは t 期において不確実性は存在せず、条件付期待値を外すことができる。しかし、(18) の中には、t 期においては確定していない変数が入っており、条件付期待値を外すことはできない。ただ、λ_t は t 期において確定しており、それとコンスタントの β のみ期待値オペレーターから外すことが出来る。したがって、以下のように書き直すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial c_t} u\left(c_t, 1-l_t\right) = \lambda_t, \tag{19}$$

$$-\frac{\partial}{\partial l_t} u\left(c_t, 1-l_t\right) = \lambda_t e^{z_t} \frac{\partial}{\partial l_t} F\left(k_t, l_t\right), \tag{20}$$

$$\lambda_t = \beta E_t \left[\lambda_{t+1} \left(e^{z_{t+1}} \frac{\partial}{\partial k_{t+1}} F\left(k_{t+1}, l_{t+1}\right) - \delta \right) \right]. \tag{21}$$

λ_{t+1} は、t 期においては確率変数であり、それゆえに Random Multiplier と呼ばれる。最初の 2 つの式は、以下のように限界代替率で表すことが出来る。

$$\frac{-\frac{\partial}{\partial l_t} u\left(c_t, 1-l_t\right)}{\frac{\partial}{\partial c_t} u\left(c_t, 1-l_t\right)} = e^{z_t} \frac{\partial}{\partial l_t} F\left(k_t, l_t\right). \tag{22}$$

この経済では、生産物は 1 種類であり、その価格が 1 になっている。上式の左辺は消費と余暇の限界代替率であり、右辺は労働の限界生産性、市場均衡においては賃金に等しい。

動学最適化問題の解を特定するには、さらに、境界条件が必要である。最適成長とのアナロジーを用いれば、以下のような横断面の条件を課すことになる。

$$\lim_{t \to \infty} E_0 \left[\beta^t \lambda_t k_t \right] = 0. \tag{23}$$

横断面の条件は、最適化の過程で生じるものであり、本来外生的に与えるものではない。無限期間で、かつ不確実性がある場合、どのような横断面の条件を

課すか、一般的な公式は今のところ、便利な形では存在しないが、上記の横断面の条件と他の最適化条件を満たす path が存在すれば、それは最適化問題の解になっていることを証明することは可能である。すなわち、上記の条件は十分条件として機能するのである[11]。実際の作業では、さらに厳しい

$$\lim_{t\to\infty} E_0\left[\beta^t k_t\right] = 0, \tag{24}$$

の条件を課すことが多い。この条件を満たし、かつ他の最適化条件を同時に満たすものがあれば、それは実際の最適化問題の解となっていると考えるのである。

6 カリブレーション

ここまでのところ、効用関数と生産関数には特殊な仮定をおかずに議論を進めてきたが、以降の数式の変形を行う際には、関数形を特定化するほうが便利である。そこで、この節では、カリブレーションと呼ばれる手法により、関数形やパラメターの値を特定化する。カリブレーションが、実際にはどのようなプロセスのことを指すのかは、必ずしも統一された見解があるわけではないが、ここでは、基本的には Cooley ed.[1995] に従って解説する[12]。モデルを特定化する、ということは、モデルに制約を課すことに等しい。カリブレーションとは、もともと目盛りをつける、または正しい価値を決定する、という意味である。動学一般均衡分析においては、以下の作業のことを指す。

(1) 探すパラメターの取りうる値を制限する。これには、経済理論とデータをつき合わせる必要がある。例えば、投資と資本の比率が長期的に 0.1 であれば、減価償却率 δ を 0.1 に設定するのである。しかし、どのようにパラメターの値を設定する手続きには様々なものがあり、ときには他の実証研究の結果を適用することもある。なお、近年では、モデルを直接推計することでパラメターを得ることもある。これは構造モデルの推計という一大分野となりつつあり、GMM や ML を用いて一階条件式を推定する手法や、境界条件も用い、Simulation 法により推定する手法など、近年大きく進歩している。

(2) 後にモデルを評価する際に用いるデータを設定する。(1) においてもデータを用いているので、パラメターを設定するために用いたデータの統計量とモデルから生成される統計量の一部は恒等的に一致してしまう。たとえば、投資と資本の比率から δ の値を求めた場合、モデルの評価に、δ が投資・資本比率に等しいかどうかを用いても意味がないのである。したがって、そのような恒等関係にない指標を設定する必要がある。また、モデルの目標に沿った評価基準を設定する必要がある。例えば、失業が存在しないモデルにおいて、失業率の値を評価の

[11] 詳しくは、Stokey, Lucas, and Presoctt [1989], *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvad University Press. を参照せよ。

[12] 初期の RBC の文献においてカリブレーションという言葉は計量経済学的手法を採用せずに独自の手法を用いる、というニュアンスを多分に含んでいる。しかし、計量的手法はかならずしも t-検定や F-検定に限定される必要は無く、統計的手法を用いてモデルの評価を行うことと考えれば、特にカリブレーションと計量分析を区別する必要は無いと思える。

指標に用いても意味のある結果を得ることはできない。初期の RBC では、消費・投資と総生産の間の共分散が用いられた。

(3)　(1) で求められたパラメターの値をモデルに入れて解き、(2) で与えられた指標をモデルの予測値と比較する。

では、Cooley ed.[1995] に従い、先のモデルに関数構造とパラメターを組み込んでみる[13]。

まず、所得、資本、労働の分配を見ると、各々の分配率は大きく変化してはいない。これは、労働分配率が年によらず一定の生産関数を用いて構わないことを示唆する。分配率が生産水準に寄らず一定の生産関数とは、コブ・ダグラス型である。すなわち

$$Y_t = e^{z_t} A K_t^{\theta} L_t^{1-\theta}. \tag{25}$$

次に、余暇消費時間はほとんど一定であり、実質賃金は一定の率で上昇している。一人当たり消費と実質賃金がほぼ一定の率で成長していることも考慮すると、これは消費と余暇の代替の弾力性が 1 であることを示唆する。すなわち、瞬時的効用関数もコブ・ダグラス型である。

$$u\left(c_t, 1-l_t\right) = \frac{\left(c_t^{1-\alpha}\left(1-l_t\right)^{\alpha}\right)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \tag{26}$$

ここで、$1/\sigma$ は異時点間の弾力性であり、この推定は非常に困難であることが知られている。なぜなら、σ の水準は均斉成長経路自体には影響を与えず、そこへの移行過程にのみ影響をあたえるためである。ここでは、単純なケースとして、$\sigma = 1$、すなわち対数効用のケースのみを考えることにする[14]。

$$u\left(c_t, 1-l_t\right) = (1-\alpha)\ln c_t + \alpha \ln\left(1-l_t\right). \tag{27}$$

ここまでの作業で関数形は特定できたことになり、残るはパラメターの設定である。長期成長率を外生 γ と考え、上記の [基本モデル] を書き直すと、

$$\text{Max } E_o\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left((1-\alpha)\ln c_t + \alpha \ln\left(1-l_t\right)\right)\right], \tag{28}$$

$$\text{s.t. } \left(1+\gamma\right) k_{t+1} = e^{z_t} A k_t^{\theta} l_t^{1-\theta} + \left(1-\delta\right) k_t - c_t, \text{for all t}, \quad k_o > 0\text{: } given, \tag{29}$$

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1}. \tag{30}$$

[13]なお、1990 年代初頭のアメリカ経済を念頭に置いているので、日本経済を念頭に置く場合は、また異なるカリブレーションが必要になると思われるので注意されたい。

[14]無論、この仮定にはなんの根拠も無いが、実際、σ の様々な手法による推定値には幅が大きく、どの値を採用しても問題が残る。様々な σ の値に関して simulation を行うことが望ましいと思われる。なお、この σ の推計は、ミクロ・マクロの様々なデータを駆使し、オイラー方程式や Policy Function 等、多くの情報に基づき多くの研究がなされている。

ただし、成長理論の時、K や C を A で割ったように、資本と消費を経済成長因子 $(1+\gamma)^t$ で割っていることに注意せよ。

まず、生産関数の資本弾力性 θ の値を考える。これは、良く知られているように、分配面からみた場合の、国民所得における資本分配率に等しくなる。Cooley ed. [1995] は、この値を 0.40 と試算している。

次に、均斉成長経路のデータと、このモデルの生み出す均斉成長経路の予測値を比較し、他のパラメターの設定を行う。オイラー方程式は以下のようになる。

$$E_t\left[-\lambda_t+\beta\lambda_{t+1}\left(1+\gamma\right)^{-1}\left(e^{z_{t+1}}\frac{\theta A k_{t+1}^{\theta} l_{t+1}^{1-\theta}}{k_{t+1}}+\left(1-\delta\right)\right)\right]=0. \tag{31}$$

均斉成長経路では、$z_t=0$ for all t　であり、不確実性は存在せず、また各変数が一定になるため、上式は

$$\frac{\theta y}{k}+\left(1-\delta\right)=\frac{1+\gamma}{\beta}. \tag{32}$$

次に、余暇と消費の限界代替率が賃金に等しかったため、均斉成長経路では、以下の関係を導くことが出来る。

$$\left(1-\theta\right)\frac{y}{c}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{l}{1-l}. \tag{33}$$

最後に、資源制約より、均斉成長経路上では、

$$\left(1+\gamma\right)\frac{k}{y}=\left(1-\delta\right)\frac{k}{y}+\frac{i}{y}. \tag{34}$$

ただし、

$$i=\left(\delta+\gamma\right)k, \tag{35}$$

であり、投資を意味する。長期の投資・資本比率は、公表値に従うと 0.076 であるから、経済成長率 γ が年間 2.8% とすれば減価償却率 $\delta=0.048$ であり、四半期では 0.012 になる。θ,δ が特定化できれば、割引因子 β も求めることができ、$\beta=0.947$, 四半期では 0.987 になる。次に、家計の余暇・消費選択に関してであるが、Becker 等による家計行動の分析によると、家計は睡眠などのやむをえない時間を除いた、discretionary time の 1/3 を市場活動におこなう。ここでは、家計は 0.31 の時間を労働に当てるとする。すると、(33) より、y/c がおよそ 1.33 であることを利用すると、$\alpha/\left(1-\alpha\right)=1.78$ を得ることが出来る。

最後に、Solow Residuals, z_t であるが、これまでの特定化によって、GDP, K,L のデータから計算することができる。具体的には

$$z_t-z_{t-1}=\left(\ln Y_t-\ln Y_{t-1}\right)-\theta\left(\ln K_t-\ln K_{t-1}\right)-\left(1-\theta\right)\left(\ln l_t-\ln l_{t-1}\right), \tag{36}$$

である。これから、z_t の自己相関係数 η を計算すると、非常に高い相関がある。Cooley に従い、ここでは $\eta=0.95$ とする。また、ε_t の標準偏差も同様にして計算することが可能であり、$\sigma_\varepsilon=0.007$ とする。

以上の作業により、ここでのモデルの関数形とパラメターはすべて特定化したことになり、具体的に数値計算することが可能となった[15]。パラメターを整理すると、以下のようになる。

θ	δ	η	σ_ε	γ	β	σ	α
0.40	0.012	0.95	0.007	0.026	0.987	1	0.64

7 (対数) 線形近似による解法

オイラー方程式と資源制約を、前節で特定した関数形を用いて書き直すと、以下のようになる。

$$(1-\theta)\frac{e^{z_t}Ak_t^{\theta}l_t^{1-\theta}}{c_t} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{l_t}{1-l_t}, \tag{37}$$

$$\frac{(1-\alpha)}{c_t} = \lambda_t, \tag{38}$$

$$(1+\gamma)\,k_{t+1} = e^{z_t}Ak_t^{\theta}l_t^{1-\theta} + (1-\delta)\,k_t - c_t, \tag{39}$$

$$\lambda_t = \beta E_t\left[\lambda_{t+1}\,(1+\gamma)^{-1}\left(e^{z_{t+1}}\frac{\theta Ak_{t+1}^{\theta}l_{t+1}^{1-\theta}}{k_{t+1}} + (1-\delta)\right)\right], \tag{40}$$

$$z_{t+1} = \eta z_t + \varepsilon_{t+1}. \tag{41}$$

Policy Functions を線形の関数の中から探すには、いくつかの方法がある。一つは、Linear Quadratic 手法といい、目的関数を二次関数で、制約式を線形でそれぞれ均斉成長経路上で近似する手法である。もう一つの手法は、上記の一連の均衡条件を均斉成長経路上で線形近似する手法である。実は、両者は同値であることがわかっている。また、Random Multiplier を用いず、Dynamic Programing の形に問題を書き直し、目的関数を二次関数で、制約式を線形で近似し、Value Function、ないし Policy Functions を直接計算する手法もある。この、Dynamic Programing を用いる手法は広い応用可能性を持っており、今日では微分不可能な経済モデルにも応用されている。しかし、かなり技術的な説明が必要になる。ここでは、Blanchard and Kahn[1980] 以降、長い伝統を持つ、均衡条件式を線形近似する手法を採用する。この手法は、経済モデルが微分可能である限り適用可能であり、かつコンピューターに課す負担がスピード、メモリーいずれの点でも小さく、大きなモデル (方程式の数が数百を超えても) であっても、現在の PC ならば 1 分もかからずに計算を終えることが可能である。

まず、上記のシステムを確実性下の均斉成長経路上で $(c_t, k_t, l_t, \lambda_t, z_t, \varepsilon_t) = (c, k, l, \lambda, 0, 0)$ for all t で線形近似する。線形近似は、テイラー展開を行うわけで

[15] なお、生産関数の中の A が特定されていないが、我々の分析では A の水準は解に影響を与えない。これは、コブ・ダグラスなどの特殊な仮定によるものであり、より一般的な生産関数の場合には A の水準を決めねばならない。

あるが、上記のようなコブ・ダグラス型のモデルでは、対数変換をしてから線形近似するほうが後の問題が容易になることが多い。そこで、まず対数線形近似について簡単に説明する。

一般に、以下を満たす連続微分可能な関数があるとする。

$$g(y) = f(x), x \in R. \tag{42}$$

この式を $(x, y) = (\overline{x}, \overline{y})$ で線形近似すると、単純なテイラー展開により

$$g(\overline{y}) + \frac{dg}{dy}(\overline{y})(y - \overline{y}) = f(\overline{x}) + \frac{df}{dx}(\overline{x})(x - \overline{x}). \tag{43}$$

対数線形近似を行う場合は、以下の恒等式を利用する。

$$x = e^{\ln x} \tag{44}$$

そして、新たに変数を定義し

$$h = \ln x, \tag{45}$$

$$j = \ln y, \tag{46}$$

$y = f(x)$ を書き直すと

$$g\left(e^{j}\right) = f\left(e^{h}\right). \tag{47}$$

これを j, h に関してテイラー展開を行う。すると

$$g\left(e^{\overline{j}}\right) + e^{\overline{j}}\frac{dg}{dy}\left(j - \overline{j}\right) = f\left(e^{\overline{h}}\right) + \frac{df}{dx}\left(e^{\overline{h}}\right)e^{\overline{h}}\left(h - \overline{h}\right). \tag{48}$$

j, h を y, x に戻すと

$$g(\overline{y}) + \overline{y}\frac{dg}{dy}(\overline{y})(\ln y - \ln \overline{y}) = f(\overline{x}) + \overline{x}\frac{df}{dx}(\overline{x})(\ln x - \ln \overline{x}). \tag{49}$$

これを元の (43) と比較すると、両辺の微分係数に、$\overline{y}$ ないし、$\overline{x}$ が乗じられていることのみが異なる。

$$\Delta y = \ln y - \ln \overline{y}, \quad dx = \ln x - \ln \overline{x}, \tag{50}$$

と定義し、$g(\overline{y}) = f(\overline{x})$ が成立しているとすると、対数近似式は以下のように書くことが可能である。

$$\overline{y}\frac{dg}{dy}(\overline{y})\Delta y = \overline{x}\frac{df}{dx}(\overline{x})\Delta x. \tag{51}$$

例えば、コブ・ダグラス型の生産関数が以下のように与えられたとする。

$$Y = AK^{\theta}L^{1-\theta}. \tag{52}$$

この式を $\overline{Y} = \overline{AK}^{\theta}\overline{L}^{1-\theta}$ で対数線形近似する場合は、

$$\overline{Y}\left(\Delta Y\right)=\overline{AK}^{\theta}\overline{L}^{1-\theta}\Delta A+\theta\overline{AK}^{\theta}\overline{L}^{1-\theta}\Delta K+\left(1-\theta\right)\Delta L. \tag{53}$$

しかし、さらに整理することが可能であり、

$$\Delta Y=\Delta A+\theta\Delta K+\left(1-\theta\right)\Delta L. \tag{54}$$

であり、非常に単純になることがわかる。

(37) − (41) を均斉成長経路上で対数線形近似する。ただし、z_t は、すでに対数の形になっているので、z_t のみはそのまま線形近似することにする。すると、以下の式を得ることができる。

$$\Delta z_t+\theta\Delta k_t+\left(1-\theta\right)\Delta l_t-\Delta c_t=\frac{1}{1-l}\Delta l_t, \tag{55}$$

$$-\Delta c_t=\Delta\lambda_t, \tag{56}$$

$$\Delta\lambda_t=E_t\Delta\lambda_{t+1}+\mu E_t\Delta z_{t+1}+\mu\left(\theta-1\right)E_t\Delta k_{t+1}+\mu\left(1-\theta\right)E_t\Delta l_{t+1}, \tag{57}$$

$$\left(1+\gamma\right)\frac{k}{y}\Delta k_{t+1}=\Delta z_t+\theta\Delta k_t+\left(1-\theta\right)\Delta l_t+\left(1-\delta\right)\frac{k}{y}\Delta k_t-\frac{c}{y}\Delta c_t, \tag{58}$$

$$\Delta z_{t+1}=\eta\Delta z_t+\Delta\varepsilon_{t+1}. \tag{59}$$

ただし、

$$\mu=\frac{\theta\beta y}{\left(1+\gamma\right)k}, \tag{60}$$

$$y=Ak^{\theta}l^{1-\theta}, \tag{61}$$

なお、前節までのカリブレーションにより、上記の線形差分方程式のパラメターは数値的に解くことが可能である。具体的には、均斉成長系路上の均衡方程式である、

$$\frac{\theta y}{k}+\left(1-\delta\right)=\frac{1+\gamma}{\beta}, \tag{62}$$

$$\left(1-\theta\right)\frac{y}{c}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{l}{1-l}, \tag{63}$$

$$\left(\gamma+\delta\right)\frac{k}{y}=1-\frac{c}{y}, \tag{64}$$

$$y=k^{\theta}l^{1-\theta}, \tag{65}$$

の連立方程式を解くことで得ることが出来る。この場合は、数値計算に頼らずに手で解くことができ、

$$\frac{y}{k} = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1+\gamma}{\beta} - (1-\delta)\right], \tag{66}$$

$$\frac{c}{y} = 1 - (\gamma+\delta)\frac{k}{y}, \tag{67}$$

$$l = \frac{\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\theta)\frac{y}{c}}{\left[1+\frac{1-\alpha}{\alpha}(1-\theta)\frac{y}{c}\right]}, \tag{68}$$

である。しかし、多少複雑なシステムになると、上記のように解析的にパラメターを解くことができるのはきわめて稀になる。解析的に解くことが出来ない場合は、Root Finding をコンピューターに行わせる必要がある。Matlab であればコマンド fzero が、方程式の解を与える[16]。

次に、(55)-(59) で与えられた線形の差分方程式システムの解を具体的に導出する。我々の目標は、線形な Policy Functions の導出であった。すなわち、目標となるのは、

$$\Delta c_t = C_1 \Delta k_t + C_2 \Delta z_t, \tag{69}$$

$$\Delta l_t = C_3 \Delta k_t + C_4 \Delta z_t, \tag{70}$$

の形状の関数である。今、dc_t に関する Policy Function が手に入ったとしよう。すると、(55) から直ちに dl_t に関する Policy Function も計算できる。さらに、(56) から、$d\lambda_t$ に関する Policy Function も計算可能である。すなわち、消費と労働供給いずれかの Policy Function か、乗数に関する Policy Function を入手できれば、他の Policy Function は直ちに計算することが出来る。消費、労働、乗数のどれを先に計算しても良いことになる。Blanchard and Kahn[1980] は乗数を消去し、残りの Control Variable のどちらかを選択している。Burnside[1999] や King, Plosser, and Rebelo [1988a, b] では、乗数のみを残している。いずれの方法でも同じ結果を得ることが出来るが、後者の方が、複雑なシステムでは手作業が減少するメリットがある。そのため、ここでは乗数のみを残す手法を解説する。

あらかじめ作業の道筋を解説すると、以下のようになる。

(1) Control Variables を乗数と State Variables, Shocks の関数の形に書き換える。

(2) 乗数と State Variables, Shocks 項に関する連立差分方程式を作る。

(3) Jordan の標準形を用いて、発散する根を消去する。

(4) 乗数に関する Policy Function を得る。

(5) (1) で求めた関数を用い、Control Variables に関する Policy Function を得る。

[16] 非線形方程式の解を求める手法には様々なものがあり、今日でも進歩が続いている一大分野でもある。計量経済学において最尤法 (Maximum Likelihood Methods) を実践するときにも、同様の問題に直面する。中級・上級レベルの計量経済学のテキストには、大抵、一連の手法の詳しい解説が載っている。なお、fzero は非常に単純な手法しか含んでおらず、複雑な非線形方程式の解を計算するには限界がある。Matlab には別売りで、様々な Root Finding を行う ToolBox が販売されている。

では、まず (1) から始めてみる。(55) と (56) を変形し

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-l}-1+\theta \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta c_t \\ \Delta l_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta k_t \\ \Delta \lambda_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Delta z_t. \quad (71)$$

次に、(57) と (58) を変形し、

$$\begin{pmatrix} -\mu(1-\theta) & 1 \\ -(1+\gamma)\frac{k}{y} & 0 \end{pmatrix} E_t \begin{pmatrix} \Delta k_{t+1} \\ \Delta \lambda_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \theta+(1-\delta)\frac{k}{y} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta k_t \\ \Delta \lambda_t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu(1-\theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_t \begin{pmatrix} \Delta c_{t+1} \\ \Delta l_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c/y & -(1-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta c_t \\ \Delta l_t \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -\mu \\ 0 \end{pmatrix} E_t \Delta z_{t+1} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\Delta z_t. \quad (72)$$

上の 2 式を以下のように書くことにする。

$$M_{cc}V_t = M_{cs}X_t + M_{ce}z_t, \quad (73)$$

$$M_{ss0}E_tX_{t+1} + M_{ss1}X_t = M_{sc0}E_tV_{t+1} + M_{sc1}V_t + M_{se0}E_tz_{t+1} + M_{se1}z_t, \quad (74)$$

ただし、$V_t = (\Delta c_t, \Delta l_t)'$、$X_t = (\Delta k_t, \Delta \lambda_t)'$ である。

なお、以降の手法は、上記のモデルのみでなく、諸変数がスムースに動く一般の動学均衡分析を解く際に適用可能なものであり、極力一般的なケースを考慮して説明する。状態変数や Control Variables がたとえ数百あっても、上記の 2 本の式の形状に変更可能である限り、応用可能である。

M_{cc} に逆行列 M_{cc}^{-1} が存在すると仮定すると[17]、両式をまとめることが可能であり、

$$V_t = M_{cc}^{-1}M_{cs}X_t + M_{cc}^{-1}M_{ce}z_t, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} M_{ss0}E_tX_{t+1} + M_{ss1}X_t = {} & M_{sc0}E_t\left(M_{cc}^{-1}M_{cs}X_{t+1} + M_{cc}^{-1}M_{ce}z_{t+1}\right) + \\ & M_{sc1}\left(M_{cc}^{-1}M_{cs}X_t + M_{cc}^{-1}M_{ce}z_t\right) + M_{se0}E_tz_{t+1} + M_{se1}z_t, \end{aligned} \quad (76)$$

整理すると

$$E_tX_{t+1} = WX_t + RE_tz_{t+1} + Qz_t \quad (77)$$

ただし、

$$W = -\left(M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce}\right)^{-1}\left(M_{ss1} - M_{sc1}M_{cc}^{-1}M_{cs}\right), \quad (78)$$

$$R = \left(M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce}\right)^{-1}\left(M_{se0} + M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce}\right), \quad (79)$$

[17] M_{cc} に逆行列が存在しない場合、ここでの手法を適用することはできない。Control Variables の線形結合をつくり新たに変数を定義しなおし M_{cc} を正則にすることが可能であるが、非常に複雑な作業であり、この手法の限界であると言える。

$$Q = \left(M_{ss0} - M_{sc0}M_{cc}^{-1}M_{ce}\right)^{-1}\left(M_{se1} + M_{sc1}M_{cc}^{-1}M_{ce}\right), \tag{80}$$

以上で、Predetermined Variables と乗数に関する連立差分方程式を得ることが出来た。次に、Step (3) として、Jordan の標準形を用いて W を対角化すると、

$$P^{-1}E_tX_{t+1} = \Lambda P^{-1}X_t + P^{-1}RE_tZ_{t+1} + P^{-1}QZ_t, \tag{81}$$

ただし、Λ は W の固有値を対角成分にもつ対角行列であり、P は固有ベクトルからなる行列であり、以下の式をみたす。

$$P\Lambda P^{-1} = W. \tag{82}$$

直交化された新たな変数を以下のように定義する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{\lambda}_t \end{pmatrix} = P^{-1}X_t. \tag{83}$$

ここでは Predetermined Variables が資本の一つしかないため $\tilde{x}_t$ は 1 次元ベクトルになっているが、より高次元の経済モデルでは、Predetermined Variables、または State Variables の次元に等しいベクトルとなる。

最適成長モデルの際と同様に、Λ の発散根を消去し、収束していく経路のみを考えていく。差分方程式においては固有値の絶対値が 1 よりも大きいときは発散根、1 よりも小さいときは収束根であった。操作が楽になるように、Λ の固有値を、絶対値が小さい順にならべかえ、対応する行列 P もまた並べ替える。　そして

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{84}$$

Λ_1 は、対角成分の絶対値が 1 よりも小さく、Λ_2 は絶対値が 1 よりも大きい対角行列である。ここで扱っているモデルでは、制約条件が凸であり、目的関数が凹になっているので、解はただ一つ常に存在するため、2 つの固有値の絶対値のいずれかは 1 よりも大きく、もうひとつは 1 よりも小さくなっている。しかし、外部性や公共財、収穫逓増等を含むモデルでは、一般に、Λ_1 の次元が Predetermined Variables の次元に等しくなるとは限らない。もしも、Λ_1 の次元のほうが Predetermined Variables の次元よりも大きい場合、この経済には収束解が連続的に存在し、モデルの解は一つに決まらない。このような現象を indeterminacy と呼ぶ。indeterminacy が発生している場合、均衡が非常に不安定になる可能性もあり、サンスポット均衡と呼ばれる現象が発生するかもしれない。逆に、Λ_1 の次元が Predetermined Variables の次元よりも大きい場合、収束経路は存在せず、定常状態に収束する均衡が存在しない状況にある。ここでは、定常状態に収束する均衡が一意に決定される状況のみを考える。

W と P,R,Q を、それぞれ Λ_1 の次元に対応するように分割する。ここでは、単に 4 つに分割するだけである。

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_\lambda \end{pmatrix}, \tag{85}$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_\lambda \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \tag{86}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} \\ P^{21} & P^{22} \end{pmatrix}. \tag{87}$$

すると、以下の関係があることが容易に確認できる。

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}\Lambda_1 P^{11} + P_{12}\Lambda_2 P^{21} & P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22} \\ P_{21}\Lambda_1 P^{11} + P_{22}\Lambda_2 P^{21} & P_{21}\Lambda_1 P^{12} + P_{22}\Lambda_2 P^{22} \end{pmatrix}. \tag{88}$$

以上の行列の分解を用いると、(81) の第一式は、以下のように書くことが出来る。

$$E_t \tilde{x}_{t+1} = \Lambda_1 \tilde{x}_t + \left(P^{11} R_x + P^{12} R_\lambda\right) E_t z_{t+1} + \left(P^{11} Q_x + P^{12} Q_\lambda\right) z_t. \tag{89}$$

上の式は、来期の $E_t \tilde{x}_{t+1}$ が、今期の $\tilde{x}_t$ とショック項のみに依存していることを示しており、Policy Function に近い形状になっている。一方、第二式は

$$E_t \tilde{\lambda}_{t+1} = \Lambda_2 \tilde{\lambda}_t + \left(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda\right) E_t z_{t+1} + \left(P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda\right) z_t, \tag{90}$$

になっている。ここで、Λ_2 の対角成分の絶対値が 1 より大きいため (そのように Λ_2 を定義したため)、$\tilde{\lambda}_t$ は発散する経路であることがわかる。そこで、その発散経路を消去するために、上の式を Forward に解くことにする。ここで、Forward に解く、というのは、以下の作業を指す。

$$\tilde{\lambda}_t = \Lambda_2^{-1} E_t \tilde{\lambda}_{t+1} - \Lambda_2^{-1} \left[\left(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda\right) E_t z_{t+1} + \left(P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda\right) z_t\right], \tag{91}$$

$$\tilde{\lambda}_t = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} \left[\left(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda\right) E_t z_{t+1+j} + \left(P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda\right) E_t z_{t+j}\right]. \tag{92}$$

この右辺は $\tilde{\lambda}_t$ が発散しないような水準であり、将来のショックに関する予測のみに依存している。なお、Λ_2^{-1} の絶対値は 1 よりも小さいため、

$$\lim_{j \to \infty} \left(\Lambda_2^{-1}\right)^j E_t \tilde{\lambda}_{t+j+1} = 0, \tag{93}$$

となることを利用している。

前節までのモデルのように、ショック項 z_t が AR1 に従っている場合、その期待値に依存している $\tilde{\lambda}_t$ は z_t の簡単な関数として書くことが可能であり、

$$z_{t+1} = \Pi z_t + \varepsilon_{t+1}, \tag{94}$$

$$E_t z_{t+1} = \Pi z_t, \tag{95}$$

ならば、

$$\tilde{\lambda}_t = \Psi z_t, \tag{96}$$

$$\Psi = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_2^{-(j+1)} \left[\left(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda \right) \Pi + \left(P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda \right) \right] \Pi^j z_t. \tag{97}$$

次に、$\tilde{\lambda}_t, \tilde{x}_t$ を、元の系列に戻す。$X_t = (\Delta k_t, \Delta \lambda_t)$ を簡単化のために、ここでは (x_t, λ_t) と書くと、

$$\lambda_t = -\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21} x_t + \left(P^{22}\right)^{-1} \tilde{\lambda}_t. \tag{98}$$

ところで

$$x_{t+1} = W_{11} x_t + W_{12} \lambda_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t, \tag{99}$$

であったから、

$$x_{t+1} = \left(P_{11}\Lambda_1 P^{11} + P_{12}\Lambda_2 P^{21}\right) x_t + \left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right) \lambda_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t, \tag{100}$$

$$\begin{aligned} x_{t+1} = & \left(P_{11}\Lambda_1 \left[P^{11} - P^{12}\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21}\right]\right) x_t + \\ & \left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right) \left(P^{22}\right)^{-1} \tilde{\lambda}_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t. \end{aligned} \tag{101}$$

ここで、逆行列に関する公式を用いる。一般に、

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \tag{102}$$

の逆行列は、以下のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} D^{-1} & -D^{-1}FH^{-1} \\ -H^{-1}GD^{-1} & H^{-1} + H^{-1}GD^{-1}FH^{-1} \end{pmatrix}, \tag{103}$$

$$D = E - FH^{-1}G. \tag{104}$$

これを利用すると、

$$x_{t+1} = \left(P_{11}\Lambda_1 P_{11}^{-1}\right) x_t + \left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right) \left(P^{22}\right)^{-1} \tilde{\lambda}_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t. \tag{105}$$

$\tilde{\lambda}_t = \Psi z_t$ であり、

$$x_{t+1} = \left(P_{11}\Lambda_1 P_{11}^{-1}\right) x_t + \left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right) \left(P^{22}\right)^{-1} \Psi z_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t, \tag{106}$$

$$x_{t+1} = \left(P_{11}\Lambda_1 P_{11}^{-1}\right) x_t + \left[\left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right)\left(P^{22}\right)^{-1}\Psi + R_x\Pi + Q_x\right] z_t, \tag{107}$$

新たに係数を定義すると、

$$x_{t+1} = \Gamma_{xx} x_t + \Gamma_{xz} z_t. \tag{108}$$

λ_t に関しては、

$$\lambda_t = -\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21} x_t + \left(P^{22}\right)^{-1}\Psi z_t, \tag{109}$$

もともとの Control Variables $V_t = (c_t, l_t)$ に戻すと、

$$V_t = M_{cc}^{-1} M_{cs} \begin{pmatrix} I \\ -\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21} \end{pmatrix} x_t + \left[M_{cc}^{-1} M_{cs} \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(P^{22}\right)^{-1}\Psi \end{pmatrix} + M_{cc}^{-1} M_{ce}\right] z_t, \tag{110}$$

新たに係数を定義すると、

$$V_t = \Gamma_{ux} x_t + \Gamma_{uz} z_t. \tag{111}$$

上記の式が Policy Functions になる。今期の消費と余暇は、今期の State Variables、すなわち資本水準と今期のショックおよび将来のショックに関する期待に関する線形の関数になっているのである。以上で、我々のモデルは解けたことになる。

8 Impulse Response Functions

前節で、我々はモデルの Policy Functions を導出した。本節ではその Policy Functions を用いて、シミュレーションを行う手法の一つ、Impulse Response Functions を説明する。これは時系列分析で広く採用されている手法であり、ある期にショックが生じた場合、そのショックが経済諸変数にどのような影響を与えていくか、時系列で追いかけるものである。例えば、今期、技術ショックが生じ、生産性が 1% 上昇したとする。この結果、今期以降の消費や投資、総生産にどのような影響が生じるかを Impulse Response は示すのである。Policy Functions が手元にある場合、この計算は非常にたやすい。

この経済のショック要因は $z_{t+1} = \Pi z_t + \varepsilon_{t+1}$ における ε_{t+1} である。ε_{t+1} の変化が他の諸変数にどのような影響を与えるかを考察する。z_t が変化したとき、Predetermined Variables がどのように変化するかは、以下の式で与えられていた。

$$x_{t+1} = \Gamma_{xx} x_t + \Gamma_{xz} z_t. \tag{112}$$

また、Predetermined Variables が変化したとき、Control Variables がどのように変化するかは、Policy Functions で与えられる。

$$W_t = \Gamma_{ux} x_t + \Gamma_{uz} z_t. \tag{113}$$

以下のように新たに変数を定義する。

$$s_t = \begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix}. \tag{114}$$

すると、s_t の変化は、以下の式であたえられる。

$$s_{t+1} = Ms_t + \widehat{\varepsilon}_{t+1}, \tag{115}$$

$$M = \begin{pmatrix} \Gamma_{zz} & \Gamma_{zz} \\ 0 & \Pi \end{pmatrix}, \ \widehat{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}. \tag{116}$$

ε_t が、t+1 期に 1 になり、それ以外は全てゼロであるとする。すると、来期以降の Predetermined Variables の動きは、

$$s_{t+j} = M^j s_t + M^{j-1}\widehat{\varepsilon}_{t+1}, \tag{117}$$

である。また、消費や余暇などの Control Variables は

$$V_{t+j} = (\Gamma_{ux}, \Gamma_{uz})\, s_{t+j}, \tag{118}$$

で計算できる。以上の 2 式が Impulse Response Functions を作り出す。

9 Matlab Programs

本節では、前節までで説明したマクロモデルの Impulse-Response Functions を導出する Matlab プログラムを掲載する。プログラムは 2 つに分かれており、プログラム 1 はモデルの構造が格納されている The Main Program であり、プログラム 2 は、プログラム 1 で与えられた行列要素を元に、Policy Functions を計算するモジュールである。プログラム 2 は、モデルによらず一般的に利用可能である。なお、% で始まる各行は Matlab におけるコメント文である。

[プログラム 1] (The Main Program)

```
%
%
%
%
clear all;
format short;
%
% Parameter Values
%
delta = 0.012; % Depeciation (annual)
beta = 0.987;
```

```
gam = 0.026;
ehta = 0.95;
alpha = 0.64;
ceta = 0.40;
%
% Special Values for our model
%
%
yovk = (1/ceta)*( (1+gam)/beta - (1-delta));
covy = 1-(gam+delta)*(1/yovk);
le = ((1-alpha)/alpha)*(1-ceta)*(1/covy)/( 1+((1-alpha)/alpha)*(1-ceta)*(1/covy));
mhu = ceta*yovk*beta/(1+gam);
%
n=1; % The number of the predtermined variables
%
iter1=30; % The number of itertation for Impulse-Responses
%
%
%
% Matrices For subroutine to solve dynamic optimization problem
%
%
% MCC matrix
%
mcc=zeros(2,2);
mcc(1,1) = 1;
mcc(1,2) = 1/(1-le) -1 +ceta;
mcc(2,1) = -1;
%
%
% MSC Matrix
%
mcs = zeros(2,2);
mcs(1,1) = ceta;
mcs(2,2) = 1;
%
%
% MCE Matrix - no stochastic elements
%
mce = zeros(2,1);
mce(1,1) = 1;
%
%
% MSS0 Matrix
%
mss0 = zeros(2,2);
```

```
mss0(1,1) = -mhu*(1-ceta);
mss0(1,2) = 1;
mss0(2,1) = -(1+gam)/(yovk);
%
%
% MSS1 Matrix
%
mss1 = zeros(2,2);
mss1(1,2) = -1;
mss1(2,1) = ceta+(1-delta)*(1/yovk);
%
%
% MSC0 Matris
%
msc0 = zeros(2,2);
msc0(1,2) = -mhu*(1-ceta);
%
%
% MSC1 Matrix
%
msc1 = zeros(2,2);
msc1(2,1) = covy;
msc1(2,2) = -1+ceta;
%
%
% MSE0 Matrix
%
mse0 = zeros(2,1);
mse0(1,1) = -mhu;
%
%
% MSE1 Matrix
%
mse1 = zeros(2,1);
mse1(2,1) = -1;
%
%
% PAI Matrix
%
pai = zeros(1,1);
pai(1,1)= ehta;
%
%
%
[GXX,GXZ,GUX,GUZ,M,Psi,V] = burns6(n,mcc,mcs,mce,mss0,mss1,msc0,msc1,mse0,mse1,pai);
%
```

```
%
% Drawning the impulse and response function
%
%
TSE=zeros(2,1); % The state and shock variables
%
TSE(2,1)=1;
%
%
%
T =zeros(iter1,8); % Impulse Response Matrix
%
T(1,1) = 1; % The first period's index
%
%
N = M;
%
%
for k=1:iter1
    %
    %
    k1 = k;
    %
    TCC = GUX*TSE(1,1) + GUZ*TSE(2,1);
    %
    TY = (1-ceta)*TCC(2,1)+ceta*TSE(1,1) + TSE(2,1);
    %
    TW = TY - TCC(2,1);
    %
    TR = TY - TSE(1,1);
    %
    T(k,:)=[k1 TCC(1,1) TCC(2,1) TSE(1,1) TSE(2,1) TY TW TR];
    %
    TSE=M*TSE;
    %
    %
end;
%
%
% Plot the results
%
%
%
figure;
%
subplot(4,2,1)
```

```
plot(T(:,1),T(:,2))
title(' (1) Consumption')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,2)
plot((T(:,1)),T(:,3))
title(' (2) Employment')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,3)
plot((T(:,1)),T(:,4))
title(' (3) Capital')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,4)
plot((T(:,1)),T(:,6))
title(' (4) GDP')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,5)
plot((T(:,1)),T(:,7))
title(' (5) Wage')
xlabel('Year')
%
subplot(4,2,6)
plot((T(:,1)),T(:,8))
title(' (6) r')
xlabel('Year')
subplot(4,2,7)
plot((T(:,1)),T(:,5))
title(' (7) shock')
xlabel('Year')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%  The End of the Program %%%%%%%%%%%%
```

[プログラム 2]

```
function [GXX,GXZ,GUX,GUZ,M,Psi,V] = burns6(n,mcc,mcs,mce,mss0,mss1,msc0,msc1,mse0,mse1,pa
%
% n is the number of the predetermined variable.
%
% Mcc*ut = Mcs*(xt,ramt)'+Mce*zt,
% Mss0*(xt+1, ramt+1)' +Mss1*(xt, ramt)' = Msc0*ut+1 + Msc1*ut+Mse0*zt+1
+ Mse1*zt,
```

```
% zt+1 = Pai * zt + et.
%
%
% Mss0 should be square.
%
% The outputs of this fumction are Gxx, Gxz, Gux, and Guz which are the coefficinents of
%
% xt+1 = Gxx*xt + Gxz *zt,
% ut = Gux*xt + Guz *zt.
%
% M is a transition matrix for both xt and zt.
% V is a diagonal matrix which shows the stability of the system.
% The number of the diagonal elements whose absolute values are
% smaller than one should be the same as the number of the state variables
% to get a unique solution.
%
%
Mss0 = mss0 - msc0*inv(mcc)*mcs;
Mss1 = mss1 - msc1*inv(mcc)*mcs;
Mse0 = mse0 + msc0*inv(mcc)*mce;
Mse1 = mse1 + msc1*inv(mcc)*mce;
%
W = -(Mss0)\Mss1;
R = (Mss0)\Mse0;
Q = (Mss0)\Mse1;
%
% This corresponds to (xt+1,ramt+1)'=W*(xt,ramt)'+Q*zt+1+R*zt;
%
[PO,VO]=eig(W); % The eigensystem of this economy.
%
n1 = length(W); % The number of the endogenous variables in the reduced model.
%
% Rearranging the matrices
%
alamb=abs(diag(VO));
[lambs, lambz]=sort(alamb);
V=VO(lambz,lambz);
P = PO(:,lambz);
%
% Partitioning the matrices
%
P11 = P(1:n,1:n);
P12 = P(1:n, n+1:n1);
P21 = P(n+1:n1,1:n);
```

```
P22 = P(n+1:n1,n+1:n1);
%
PP = inv(P);
PP11 = PP(1:n,1:n);
PP12 = PP(1:n, n+1:n1);
PP21 = PP(n+1:n1,1:n);
PP22 = PP(n+1:n1,n+1:n1);
%
V1 = V(1:n,1:n); % The Partition of the Jordan Matrix.
V2 = V(n+1:n1, n+1:n1);
%
Rx = R(1:n, :);
Rr = R(n+1:n1, :);
%
Qx = Q(1:n, :);
Qr = Q(n+1:n1,:);
%
Phi0 = PP21*Rx + PP22*Rr;
Phi1 = PP21*Qx + PP22*Qr;
Phi01 = Phi0*pai + Phi1;
%
n2 = size(mce);
n3 = n2(2);
%
%      Making a Matrix, Psi
%
Psi=zeros(n1-n,n3);
%
    for i = 1:n1-n;
        %
        for j=1:n3;
            %
            Psi(i,j)=-(Phi01(i,j)/(1-inv(V2(i,i))*pai(j,j)));
            %
        end;
        %
    end;
%
Psi = (V2)\Psi;
%
GUX0 = [eye(n);-(PP22)\PP21];
GUZ0 = [zeros(n,n3);(PP22)\Psi];
%
% Outputs, The Coefficients for the Policy Functions.
%
GXX = P11*V1*inv(P11);
```

```
GXZ = (P11*V1*PP12 + P12*V2*PP22)*inv(PP22)*Psi+Qx+Rx*pai;
GUX = inv(mcc)*mcs*GUX0;
GUZ = inv(mcc)*mcs*GUZ0+inv(mcc)*mce;
M = [ GXX GXZ; zeros(n3,n) pai];
%
%%%%%%%%%% The End of the Program %%%%%%%%%%%%
```

10 結果

前節のプログラムで得られる Policy Functions は、以下の通りである。

$$dc_t = 0.6013dk_t + 0.4305dz_t, \tag{119}$$

$$dl_t = -0.2291dk_t + 0.6481dz_t, \tag{120}$$

$$dk_{t+1} = 0.9427dk_t + 0.1362dz_t. \tag{121}$$

資本が増大すると、消費は増大する。これは、資本が増大すれば、生産高が増大し、産出量が増大するためである。生産性への正のショック z_t の増大も、消費を増大させる。これは、当期の総生産を増大させることと、我々の仮定により、z_t は AR1 に従うため、将来の生産性もある期間は増大するためである。一方、労働供給は、資本の減少関数となっている。資本の 1% の増大は労働の限界生産性を θ% 増加させる。しかし、今期の資本の増大は将来の資本も増加させるため、来期の労働の限界生産性も、ほぼ同程度増加する。すると、長期にわたり労働の限界生産性は増大することになり、所得効果が働く。我々の仮定では余暇は上級財であるため、所得の増加は余暇消費を増加させる。また、資本の増大は資本の限界生産性、すなわち金利を低下させる。金利の低下は、現在労働し、貯蓄するよりも、将来労働し貯蓄するように、合理的な消費者を誘導する。すなわち、今期の資本の増大は、労働供給を金利の低下と生涯所得の増加の 2 つの経路により、減少させるのである。

z_t が 1 単位増加すると、消費、労働供給、いずれも増大する。消費が増加する理由は、生産性の上昇が総生産水準を増加させるためである。労働供給の場合は、多少複雑である。資本の増加と同様、z_t の増加は労働の生産性を増加させ、しかもその効果は持続する。その結果、生涯所得が増加し、資本の増大と同様に、労働供給を減少させる効果をもつ。だが、我々は z_t は AR1 であると仮定したため、将来の限界生産性の上昇分は、今期よりも小さいものとなっている。すなわち、今期の賃金は、将来の賃金よりも高いのである。合理的な消費者は、今期の高い賃金のもとで多く働き、将来は余暇を消費することを選択する。また、z_t の増大は資本の限界生産性、すなわち金利を上昇させる。資本の増大とは逆に、この場合、合理的な消費者は、今期に労働所得を得て貯蓄することを望むであろう。すなわち、金利の変化は労働供給を増加させる効果をもつ。以上の 2 つの効果は、生産性の向上による生涯所得の増加という所得効果を上回り、z_t の増大は、今期の労働供給を増加させるのである。賃金の将来水準と今期の水準の相対的な大きさ、

および金利の変化による労働供給への効果のことを余暇の異時点間代替、といい、Lucas 以来、新古典派的なマクロ経済学において採用されているものである。

以上の効果は、実際に Impulse Response Functions を観察することで確認できる。1% の正の技術ショックが生じた場合のケースを図は示している。技術ショックに対し、消費は Policy Functions が予告するように、0.43% 上方へジャンプする。労働供給も 0.65% 上昇する。労働供給の 1% の増加は、総生産高を $(1-\theta) = 0.6\%$ 増加させる。結果として、労働供給の増加は、総生産を 0.389% 増加させる。技術ショックそのものは、総生産を 1% 増加させるため、合計して、当期の総生産は 1.389% 増大する。

賃金の増大は、金利に比べて小さい。いずれも、技術ショックの直接効果は1% の増加であるが、今期の資本は前期の投資により決定されているため (Predetermined である)、資本水準は変化できない。変化させることができるのは労働力であり、労働供給は上昇している。その結果、限界生産性の増加は、労働供給の増加のために目減りする。一方、金利、すなわち資本の限界生産性は、労働力が増加するために、直接効果以上に上昇する。

他のパラメターの下では、この Policy Functions はどうなるかは、各自で実験してもらいたい。例えば、z_t の持続度、η が非常に小さい場合は、余暇の異時点間代替が非常に強くなり、労働供給の Policy Functions の dz_t の係数は大きくなることが予想される。一方、消費に関しては、恒常所得の増分が小さくなるため、消費の z_t への感応度は低下することが予想される。

Table 1.1
Cyclical Behavior of the U.S. Economy: Deviations from Trend of Key Variables, 1954:I–1991:II

		Cross-Correlation of Output with:										
Variable	*SD%*	$x(-5)$	$x(-4)$	$x(-3)$	$x(-2)$	$x(-1)$	x	$x(+1)$	$x(+2)$	$x(+3)$	$x(+4)$	$x(+5)$
Output component												
GNP	1.72	.02	.16	.38	.63	.85	1.0	.85	.63	.38	.16	−.02
Consumption expenditures												
CONS	1.27	.25	.42	.57	.72	.82	.83	.67	.46	.22	−.01	−.20
CNDS	0.86	.22	.40	.55	.68	.78	.77	.64	.47	.27	.06	−.11
CD	4.96	.24	.37	.49	.65	.75	.78	.61	.38	.11	−.13	−.31
Investment												
INV	8.24	.04	.19	.38	.59	.79	.91	.76	.50	.22	−.04	−.24
INVF	5.34	.08	.25	.43	.63	.82	.90	.81	.60	.35	.09	−.12
INVN	5.11	−.26	−.12	.05	.30	.57	.79	.88	.83	.60	.46	.24
INVR	10.7	.42	.55	.65	.72	.74	.63	.39	.11	−.14	−.33	−.43
Ch. INV	17.3	−.03	.07	.22	.38	.53	.67	.51	.27	.04	−.15	−.30
Government purchases												
GOVT	2.04	.03	−.01	−.03	−.01	−.01	.04	.08	.11	.16	.25	.32
Exports and imports												
EXP	5.53	−.48	−.42	−.29	−.10	.15	.37	.50	.54	.54	.52	.44
IMP	4.88	.11	.19	.31	.45	.62	.72	.71	.52	.28	.04	−.18
Labor input based on household survey												
HSHOURS	1.59	−.06	.09	.30	.53	.74	.86	.82	.69	.52	.32	.11
HSAVGHRS	0.63	.04	.16	.34	.48	.63	.62	.52	.37	.23	.09	−.05
HSEMPLMT	1.14	−.10	.04	.23	.46	.69	.85	.86	.76	.59	.40	.18
GNP/HSHOURS	0.90	.06	.14	.20	.30	.33	.41	.19	.00	−.18	−.25	−.24
Labor input based on establishment survey												
ESHOURS	1.69	−.12	.07	.38	.54	.78	.92	.90	.78	.63	.42	.21
ESAVGHRS	0.48	.14	.26	.42	.58	.68	.62	.45	.22	.05	−.15	−.30
ESMPLMT	1.41	−.19	−.01	.22	.47	.72	.89	.92	.86	.73	.55	.34
GNP/ESHOURS	0.73	.35	.44	.44	.45	.34	.34	.10	−.09	−.30	−.38	−.42
Average hourly earnings based on establishment survey												
WAGE	0.757	.20	.35	.47	.58	.66	.68	.59	.46	.29	.12	−.03
Average hourly compensation based on national income accounts												
COMP	0.55	.24	.25	.21	.14	.09	.03	−.07	−.09	−.09	−.09	−.10

Notes: GNP—real GNP, 1982$; CONS—personal consumption expenditure, 1982$; CNDS—consumption of nondurables and services, 1982$; CD—consumption of durables, 1982$; INV—gross private domestic investment, 1982$; INVF—fixed investment, 1982$; INVN—nonresidential fixed investment, 1982$; INVR—residential fixed investment, 1982$; Ch. INV–change in inventories, 1982$; GOVT—government purchases of goods and services, 1982$; EXP—exports of goods and services, 1982$; IMP—imports of goods and services, 1982$; HSHOURS—total hours of work (Household Survey); HSAVGHRS—average weekly hours of work (Household Survey); HSEMPLMT—employment (Household Survey); ESHOURS—total hours of works (Establishment Survey); ESAVGHRS—average weekly hours of work (Establishment Survey); ESEMPLMT—employment (Establishment Survey); WAGE—average hourly earning, 1982$ (Establishment Survey); COMP—average total compensation per hour, 1982$ (National Income Accounts). The Establishment Survey sample is for 1964:I–1991:II.

"Frontiers of Business Cycle Research" Edited by Thomas F. Cooley, published by Princeton University Press.

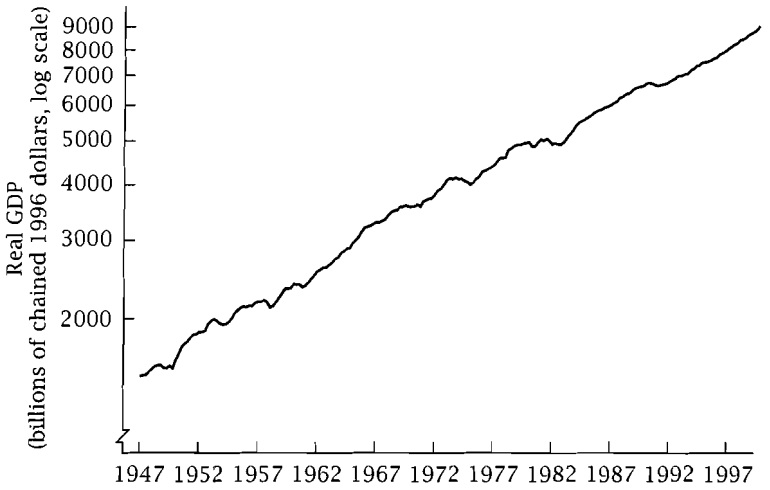
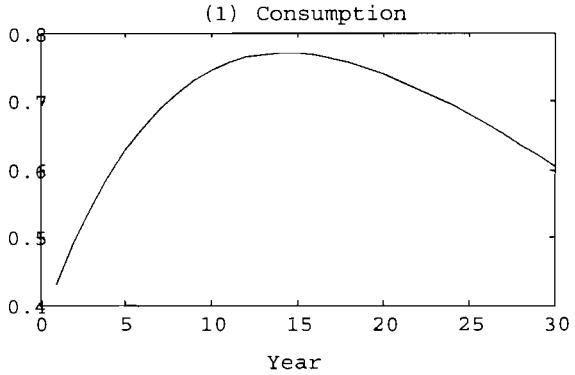
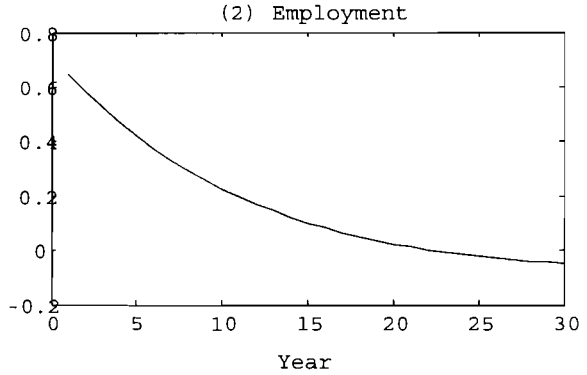


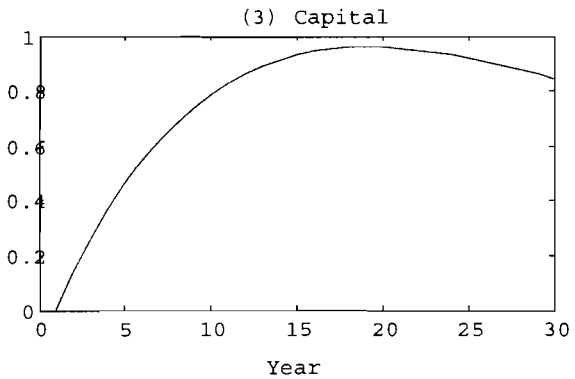
FIGURE 4.1 U.S. real GDP, 1947–1999

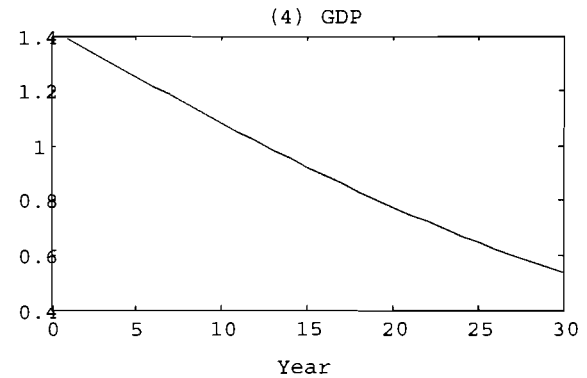
TABLE 4.1 Recessions in the United States since World War II

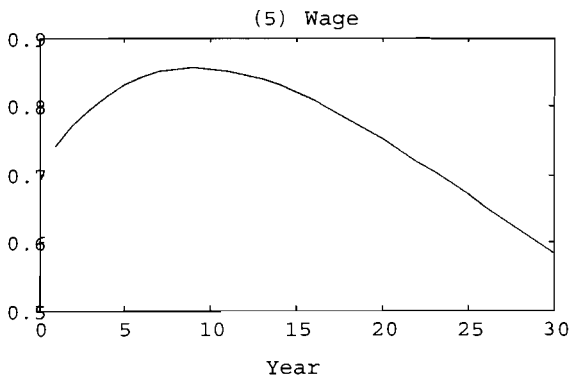
Year and quarter of peak in real GDP	Number of quarters until trough in real GDP	Change in real GDP, peak to trough
1948:4	2	−1.7%
1953:2	3	−2.7
1957:3	2	−3.7
1960:1	3	−1.6
1970:3	1	−1.1
1973:4	5	−3.4
1980:1	2	−2.2
1981:3	4	−2.9
1990:2	3	−1.5

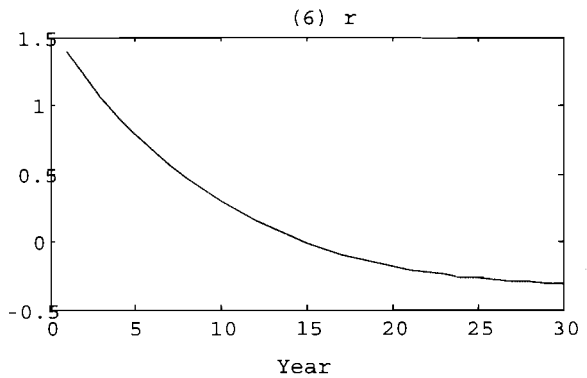

(1) Consumption
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0 5 10 15 20 25 30
Year

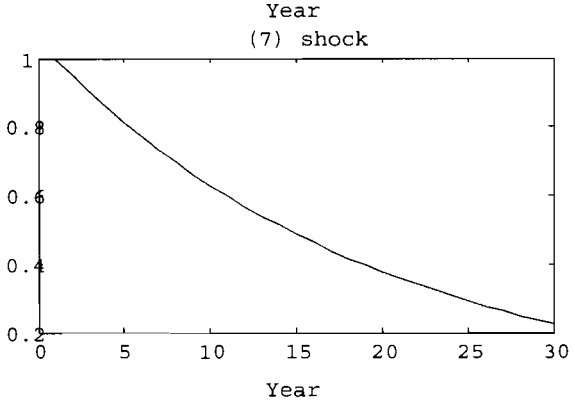

(2) Employment
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0 5 10 15 20 25 30
Year

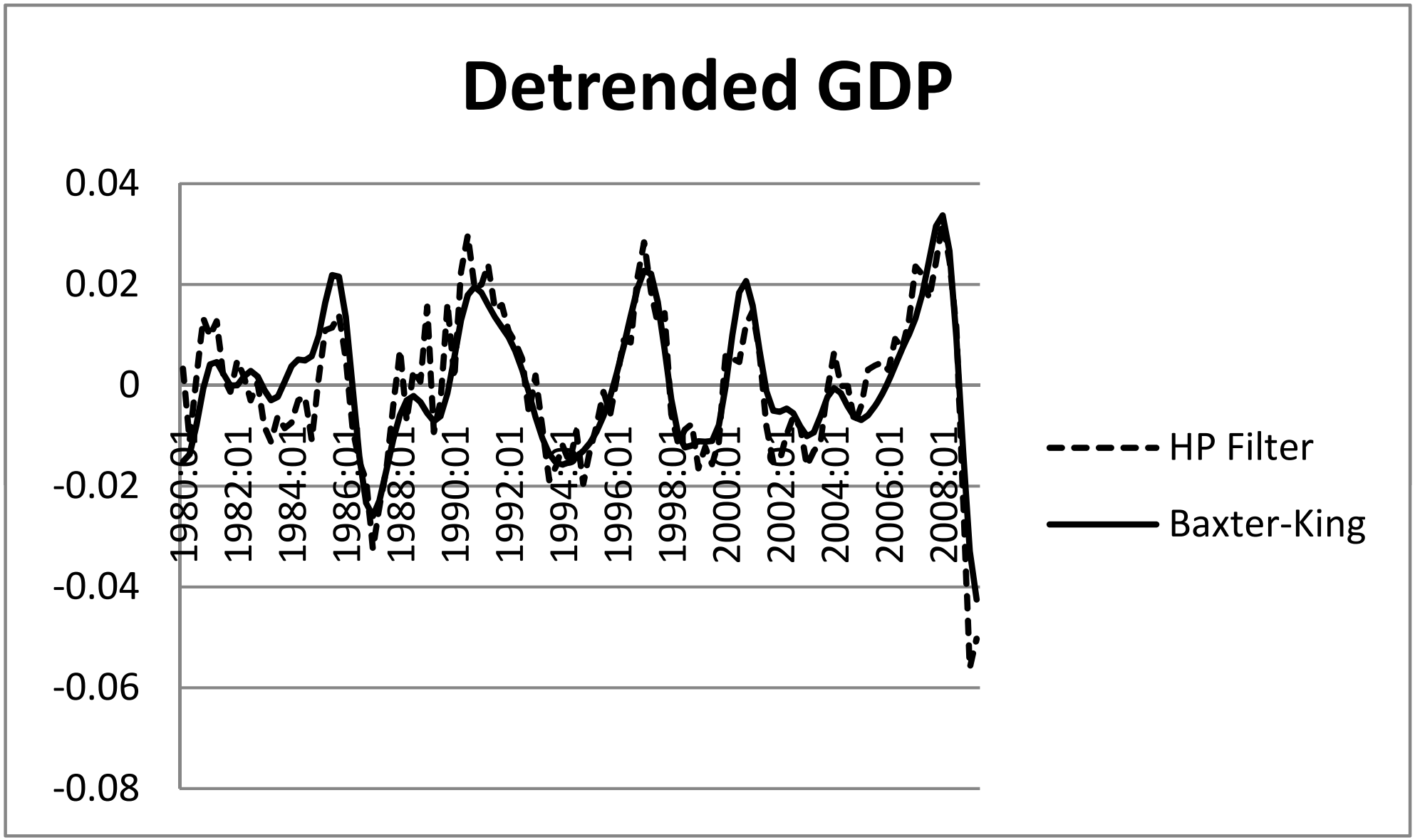

(3) Capital
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 5 10 15 20 25 30
Year


(4) GDP
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0 5 10 15 20 25 30
Year


(5) Wage
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0 5 10 15 20 25 30
Year


(6) r
1.5
1
0.5
0
-0.5
0 5 10 15 20 25 30
Year


(7) shock
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0 5 10 15 20 25 30
Year


Detrended GDP
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
1980:01
1982:01
1984:01
1986:01
1988:01
1990:01
1992:01
1994:01
1996:01
1998:01
2000:01
2002:01
2004:01
2006:01
2008:01
HP Filter
Baxter-King