応用マクロ経済学講義ノート
家計消費1 分離可能性

Naohito Abe

September 2023

1 Introduction

家計消費に関する経済分析の出発点は、一日における自分の様々な選択、意思決定に関して考えることである。朝晴れていればジョギングするかもしれないし、ギリギリまで寝ているか、家族のために朝食をつくるかもしれない。これは、自分の体力温存、すなわち休息という形の余暇と、心身の健康という人的資本の一種の蓄積、さらには家庭内の消費および資源配分に関する様々なトレードオフの結果として選択される。朝食をとる際、棚や冷蔵庫から食材を取り出し、朝食を作るなり、すでに加工されているものを食することになるが、何をどの程度食べるかは、朝食から得られる効用(美味しい食事)および医学的栄養摂取に必要な時間・労力、および金銭的費用の間の選択となる。また、家族のために食事を作る場合は、家庭内の資源配分、すなわち家庭内でどのように必要な労力および便益を配分するか、に関する集合的意思決定の結果である。朝食後、出勤する場合の多くは、当日においては選択の余地が少ないケースがほとんどであろう。すなわち、日々の労働に関しては事前にコミットされていて、当日できる意思決定は、突然の休暇を取るか否かに限定されることがおおい。しかし、例えば、10年後の自分の労働環境に関しては、自分である程度の選択する余地があるだろう。出勤する場合は、職場で食事をとるか否か、退社後、どこかに遊びに行くか、何時に自宅に戻るか、自宅に戻った後の時間をどのように過ごすか、入浴にどの程度の時間をかけるか、等など。私達の一日の間に、多くの選択がなされている。そして、今日、家計消費分析とされる研究分野は、上記の選択のほとんどを研究対象としている。より厳密には、家計消費分析は、労働経済学や医療経済学の範疇と被ることになるが、そもそも家計消費は医療や労働と分離することができないもので

ある。たとえば労働供給を、余暇と消費選択の問題と考えるならば、労働供給に関する労働経済学の諸側面は、家計消費分析の対象になる。

研究対象が膨大な範囲に広がる家計消費分析ではあるが、現在においても、その中心は購買による家計消費支出行動にある。しかし、家計消費支出分析の対象もまた広大である。私達は、買い物をする場合、どこの店にいくのだろうか。各店には膨大な種類の商品・サービスが販売されているが、それらのうち、何をいくらで購入するのだろうか。ミクロ経済学の入門書では、予算制約線上で、限界代替率が価格比に等しい点で最適消費量が決定される。しかし、現実には多くの商品は購入されず、コーナー解となる。また、多くの場合、購入と消費のタイミングは異なる。例え生鮮食料品であっても、一週間くらいのは冷蔵庫で保存可能なケースがほとんどであろう。実際には、商品・サービスの実際の消費と購買のタイミングはどの程度ずれるのだろうか?そうしたずれは、家計消費分析を考える場合、どのような問題を作るのだろうか?こう考えると、家計消費分析はかなり複雑なものになることがわかるだろう。次に、日々の購買行動から距離をとり、年単位の行動を考えると、海外旅行などの大型のサービス消費、住宅や車などの耐久財・固定資産の購入、貯蓄の運用方法、結婚・離婚、子供の教育、病気や事故のリスクと保険の購入、人間ドックなどの医療サービスの購入、休日の余暇と区分される時間の配分、親との同居の有無・・・。まさに無数の意思決定を行いながら、そして明日を、一か月先を、10年先を考えながら、私達は今日を生きている。家計消費の経済分析は、家計の意思決定に関する総合的な分析にならざるを得ないのである。実際、20世紀初頭の消費関数論争以降、急速に拡大する家計レベルのミクロデータをもとに、家計消費研究は余暇時間配分、健康・医療、育児、所得変動リスク等、多くの方向に分析対象を拡大していった。

家計消費の経済分析には、二つの潮流がある。一つは、複数財の間での選択を中心とする、伝統的なミクロ経済学のフレームワークによるものである。1980年に出版されたDeaton and Muellbaeur (1980) *1は、この伝統的なミクロ経済学的分析において今なお色あせない、その当時の消費研究のほぼ全範囲を扱う大著である。そこでの主要な課題は需要関数、あるいは需要システムの推計であり、いかに一般的な選好関係を仮定し、そこにどのような構造を与え推計していくか、詳細に論じている。現在の消費研究は彼らの教科書の範囲をはるかに超えて拡大している。特に、Time Use Surveyによる、細かい時間の使い方に関する統計データが整備され、ビッグデータとも呼ばれる詳細な家計購買履歴、さらには携帯電話の異動履歴データは、物理的な移動情報も加味した分析を可能にし

*1 Deaton, A. S. and J. Muellbauer (1980), Economics and consumer Behavior, Cambridge University Press, New York.

ており、家計消費分析の対象は、今日、飛躍的に増加している。

家計消費の分析のもう一つの流れは1980年以降に急速に拡大した動学分析に基づくものである。 Hall(1978)[*2]を嚆矢とする家計消費の動学分析は、標準的なマクロ成長モデルに即し、各時点における消費はマクロ消費として一財であるとされ、その財の異時点間の配分が重要となる。動学分析により、消費と貯蓄の決定が重視され、さらに耐久消費財や缶詰等の保存可能な商品の分析が可能になる。ライフサイクルにおける消費と貯蓄の決定は家計消費分析における最重要テーマの一つであり、動学モデルの進展により、この分野における私たちの知見は急速に書く出している。一方、Deaton and Muellbauer (1980)で強調された、極力一般的な、関数形に強い仮定を課さない、より多くの財・サービスを含めた消費分析、という視点は動学分析ではそれほど重視されておらず、一般性のない、ある特定の扱いやすい関数形への依存が高まっていることは否定できない。

今回の講義シリーズの目標は、1980年代に確立した、Almost Ideal Demand System (AIDS)等の、関数形に強い仮定を課さない、ほぼすべての関数の近似となる多数財の消費分析モデルから、近年の、不確実性下の余暇・貯蓄選択に関する一連の研究について紹介し、その基本的な技術を身に着け応用することである。現在の最先端、家計内在庫や余暇時間配分、ビッグデータの活用など、最先端の家計消費分析に関しても極力触れるよう努力するが、この辺りは急速に進化している分野でもあり、講義の後半で触れることにする。最初の二回の講義ノートは、古典的な消費理論、特に静学分析において1980年代までにStone, Deaton, Diewert達が確立した消費理論について議論する。具体的には、膨大な種類のある商品の中から、どのようにして人々は普段の消費財購入の意思決定を行っているのか、その分析手法について紹介していく。必然的に、その内容はマクロ動学分析ではなく、ミクロの消費理論が中心となる。

2 需要関数の推計

ある商品に対する、特定の個人(家計)の需要関数が存在し、下記のように書けるとしよう。

$$q_i = g_i\left(p, y\right),$$

ただし、pは価格ベクトル、yはその個人の所得である。静学分析とし、さらに所得と価格は所与と仮定しよう。私達の知る経済理論は、g_iにどのような制約を課す、あるいは特

[*2] Hall, Robert, (1978), Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence, Journal of Political Economy, 86, issue 6, p. 971-87, https://EconPapers.repec.org/RePEc:ucp:jpolec:v:86:y:1978:i:6:p:971-87.

長を生み出すだろうか?そして、私たちはその需要関数をどのようにすれば推計できるだろうか? 需要関数の背後にある、効用関数最大化問題を考えてみよう。静学分析なので、効用関数が局所非飽和を満たすなら、所得は全て使い果たすことになるので、効用最大化は下記のように定式化される。

$$\max u\left(q\right)$$
$$s.t.\sum_{i=1}^{N}p_iq_i=y$$

　したがって、予算制約をみたすには、g_iは

$$\sum_{i=1}^{N}p_ig_i\left(p,y\right)=y,$$

を満たさねばならない。予算制約は予算制約は所得と価格に関して一次同次だから、価格と所得に正の定数θを乗じても予算制約は変わらないはずである。したがって、効用最大化問題は予算制約の定数倍をしてもしなくても変わらないため、その解である需要関数もまた不変なはずである。したがって、

$$q_i=g_i(p,y)=g_i(p,y),\quad \text{for all } \theta>0.$$

次に、予算制約式に需要関数を代入したものは、所得と価格に関する恒等式になるので、

$$\sum_{i=1}^{N}p_ig_i(p,y)\equiv y$$

したがって、価格p_kに関する偏微分をとると、

$$g_k\left(p,y\right)+\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial p_k}=0$$
$$\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial y}=1$$

を得る。これを弾力性の形式に書き直すと、

$$\begin{aligned}
\frac{p_k}{p_k}g_k+\sum_{i=1}^{N}\frac{g_i}{g_i}\frac{p_k}{p_k}p_i\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial p_k}&=0\\
\frac{p_k}{p_k}g_k+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ik}\frac{g_i}{p_k}p_i&=0\\
\frac{p_k}{y}g_k+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ik}\frac{g_i}{y}p_i&=0\\
\omega_k+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ik}\omega_i&=0,
\end{aligned}$$

$$\omega_k=\frac{p_k g_k\left(p,y\right)}{y},\varepsilon_{ik}=\frac{p_k}{g_i\left(p,y\right)}\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial p_k}$$

ただし、ω_kはk財への支出シェア、ε_{ik}はk財のi価格の変化に対する価格弾力性である。また、予算制約式の恒等式を所得に関して偏微分し、整理すると、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial y}&=1\\
\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{y}{y}\frac{g_i}{g_i}\frac{\partial g_i\left(p,y\right)}{\partial y}&=1\\
\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{g_i}{y}\varepsilon_{iy}&=1\\
\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{iy}&=1,
\end{aligned}$$

ただし、ε_yはi財所得弾力性である。所得弾力性に関する制約式の意味を考えてみよう。所得弾力性の支出シェアによる加重平均が1、ということは、様々な財の平均的な所得弾力性が1であることを示している。すなわち、ある財の所得弾力性が1より大きければ、必然的に、少なくとも他の一つの財の所得弾力性は1よりも小さくなっている。以上を踏まえたうえで、需要関数に戻ってみよう。

$$q_i=g_i\left(p,y\right)$$

この需要関数の定数項や各種パラメターを推計する際には、内点解を仮定して、

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln y + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{ki} \ln p_k + e_i$$

ただし、ε^*_{ki}は補償需要に関する価格弾力性であり、

$$\varepsilon^*_{ki} = \frac{p_k}{q_i}\frac{\partial h_i}{\partial p_k}.$$

需要関数に代入すると、

$$\begin{aligned}\ln q_i &= \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln y + \sum_{k=1}^{N} \left(\varepsilon^*_{ki} - \omega_k \varepsilon_{iy}\right) \ln p_k + e_i \\ &= \alpha_i + \varepsilon_{iy} \left(\ln y - \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln p_k \right) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^*_{ki} \ln p_k + e_i\end{aligned}$$

ここで、対数価格の支出シェアによる加重平均を物価指数Pとする、すなわち、

$$\ln P = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln p_k,$$

とすると、

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln \left(\frac{y}{P}\right) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^*_{ki} \ln p_k + e_i.$$

この式は、名目所得yを物価水準Pで割ったもの、すなわち実質所得を含んでいる。この実質所得は効用水準とみなすことが可能である。補償需要関数に含まれる効用水準が実質所得として、名目所得を物価で割ることで得られるのである。この式に出てくる価格弾力性は補償需要に関する弾力性であるから、対称性をみたし、かつ、所得効果を含まないため、代替性もしくは補完性が弱い、距離の離れた商品間の弾力性はゼロと仮定することができる。支出シェアは回帰分析を用いずに計算することができるため、物価指数Pは容易に計算可能である。直感的には、所得弾力性を実質所得に対する弾力性とすることで、価格効果を代替効果のみにすることが可能なのである。

3　数量から支出へ

補償需要の価格弾力性を含む需要関数は経済理論に即して結果を解釈することが容易にできる点が魅力であるが、実際にミクロデータを用いて推計する際には、財の数量の情報

が必要になる。数量の情報は、えてして精度が低くなるか、そもそも存在しないケースが多い。スーパーマーケットで販売されている多くの生鮮食料品は、一山いくら、のような形で販売されているし、鮪の刺身にしても、正確なグラムで量り売りしているところは少ない。現代社会の複式簿記には数量の情報がなく、金銭情報のみである。家計簿でも、購入額の情報はあっても、そこに何グラムの魚やニンジンが入っていたか記録する人は少ないだろう。日本の総務省が行っている『家計調査』には数量情報が含まれているが、残念ながらその対象はごく限られた商品のみであり包括的なデータセットになっていない。数量情報が含まれるデータとして代表的なPoint of Sales (POS)データでも、生鮮食料品の数量は多くの場合含まれていない。

数量の情報を真剣に考えていくと、家計消費の分析は極めて困難になる。スーパーマーケットや住宅、車、雑誌、なんでも、商品単位となると非常に細かく分類されている。パスタをとっても、メーカーによって、グラム数によって、太さによって異なる商品となる。厳密に数量を考えると、特定の商品の数量となるが、小さなスーパーマーケットでも、取扱商品は数千種類に上るだろう。ある特定の商品を、特定の個人が購入する確率は限りなくゼロに近くなってしまう。また、そのような商品の数量単位の家計別データは、HomescanやPersonalscanのような、スキャナーを用いたデータでもない限り収集は極めて困難になるし、またスキャナーを用いる場合でも、スキャンし忘れや、家計の他の構成員による購入等によりスキャンされない商品の購買、すなわち欠損値の影響が残ってしまう。

異なる商品であるため、数量として合算することができなくても、支出あるいは売上高であれば容易に合算可能である。そして、もしも、同一ではなくともよく似た商品への支出と、全く異なる財への支出が異なるメカニズムで決定されていれば、個別商品の数量ではなく、集合財への支出額をモデル化することはできないだろうか?ここで重要な役割を発揮するのが、効用関数の分離可能性という仮定である。

4 分離可能性

Deaton and Muellbauer (1980)に従い、6財に依存する効用関数を考えてみよう。すなわち、下記のような効用関数を考える。

$$u = v\left(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\right)$$

ここで、例えば、q_1はシリアル、q_2は肉、q_3は家賃、q_4は燃料、q_5はテレビ観戦、q_6はスポーツ、としよう。これら六種類の商品は、さらに、食料、住宅関連、余暇、という三種

類のカテゴリーに分類できる。この時、消費者が次のような二段階の消費決定をすると考えてみよう。まず、消費者は様々な商品の価格を観察する。肉、シリアル、家賃、燃料、それぞれの価格である。第一段階では、自分の所得のうち、どれだけを三種類のカテゴリー、食料、住宅関連、そして余暇に使うか、その割合を決定する。そして、第二段階では、食料全体への支出額をもとに、肉とシリアルをそれぞれどの程度購入するか決定する。肉とシリアルの消費量を決定する際には、住宅関連や余暇のような、食料グループに属さない財・サービスの価格や総所得は考えない。あくまで、第一段階で決定した食料への支出予定総額と、各食料品の価格をもとに最適な食料消費を決定するのである。このような二段階の消費決定を可能にするのは、消費者の選好が弱分離可能(Weakly Separable)のときである。選好が弱分離可能の定義は色々あるが、理解しやすいのは、効用関数が下記のように書くことが可能な時である。

$$u = v\left(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\right) = f\left[v_F\left(q_1, q_2\right), v_S\left(q_3, q_4\right), v_E\left(q_5, q_6\right)\right],$$

ただし、fは単調増加関数であり、v_IはグループIに属する財への効用関数である。v_Iは、さらに弱分離可能なようなサブグループに分けることで、三段階以上の消費決定モデルにすることも可能である。この、選好の分離可能性は、消費理論の根幹をなす仮定である。食料消費を考えよう。もしも食料が他の財と弱分離可能であれば、食料への支出総額は第一段階で決定される。その支出額をY_Fとすると、食料グループに所属する財の数量は、食料に属する商品の価格ベクトルp_FとY_Fに依存する関数として書くことが可能である。次に、食料の中で、パスタが他の食料から分離可能であれば、パスタへの総支出額がまず決定され、その総支出額を所与にし、様々なパスタの購入数量が決定される。マーケティングの世界では個別商品への需要が分析の主要課題であろうが、経済学の場合は、特定のパスタブランドへの需要よりも、パスタというグループへの需要に関心がある場合が多いだろう。パスタ、という商品グループを考え、それ以上の分割はせずにパスタへの需要全体をモデルで定式化できればとても便利である。ただし、パスタへの総支出額は、各パスタの商品単位の価格のベクトルに依存してしまうことに注意が必要である。第一段階で、商品グループへの支出額を決定する際には、他の商品グループも含む、「全て」の商品に関する価格の情報が必要となっているのである。ここで、v_Iはホモセティック、すなわち一次同次(厳密には一次同次関数の単調増加変換)としよう。すると、第一段階での支出額が決定された後は、各グループへの支出額とグループに属する価格のみの関数として各需要関数を書くことが可能になる。それらの需要関数を代入すると、間接効用関数は

$$u = f\left[v_F\left(q_1\left(p_{1,}p_2, Y_F\right), q_2\left(p_{1,}p_2, Y_F\right)\right), v_S\left(\right), v_E\left(q_5\left(p_5, p_6, Y_E\right), q_6\left(p_5, p_6, Y_E\right)\right)\right]$$

と書くことが可能である。各グループで考えると、選好がホモセティックの時の支出関数は効用水準に関して線形だったので、

$$E_F\left(p_1, p_2, u_F\right) = u_F \times E_F\left(p_1, p_2, 1\right)$$

したがって、間接効用は

$$E_F\left(p_1, p_2, u_F\right) = u_F \times E_F\left(p_1, p_2, 1\right)$$

この右辺は、グループ支出で基準化されたグループ価格の価格指数の逆数と解釈可能である。支出関数の形状がわかれば、そこから各財価格を集計し、あたかも一つの価格、すなわちグループ物価指数を作成することが可能になる。物価指数を

$$E_F\left(p_1, p_2, u_F\right) = u_F \times E_F\left(p_1, p_2, 1\right)$$

と定義し、数量指数を

$$E_F\left(p_1, p_2, u_F\right) = u_F \times E_F\left(p_1, p_2, 1\right)$$

と定義すると、当然ながら、

$$E_F\left(p_1, p_2, u_F\right) = u_F \times E_F\left(p_1, p_2, 1\right)$$

となる。すなわち、効用関数が弱分離可能で、かつ、各グループの効用関数がホモセティックであれば、各グループへの集合財を考え、それに対応する物価指数を作成し、あたかも、グループ全体を一つの財とみなした集合財に関する効用最大化問題として家計の最大化問題を定式化可能になる。無論、サブグループの効用関数がホモセティックであるというのは強い仮定であり、所得が変化しても、各財の消費割合が不変、すなわち各財の所得弾力性が1である必要があるが、これは非常に強い仮定である。実際には、多くの研究ではここまで細かく考えず、各グループ内の価格を同一と考え、グループ単位の価格と各グループへの支出額を計算単位として考えることが多い。また、同一グループに属するすべての財価格の変動が同じであれば、著しく分析を簡素化できる。これは、後に、Composite Commodity Theoremの節で触れる。

選好の分離可能性は、マクロ経済学にとっても極めて重要である。異時点間の消費や、余暇・消費の間は分離可能と仮定されることが非常に多い。分離可能性の仮定がなければ、多くのマクロモデルはお手上げとなる。また、多様な財・サービスへの需要関数を推

計する場合でも、分離可能性は非常に重要な役割を果たしており、この仮定なしに消費関数の推計は不可能に近い。したがって、分離可能性が現実の消費者行動と整合的であるか否か、半世紀にわたり、無数の実証分析が行われてきた。しかしながら、いまだ、効用が食料やその他や、さらに細かい、肉と果物が弱分離可能か否かについて等、基本的な性質について同意が得られているとは言えない状況にある。分離可能性を所与とした研究は現在の消費研究、異時点間でもクロスセクションでも、標準ではあるが、それを統計的に検証しようとすると、非常に難しいのが現状であり、今日でも多くの研究がなされている。次に、分離可能性の検証法に関して考察してみよう。

4.1 分離可能性の検証

選好が弱分離可能であるとき、需要関数にはどのような制約が課されるだろうか?効用関数が異なる財グループGとHに関して弱分離可能と仮定しよう。$i \in G, j \in H \quad (G \neq H)$とする。すると、$H$に属するある財の価格$p_j$の変化が$G$に属する財の補償需要に対して与える影響は

$$s_{ij} = \left.\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const}$$

代替効果は対称だから、

$$s_{ji} = \left.\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}\frac{\partial Y_H}{\partial p_i}\right|_{u=const} = s_{ij}$$

したがって、

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} = \left.\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}\frac{\partial Y_H}{\partial p_i}\right|_{u=const}$$
$$\left.\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\Big/\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}\right|_{u=const} = \left.\frac{\partial Y_H}{\partial p_i}\Big/\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\right|_{u=const}$$

この左辺はiに依存せず、右辺はjに依存していない[*3]。したがって、両辺ともiとjに依存していないことになる。それを$_{GH}$と書き、整理すると、

$$\left.\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} = \lambda_{GH}\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}$$

[*3] このDeaton and Muellbauer (1980)による証明方法には問題があるように思われる。この定理の最初の証明はGoldman and Uzawa (1964) "A note on separability in demand analysis," Econometrica, 32, pp. 387-398.であるが、そこでは縁付きヘシアンを用いた、より複雑な証明が行われている。

となる。総支出と各グループへの支出の関係に書き直すと、

$$
\begin{aligned}
s_{ij} &= \left.\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} \\
&= \lambda_{GH}\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial q_j}{\partial Y_H} \\
&= \mu_{GH}\frac{\partial q_i}{\partial Y}\frac{\partial q_j}{\partial Y}
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\mu_{GH}\frac{\partial Y_G}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \lambda_{GH}
$$

この関係は、効用関数の弱分離性の必要十分条件になっていることが知られている(Gorman (1971)) [*4]。すなわち、二つの異なる財グループが弱分離しているかどうかは、片方の価格変化に対するもう一方の財の補償需要の代替効果が同一財グループ内ですべて同じであり、所得効果を用いた公式で表すことが可能であるか否かを検証すればよいことになる。ここで、需要関数の形状が、先に紹介したような

$$
\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy}\ln\left(\frac{y}{P}\right) + \sum_{k=1}^{N}\varepsilon^*_{ki}\ln p_k + e_i.
$$

の形状をとっていると仮定しよう。すると、異なる財グループ間の代替効果はこの式から容易に求めることが可能であり、代替効果の同一グループ内での同一性という係数制約に関する χ^2検定を行えばよい[*5]。さらに一般的な需要関数のクラスを用い推計する研究もあり、現在でも食料支出の分析などで頻繁に、パラメトリックな需要関数を特定した上で検証している研究は発表されている。しかしながら、対数線形や二次関数で近似した需要関数は、あくまでも真の需要関数に対する局所的な近似であり、これをグローバルな需要関数とみなすことには相当の無理がある。例えば、トランスログ等の多くのパラメターを有する需要関数は局所的には、観察不能な真の需要関数のとても良い近似になっている。しかし、グローバルな視点からは非常に強い制約を課した需要関数になっているのである。一方、大域的な需要関数の形状を知るためには、非常に多くの観察値が必要になる。

[*4] W.M. Gorman (1971), "Two Stage Budgeting," unpublished paper, London School of Economics, Dept. of Economics.だが、これは未刊行論文である。論文の中身はW. M. Gorman, C. Blackorby, and A. F. Shorrocks ed. (1996)Separability and Aggregation: The Collected Works of W. M. Gorman, Volume I Oxford Scholarship Online: November 2003で読むことができる。

[*5] Nayaga, R.M and O Capps (1994) "Tests on Weak Separability in Dissaggregated Meat Products," American Journal of Agricultural Economics, Vol. 76, No. 4. 800-808.等

需要関数は価格と所得の関数であり、その形状を知るには、理想的には、定義域に属するすべての価格と所得に関する情報がなければならないが、そのようなデータはまず存在しない [6]。

1983年にHal Varianが発表した論文[7]は、この分野のBreakthroughとなった。Varian (1983)は顕示選好を用い、ノンパラメトリックに検証することを提案している。これは非常に重要な研究なので、スペースをとって紹介しよう。

Varianの手法は、古典的な消費者理論に依拠している。まず、価格と消費に関するデータがあると仮定する。この価格と消費のデータがどのような性質を持つとき、それは、合理的な消費行動と整合的になるだろうか?この、データから選好関係を推測するアプローチとしてはSamuelsonの顕示選好の弱公準が有名であるが、それだと推移性を確保できない。弱公準に変わり、主要な役割を演じるのは、Generalized Weak Axiom of Revealed Preference (GARP)と呼ばれる公理である。$(p_x, x)\,(p_y, y)$ (p_{xi}, x_i) のような、観察された価格と消費量のベクトルのペアがあるとしよう。$p_x x \geq p_x y$のとき、すなわち、xが選択された価格ベクトルp_xの下でyが購入可能であり、しかしyは選択されずxが選択されていた時、$xR^D y$と書き、xはyよりも直接弱顕示選好される、と定義する。このとき、消費者の行動原理として、下記の仮定(公準)は特に有名なものである。

1.顕示選好の直接弱公準(WARP)： $xR^D y$、かつ$x \neq y$のとき、yがxよりも直接弱顕示選好されることはない。

データが顕示選好の直接弱公準を満たしているか否かを調べることは容易である。実際の支出額および価格ベクトルを入れ替えた仮想的な支出額の大小を比較すればよい。さて、このような、WARPをxの系列$(x, x, ..., x_n)$に対して調べることが出来た、としょう。そして、$xR^D x_1, x_1 R^D x_2, ..., x_n R^D y$という関係があった、とする。すなわち、$y$に対して$x$は間接的に弱顕示選好されていることになる。このとき、、yに対してxは顕示選好される、と定義し、これをxRyと書く。

2.顕示選好の強公準(SARP): xRyが成立し、かつ、$x \neq y$のとき、 yRxは成立しない。

[6] 1970年代半ばころまでの、分離可能性理論研究の到達点であるBalckorby, C., D. Primont, and R.R. Russel (1978) Duality, Separability, ad Functional Structure: Theory and Economic Applications, North Holland. は現在でも一読の価値はある。

[7] H.Varian (1983) "Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour," The Review of Economic Studies, Vol. 50, No. 1. 99-110.

顕示選好の強公準を仮定することにより選好関係(効用関数)に推移性が成立する。したがって、ある消費と価格ベクトルが顕示選好の強公準を満たす場合、それは合理的な選好関係の結果とみなすことが可能である。すなわち、顕示選好の強公準により、合理的意思決定がされていることがわかる。観察された数量・価格ベクトルの組み合わせが顕示選好の強公準を満たしているか否かを調べるには、xとyが間接的に顕示選好されるような数量と価格ベクトルが観察値の中になければばならない。観察値を順列組み合わせでしらみつぶしに調べていくことになるが、時間を短縮するアルゴリズムとしてワーシャル–フロイド法（Floyd–Warshall Algorithm）が頻繁に用いられている。

次に、予算制約に関して、厳密な不等号が成立している状況を考える。

$p_x x > p_x y$のとき、xはyに厳密に直接顕示選好される、と定義する。

以上の準備から、下記の公準に関して議論することが出来る。

3.一般化顕示選好の公準(GARP): xRyならば、yがxよりも厳密に直接顕示選好されることはない。

GARPは、Afriat (1967) [*8] による有名な定理で重要な役割を果たす。次の3つの性質を考えよう。

(1)データがGARPを満たす。
(2)連続、単調、凹性、局所非飽和を満たす効用関数が存在し、その最大化行動として消費と価格ベクトルのデータを解釈可能である。
(3)観察された財と価格の組み合わせ(サンプルサイズ)がnであれば、Afriatの不等式と呼ばれる下記の不等式をみたすようなU^i,λ^i, $(i = 1, 2, ..., n)$が存在する。

$$U^i \leq U^j + \lambda^j p_j (x_i - x_j) \quad \text{for } i, j = 1, 2, ..., n.$$

Afritaの不等式に出てくるλ^jは、効用最大化の、予算制約に付されるクーンタッカー乗数と考えられる。その直観は、下記の一階条件を考えることで明らかである。効用水準が

[*8] Afriat (1967) "The Construction of a Utility Function from Expenditure Data," International Economic Review, 8. 67-77.

飽和しておらず、かつ効用関数が微分可能であれば、

$$u(x^i) \leq u(x^j) + Du(x^i)(x^j - x^i)$$
$$Du^{x^{ij}} = \lambda^j p_j$$

以上の二式から

$$u(x^j) \leq u(x^j) + \lambda^j (x^j - x^i)$$

を得ること可能である。 Afriatの定理により、これら(1)-(3)は同値であることが知られてい。証明は省くが、GARPは、凹、連続、単調性、局所非飽和を満たす効用関数が存在することと同値なのである。なお、WARPは財が三種類以上あるときには効用関数の存在の必要十分条件とならない。またSARPは一つの価格ベクトルに対し、複数の最適な消費ベクトルが存在する時に対応できない。その点GARPは、複数の最適消費ベクトルが存在する、多数の消費財に対応した、合理的意思選択の存在の必要十分条件となるのである。(3)は線形計画法で解くことが可能であり[*9]、(2)はGARPの検証をFloyd–Warshall Algorithm等のネットワーク理論を用いて行うことになる[*10]。

さて、選好がxとzに関して弱分離可能なとき、効用関数は下記のように書くことが可能である。

$$u\,(x, z) = h\,(x, v\,(z))$$

私たちは、観察されたデータがこの形状の効用関数の最大化問題の解とみなすことが可能であるための必要十分条件を知りたい。まず、観察されたデータ全体がGARPを満たさねばならないことは明らかである。次に、$v(z)$という効用関数が存在するためにはzに関してもGARPが成立しなければならない。消費ベクトルzに対応する価格ベクトルをqと書くことにしよう。すると、u, h, vという三つの関数全てが凹であるためには、、様々な状況、i, jに対して、下記が成立する必要がある。

[*9] 線形計画法による解法に関しては、W.E Diewert and C Parkan (1985) "Tests for the consistency of consumer data,"Journal of Econometrics, Volume 30, Issues 1–2,Pages 127-147を参照されたい。

[*10] Floyd-Warshallのアルゴリズムに関してはVarian, H. R. (1982). The Nonparametric Approach to Demand Analysis. Econometrica, 50(4), 945–973. https://doi.org/10.2307/1912771が、実際にGARPに応用し、丁寧に説明している。

$$
\begin{aligned}
u\left(x^i,z^i\right) &\le u\left(x^j,z^j\right)+\lambda^j p^j\left(x^i-x^j\right)+\lambda^j q^j\left(z^i-z^j\right)\\
h^i\left(x^i,v^i\right) &\le h^i\left(x^i,v^j\right)+\lambda^j p^j\left(x^i-x^j\right)+\rho^j\left(v^i-v^j\right)\\
v\left(y_i\right) &\le v\left(y_j\right)+\mu^j q^j\left(z^i-z^j\right)
\end{aligned}
$$

ところで、zに属する任意の財$z_{(l)}$について、観察値jにおいて微分をとると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z_{(l)}} &= \lambda^j q^j\\
\frac{\partial u}{\partial z_{(l)}} &= \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z_{(l)}} = \rho^j \mu_j q^j
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\rho^j = \frac{\lambda^j}{\mu^j}
$$

これは、

$$
h\left(x^i,v^i\right) \le u\left(x^i,v^j\right)+\lambda^j p^j\left(x^i-x^j\right)+\frac{\lambda^j}{\mu^j}\left(v^i-v^j\right)
$$

を意味する。Varian (1983)は下記の三種類の性質が同値であることを証明している。

(1)下記のAfriatの不等式をみたす$U^i,\lambda^i,V^i,\mu^i \quad (i=1,2,...,n)$が存在する、

$$
\begin{aligned}
&U^i \le U^j+\lambda^j p^j\left(x^i-x^j\right)+\frac{\lambda^j}{\mu^j}\left(V^i-V^j\right)\\
&V^i \le V^j+\mu^j q^j\left(z^i-z^j\right) \quad \text{for } i,j=1,2,...,n.
\end{aligned}
$$

(2)　$\left(q^i,z^i\right)$と$\left(\left(p^i,1/\mu^i\right),\left(x^i,V^i\right)\right)$はAfriatの不等式をみたすような$\left(V^i,\mu^i\right)$を適当に選択することでGARPをみたす、

(3)弱分離可能で、凹、単調、連続、局所非飽和をみたす効用関数が存在し、その最適化行動の結果としてデータを再現可能である。

この必要十分条件に基づいてデータが弱分離可能であるか検証するにはどうすればよいだろうか?選択肢は(1)と(2)の二つである。(1)を用いる場合、観察されたデータの

中から任意の二つをもってきて、それらが常に、財ベクトル全体と、一部のサブセットにAfriatの不等式をみたすような$U^i, \lambda^i, V^i, \mu^i$を見つける必要がある。

(2)は、一つのサブ効用関数でまとめられる財グループの消費ベクトル、z^iを一つの数量指数V^iでまとめ、$1/\mu^i$をV^iに対応する価格とみなし、グループ内でGARPを満たすかどうかを判定するものである。

具体的には、まず、全体の価格と数量のベクトルがGARPを満たすか否か検証する。次に$v(z)$の合理性の検証として、zとそれに対応する価格がGARPを満たすか否かを検証する。問題は、$v(z)$を一つの数量とみなし、xと$v(z)$の間の合理性を検証する所である。ここでは、V^iを効用水準、あるいは数量(指数)、$1/\mu^i$をV^iに対応する価格と考える。私達は、それらに関する先験的情報を持たない。Varianが用意したアルゴリズムでは、ある適当な二つの正の数値(例えば物価・数量指数)をとってきて、同一グループに属する商品の数量と価格に関してAfriatの不等式をみたすことを確認したうえで、そのもとで、財グループ内でGARPが成立するかどうか判定している。もしも適当にとった指数のもとでデータがzのグループ内、およびグループ財の数量と価格ベクトルを一つの正の実数値、すなわち指数で表したものと他の財がGARPを満たしているのであれば、データは弱分離可能と整合的である。しかしながら、ある指数の下でGARPをみたしていなくとも、それは必ずしも弱分離可能性と矛盾しているとは言えない。採用した指数が間違っている可能性があるためである。実際、Varianが開発したアルゴリズムでは、コブダグラス型の効用関数からシミュレートされたデータですら、弱分離可能性を棄却してしまうという指摘をBarnett and Choi (1989)が行っている[*11]。Fleissig and Whitney (2003)は、物価・数量指数としてTörnqvist indexを用い、かつ、線形計画法を用いることで(1)の検証が可能であることを示し、かつ、Varianのアルゴリズムよりも信頼性が高くなることを見出している[*12]。

Hjerstrand (2009)は、弱分離可能性検証に関する様々なノンパラメトリック検定の結果をまとめ、各手法の利点と問題点を整理している[*13]。近年、Cherchye et al.(2015)は、GARPの判定にIndicator Functionが使われており、混合整数線形計画法(Mixed Integer Linear Programming)の問題に変換することが可能であることを指摘した。そして、

[*11] W. Barnett and S. Choi (1989) "A Monte Carlo Study of Tests of Blockwise Weak Separability," Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 7, No. 3, 363-377.

[*12] Fleissig, A., Whitney, G. A. (2003) "A new PC-based test for Varian's weak separability condition," Journal of Business and Economic Statistics 21, 133–145.

[*13] Hjerstrand, P., (2009) Measurement Error: Consequences, Applications and Solutions. Emerald Group Publishing Ltd, Ch. "A Monte Carlo Study of the Necessary and Sufficient Conditions for Weak Separability," pp. 151-182.

Afiratの不等式を用いず(すなわち凹性を仮定しない)に高弱分離可能性を検証する手法を開発し、大幅に計算時間を短縮し、かつ精度の高いアルゴリズムのになるとしている[14]。さらに、Hjertstrand et al. (2021)は代表的な指数算式とAfriatの計算の関係について考察しておいる[15]。

分離可能性の検証は消費行動の実証分析の基本でありながら、近年になりようやく実行可能かつ十分な検出力を有する統計分析手法が開発された状態にある。この分析は急速に進展しており、面倒なGARP検定に関する便利なRのコードも提供されている[16]。例えば、日本では佐藤(2021)が、乳製品のPoint of Salesデータ(POS)データを用いたノンパラメトリック検証を行い、分離可能性を棄却する結果を得ている。

4.2 GARP推計の実際

実際にGAPRを検証する際、一つでも観察値がエラーが存在すると、そのエラーのために合理性や分離可能性を棄却してしまう可能性がある。Afriat (1973)は、合理性の定義を緩め、ある正の値をとる効率性指標、$e \in (0,1]$を導入する。そして、下記が成立する時、観察されたデータ、x', p'は効率性指標eの下で合理化可能(rationalizable)と定義した。

$$U(x') \geq U(x) \qquad \text{for any } x \in \left\{x \in R^N{}_+ p' \cdot x \leq e p' \cdot x\right\}$$

$e = 1$のとき、これは通常の合理性の定義と同じである。$e < 1$の時に対応するGARPをeGARPと名付けている。幸い、eGARPを計算することは容易であり、便利なSTATAやMATLABのコードが利用可能である。

国際連合が作成している購買力平価のデータには、各国の様々な商品の支出と価格水準の情報が含まれている。そこに含まれている174カ国のデータを用い、12の消費カテゴリーに関してGARPを計算すると58の国のコンビネーション($174 \times 173 = 30102$)がGARPに反しており、その数はごくわずかである。一方、その効率化指標は0.9683であり、1から大きく乖離してる。ユーロ国に限定すると、GARPからの乖離

[14] Laurens Cherchye, Thomas Demuynck, Bram De Rock (2015) "Revealed preference tests for weak separability: An integer programming approach," Journal of Econometrics, Volume 186, Issue 1, 2015, Pages 129-141, ISSN 0304-4076.

[15] Hjertstrand, P., Swofford, J., and Whitney, G. (2021). INDEX NUMBERS AND REVEALED PREFERENCE RANKINGS. Macroeconomic Dynamics, 25(1), 81-99.

[16] Julien Boelaertによるコードは下記のリンクで入手可能である。 https://cran.r-project.org/web/packages/revealedPrefs/revealedPrefs.pdf

は4/1035となり、効率化係数は0.9961386となり、ほとんど1と変わらない。また、174ヵ国であっても、詳細な108カテゴリーのデータを用いると、GARPに反するのはわずか二つとなり、効率化係数も0.997となる。以上の結果は、選好が著しく異なると思われる国間のデータを用いても、GARPの検証ではその選好の相違を捉えることが困難であることを示唆している。174カ国の中には、インドやサウジアラビアなどのヒンズー・イスラム圏が含まれており、それらの国ではアルコールや牛肉・豚肉の数量はゼロになっている。一方、価格に関しては無限大ではなく、ある有限の値が入っており、そうした国々と、アルコール消費や牛肉・豚肉を多量に消費する国の選好を同一とみなし、その時の消費・価格ベクトルが合理性を満たすとする結果は、納得することが困難である。また、国の数が多いほど、また財の数が多いほど棄却しにくくなる、すなわちPowerが小さくなっていくことも伺うことができる。

Blundell et al. (2003) は予算制約式のシフトが著しいとき、GARPはPowerを失うと指摘している[*17]。GARPのPowerに関しては多く研究が進行中であり、便利なSTATA, MATLABのコードも出ているが、その使い方および解釈には注意が必要である。すなわち、GARPでは、合理的意思決定を反映しているシミュレーションデータを棄却してしまったり、あるいは明らかに同一の選好ではないような消費・価格ベクトルの組み合わせを合理的意思決定と整合的である、と判定してしまうことも多く、その使い方には十分に注意する必要がある。

実際にGARPを観察データに応用する場合に直面する問題は、数量がゼロのケースの扱いである。商品別の取引データ(POSのように)を用いると、商品が入れ替わることにより、数量がゼロ、価格は欠損、という事態が頻繁に生じる。また、新型コロナ禍における海外旅行やスポーツ観戦のように、そもそも商品が供給れされていない事態も生じる。そのようなときに、GARPはどう計算可能であろうか?商品が供給されていない時の価格を仮に非常に大きな値、無限大のような値を設定すると、仮想的な支出額も無限大になってしまい、GARPの計算に適さない。したがって、全ての商品が正の値で購入されているデータに限定する必要がある。さらに、例えば家計単位で細かい消費カテゴリーで情報がある場合でも、ある家計は一か月全く肉を買っていない、あるいは旅行に行っていないことは十分起こりうる。このような時にもGARPを使うことは困難である。ゼロ消費は、現実のデータでは頻繁に生じるが、それに対応するミクロ経済理論、すなわちコーナー階の扱いは、その消費がゼロになっている理由が需要要因なのか供給要因なのかによりその

[*17] Blundell, Richard W., Martin Browning, and Ian A. Crawford (2003): “Nonparametric Engel Curves and Revealed Preference,” Econometrica, 71, 208–240.

理論的含意は全く異なるものになる。GARPを用いる場合は、選好が変化せず、商品が全て消費されていると想定される状況に、現在のところは限定されている。

5 Generalized Composite Commodity Theorem (GCCT): Lewbel (1996)

弱分離可能性を仮定せずに、ある消費財グループを集合財としてみなすことを正当化する、古典的な理論が存在する。Hicks-Leontief のComposite Commodity Theorem と呼ばれるものであり、ある財グループの価格の変動が完全に連動していれば、そのような財は一つの集合財とみなすことが可能である、というものである。もしも二つの財の価格の変動が完全に連動しており、価格変化率が一致しているなら、それらの財の価格は初期の相対価格がそのまま維持されることになる。初期の相対価格は固定されているからパラメターとみなすことができる。すると、時系列データを用いた消費分析を行う場合、共通の財価格の変化率を価格の代理変数として用い、初期の相対価格をパラメターとみなすことで失う情報は何もない。もっとも、グループに属するすべての価格が完全に比例している、という仮定は非常に強く、簡単に棄却されてしまう。この、極端に非現実的と考えられていた定理は、Lewbel (1996)により再び注目されることになる [*18]。Lewbel (1996)により一般化され、より現実的となった、Generalized Composite Commodity Theorem (GCCT)を紹介しよう。p_i : i財の価格、P_I : Iグループの財価格の価格指数、とし、

$$r_i = \ln p_i, R_I = \ln P_I$$
$$\rho_i = \ln (p_i/P_i) = r_i - R_I$$

すなわち、相対価格とする。また、$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}$をベクトルとする。また、$i$財価格の支出シェアは、$z$を支出総額とすると、

$$w_i = g_i (\boldsymbol{r}, z) + e_i$$

と書けるとしよう。ただし、$g (\boldsymbol{r}, z)$は通常のマーシャルの需要関数から得られるi財の支出シェアであり、それに誤差項が付加されている。また、$E (e_i | \boldsymbol{r}, z) = 0$、すなわち、誤差項の平均はゼロとする。ここで、Lewbel (1996)は、需要関数が合理的な意思決定の下で生成されており、かつ、ρがR,zから独立であると仮定する。Hicksの定理では、ρは一

*18 Lewbel, A. (1996). ”Aggregation Without Separability: A General-ized Composite Commodity Theorem.” The American Economic Review 86(3): 524-543

定と仮定されていたが、ここではρは一定である必要はなく、支出総額や一般物価から独立であると仮定されている。そこで、集合財需要を下記のように作成する。

$$G_I^*(\boldsymbol{r},z) = \sum_{i\in I} g_i(\boldsymbol{r},z)$$

) 定義する。すなわち、財グループに関する支出シェアの和である。ここで、

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}$$

と定義し、さらに、財グループの支出シェアの平均値、

$$G_I(\boldsymbol{R},z) = \int G_I^*(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho},z)\, dF(\boldsymbol{\rho})$$

と定義する。すると、$G_I(R,z)$は、グループを足し合わせる、すなわち、$I = 1,2,3..,M$を全て足し合わせると1になり、価格と所得に関するゼロ次同次性をみたす。さらに、異なる財グループ、IとJの間で、支出総額が変化したときの、I財への支出シェアの変化とJ財の支出シェアとの共分散、すなわち、

$$H_{IJ} = Cov\left[\frac{\partial G_I^*(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho},z)}{\partial z}, G_J^*(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho},z)\,|\boldsymbol{R},z\right]$$

とし、H_{IJ}をIJ成分とする正方行列を$\boldsymbol{H}$とする。すると、$\boldsymbol{H}$が対称行列であることと、$G_I(\boldsymbol{R},z)$がスルツキーの対称性を満たすこと、は同値となる。

この意味することは、グループ内の相対価格の変動がランダムであり、物価水準や所得と相関がない限り、グループへの総消費を一つの集合財とみなすことが可能である、ということである。これは非常に魅力的な理論であり、農業経済学、資源経済学等、様々な応用分野において近年頻繁に用いられている[*19]。

[*19] Lee L. Schulz, Ted C. Schroeder, and Tian Xia, (2012) "Studying composite demand using scanner data: the case of ground beef in the US," Agricultural Economics, vol. 43, pages 49-57,等。