

2016年応用マクロ経済学 指数理論(9)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 29 年 1 月 9 日

概 要

Superlative Index

1 Superlative Index

Fisher (1922) 以降、物価指数理論は Frisch や Törnqvist 達による拡張の後、70 年代に Eichhorn と Voeller 等の数学者達の参入により公理体系の数学構造はほぼ明らかになった。一方経済学的アプローチと公理アプローチの間の溝は大きく、両者とも物価指数の学術研究でありながら、ほぼ別個の分野ともいえる状況であった。指数を作成する各国の統計局にしてみれば、数量と価格を計測し、それらから指数を作成する際、強い仮定を必要とし、どの程度現実在即しているか不明な経済理論に依拠する必然性がない。それよりは、より多くの公理をみたす指数の選択を望むのは自然である。一方、経済学者にとっては、大量の個別商品価格の動向を一次元の実数で描写する時、たとえ強い仮定がおかれていたとしても、理論的根拠がなければ作成された指数の解釈はできないと考えるのももっともである。Diewert (1976)¹による Superlative Index (最良指数) は、公理的アプローチと経済学的アプローチを統合するものであり、Samuelson (1983)²曰く、Samuelson の「経済分析の基礎」が出版された 1947 年から 35 年間の間で生じた指数理論の唯一最大の進展である。Superlative Index は現在の指数理論において中心的役割を果たしており、Boskin Report も Superlative Index の採用を提唱していた。

経済学的アプローチに従い COLI を計測するには、効用関数、あるいは支出関数の関数形を特定する必要があり、そのためには弾力性などの推計が必要となる。Sato-Vartira 指数は、商品の種類が一定の時にはパラメータ推計が

¹Diewert, W. Erwin (1976), "Exact and Superlative Index Numbers", *Journal of Econometrics* 4: 115-145.

²Samuelson, Paul A. (1983), *Foundations of Economic Analysis. Enlarged Edition*, Cambridge, MA and London, England, Harvard University Press, 1983.

不要となるが、そのかわりに商品間の代替の弾力性が同一と仮定する必要がある。Diewert の Superlative Index は、需要関数の推計など、効用関数の特定をせずに経済学的に「正しい」COLI の近似として、いくつかの伝統的な物価指数を用いることが可能である、とするものであり、具体的には Fisher、Walsh、及び Törnqvist 指数が Superlative Index になる。前の講義ノートで示したように、これら三つの物価指数は、ある仮定をおいた効用関数や支出関数の下で COLI となる。問題は、その効用関数や支出関数に対してどの程度強い仮定が課されていたか、である。Diewert は、物価指数が、(1) ある関数のもとで正確な COLI となり、(2) その関数が十分な数のパラメーターがあり、任意の関数に対して、二階の近似になる柔軟さ (Flexible) を有しているもの、を Superlative Index と呼んだ。支出関数の一階微分は需要・供給量であり、さらにその微分は価格弾力性を示している。すなわち、二つの関数が二階まで一致していれば、需要・供給量およびそれらの価格弾力性まで一致することになり、経済学の多くの分析では十分な精度での近似と考えることが可能であろう。三階微分までの一致性を要求する状況はかなり少ないと思われる。

本講義ノートでは、Superlative Index の特徴とそれにまつわる議論を紹介する。

2 Flexible Function

Superlative Index の定義で重要な役割を果たすのは、関数が Flexible である、ということである。ここでは関数の柔軟性、Flexibility について議論する。

二つの関数 f と $f^* : \mathbf{R}_{++}^n \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ を考える。どちらも二階の微分可能性を仮定すると、両者の二階の近似が一致するためには、 $x^* \in \mathbf{R}_{++}^n$ において、

$$f(x^*) = f^*(x^*) \quad (1)$$

$$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*) \quad (2)$$

$$\nabla^2 f(x^*) = \nabla^2 f^*(x^*) \quad (3)$$

である。各条件で課される方程式の数は、(1) は 1 つ。(2) は n 次元なので n 個。(3) は $n \times n$ なので n^2 である。ここで、さらに f と f^* のいずれも二階の連続微分可能性を仮定すると Young の定理が成立するため、 $\nabla^2 f(x^*)$ は対称行列になる。したがって、 $n \times n$ 行列であることを考慮すると、(3) の制約の数は、 $n(n+1)/2$ である。したがって、制約の数は全部で $1 + n + n(n+1)/2$ である。

例えば、

$$f(x) = a_0 + a'x + \frac{1}{2}x'Ax \quad (4)$$

という関数 $f(x)$ を考えれば、自由なパラメーターの数は $1 + n + n(n+1)/2$ となる。具体的な対応は、(1)-(3) を実際に計算することにより、

$$\begin{aligned} a_0 + a'x^* + \frac{1}{2}x^{*'}Ax^* &= f^*(x^*) \\ a + Ax^* &= \nabla f^*(x^*) \\ A &= \nabla^2 f^*(x^*) \end{aligned}$$

とすれば、 A, a, a_0 をえることが可能である。すなわち、任意の二階連続微分可能な関数 $f^*(x)$ は、(4) で定義された関数 $f(x)$ により、二階まで近似可能となっている。

経済学では、 $f^*(x)$ は任意ではなく、一次同次性を仮定することがある。例えば、支出関数や費用関数は、価格に関する一次同次性を通常満たす。支出関数を用いて COLI を計算する場合、全ての二階連続微分可能な関数を考える必要はなく、あくまで二階連続可能な一次同次関数の中に限定することが可能である。すなわち、関数 $f(x)$ が近似せねばならない関数の範囲を狭くすることが可能である。ところが、一次同次性をみたく関数を二階まで近似する関数 $f(x)$ をを見つけることはそれほど自明ではない。例えば、(4) で一次同次性を課すと

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, A = 0 \\ f(x) &= a'x \end{aligned}$$

となってしまうが、これだと (3) も (1) も満たさなくなる。すなわち、(4) の形では経済学上意味のある近似にはならないのである。

関数 $f^*(x)$ が一次同次であるとき、一階、および二階の微係数については、下記の制約を課することができる。すなわち、任意の $x \in \mathbf{R}_{++}^n$ に関して、

$$x' \nabla f(x) = f(x) \quad (5)$$

$$\nabla^2 f(x) x = 0 \quad (6)$$

$$\nabla^2 f(x) = [\nabla^2 f(x)]' \quad (7)$$

なお、上の制約の導出には、オイラーの公式より、 n 次同次関数を一回微分は $n-1$ 次同次になる性質を利用している。制約の数は、それぞれ $1, n, n(n-1)/2$ である

さて、二階の連続微分可能な一次同次関数、 f と $f^* : \mathbf{R}_{++}^n \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ を考えよう。すると、両関数とも (5) – (7) を満たす。さらに、 f が f^* の二階までの近似になるためには、

$$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f^*(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq n \quad (9)$$

を満たさねばならない。必要な制約の数は、それぞれ n と $n(n-1)/2$ 、すなわち、 $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ である。なお、 $\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*)$ であれば、両関数とも一次同次であるため、 $\nabla f(x^*) x^* = \nabla f^*(x^*) x^* = f(x^*) = f^*(x^*)$ となっていることに注意されたい。また、(9) は対角成分を除外している。これは、非対角成分が定まり、かつ、 $\nabla^2 f(x^*) x^* = \nabla^2 f^*(x^*) x^* = 0$ が成立していれば、そこから対角成分もまた決定されるためである。

3 Quadratic Mean of Order r

Walsh 指数を COLI とする効用関数の時に用いた二階連続微分可能な一次同次関数であるような下記の関数を考えよう。

$$f(p) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)^{1/r}$$

$$a_{ij} = a_{ji}, r \neq 0$$

これは、同様に二回連続微分可能な任意の一次同次関数 $f^*(x)$ の二階の近似になるだろうか? Diewert (1976) はまさにこの関数が $f^*(x)$ の二階の近似となることを示している。 r を固定し、 a_{ij} だけ自由に動かすとなると、対角成分を含めて、全部で $n(n+1)/2$ 個存在する。したがって、パラメーターの数は十分に足りている。したがって、示すべきは、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 f^*}{\partial p_i \partial p_j} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq n$$

$$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*)$$

が成立することを示せばよい。これは、力業で、(8) と (9) を並べ、 a_{ij} に関する $n(n+1)/2$ の連立方程式を作成、その階がユニークに定まることを示すことで証明される。結構骨が折れるので、詳しくは Diewert (1976) を参照せよ。この $f(p)$ が Flexible ということは、 $r = 2$ のときの COLI である Fisher 指数、 $r = 1$ の時である Walsh 指数は Superlative Index であることを意味する。すなわち、Fisher 指数および Walsh 指数は、両方とも Flexible な関数

に対応する COLI である。Flexible な関数ということは、一次同次かつ二回連続微分可能な任意の関数の二階までの近似になっているということであり、背後の効用・支出関数を設定せずとも、その二階までの近似の COLI とみなすことが可能になるということでもある。

4 Translog

Törnqvist 指数を COLI として導出する際に用いた Translog 型関数は、下記で与えられていた

$$\ln E(p, u) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_i \ln p_k + b_0 \ln u + \sum_{i=1}^n b_i \ln p_i \ln u + \frac{1}{2} b_{00} (\ln u)^2$$

$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0, \sum_{i=1}^n b_i = 0$$

ここで、効用に関する項を単純化し、変数名を変えると、

$$\ln f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \ln x_i \ln x_k$$

$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0,$$

はたして、これが任意の関数 $f^*(x)$ の二階の近似になることを、やはりグラディエントとヘシアンを並べて両者を一致させるように a_{ik}, a_i, a_0 を選択することが可能であることで証明完了となる。この証明は、Christensen, et al. (1971)³で与えられている。なお、パラメーターの数は、 a_i 及び a_0 が $1+n$ 個。 a_{ik} が n^2 個であるが、総和に関する制約より、 a_i 及び a_0 は n 個となる。また、対称性の仮定より $n(n-1)/2$ 個、及び n 個がなくなり、 $n^2 - n(n-1)/2 - n$ となる。両者の和は $n^2 - n(n-1)/2 = (n^2 + n)/2 = n(n+1)/2$ であり、必要かつ十分な数が存在している。

Translog 型が flexible であるということは、Törnqvist 指数は Superlative Index になるということでもある。

ここでは、Translog 型のパラメーターに制約を課し、一次同次となるようにしていたが、その制約を外した場合どうなるだろうか？Törnqvist 指数が Translog 型支出関数に対応する COLI であることを証明する際に、ホモセティックの仮定は用いていない。Quadratic Mean of Order r の時には一次同次の仮定、特にオイラーの公式をふんだんに使っていたことと対照的であり、証明は極めて簡素であったことを思い出してもらいたい。一次同次の仮定を

³Christensen, L.R., D.W. Jorgenson and L.J. Lau, (1971) "Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function," *Econometrica* 39,255-256.

廃することで、Translog 型関数はさらに Flexible となり、ホモセティックでない効用関数の近似としても扱うことが可能である。これは、Törnqvist 指数がノンホモセティックな効用関数の時の COLI の近似になることを意味している。ただし、一つ注意する点がある。Törnqvist 指数が COLI となることの証明の際に用いた Quadratic Approximation Formula、すなわち、

$$f(z^1) - f(z^0) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f(z^0)}{\partial z_i} + \frac{\partial f(z^1)}{\partial z_i} \right\} (z_i^1 - z_i^0)$$

を用いて、支出関数の対数微分が支出シェアになる際に、二時点の支出シェアと効用関数の基準における支出シェアの橋渡しをする必要があり、その際、 $u^* = (u_0 u_1)^{1/2}$ を仮定していた。ホモセティック効用関数の場合、効用水準をどこに設定しても COLI に影響はなかったが、ホモセティックでない場合、COLI は一般に効用水準に依存する。そして、Törnqvist 指数は、二時点の効用の幾何平均を基準効用とした場合の COLI となる。

なお、Quadratic Mean of Order r で $r = 1$ のとき、すなわち、

$$f(p) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} p_i^{1/2} \ln p_k^{1/2}$$

$$a_{ik} = a_{ki}$$

のとき、Generalized Leontief Cost Function と呼ばれる有名なものであり⁴、当然のことながらパラメーターの数は $n(n+1)/2$ 、さらに明らかに価格に関して一次同次となっている。これが任意の一次同次関数 $f^*(x)$ の二階の近似になることは容易に証明可能である。

5 Superlative Index 間の関係

Fisher, Walsh, Törnqvist 指数はいずれも Superlative Index であった。この共通性は三者の間にどのような関係を生み出すのだろうか?Diewert (1978)⁵は非常に明確な結論を導いている。それは、“all superlative indexes closely approximate each other (Diewert (1978) p. 884)”、すなわち、任意の二つの Superlative Index は、任意の p と q において、 $p_0 = p_1, q_0 = q_1$ において、互いに二階までの近似となっていると主張した。Diewert が実際に示したのは三つの COLI の二階までの近似性である。具体的には、Törnqvist 指数、 PI^T 、Quadratic Mean of Order r の支出関数に対応する COLI、すなわち、

⁴Diewert, W.E. (1971) “An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function,” *Journal of Political Economy* 79, pp. 481-507.

⁵W. E. Diewert (1978) “Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation,” *Econometrica*, Vol. 46, No. 4 (Jul., 1978), pp. 883-900

$$PI^r(q_0, p_0, q_1, p_1) = \frac{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n w_i^0 (p_{i1}/p_{i0})^{r/2}}}{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^n w_i^1 (p_{i0}/p_{i1})^{r/2}}}$$

、さらに、Quadratic Mean of Order r で定義された効用関数から数量指数を計算し (単なる二時点の比である) そこから Factor Reversal を用いて定義された COLI を PI^{r*} 、すなわち、

$$PI^{r*}(q_0, p_0, q_1, p_1) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \right) \frac{1}{Q^r(q_0, p_0, q_1, p_1)}$$

とすると、

$$\begin{aligned} PI^T(q_0, p_0, q_1, p_1) &= PI^r(q_0, p_0, q_1, p_1) = PI^{r*}(q_0, p_0, q_1, p_1) \\ \frac{\partial}{\partial p_{it}} PI^T(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \frac{\partial}{\partial p_{it}} PI^r(q_0, p_0, q_1, p_1) = \frac{\partial}{\partial p_{it}} PI^{r*}(q_0, p_0, q_1, p_1) \quad \text{for } \forall i, t=0 \text{ or } 1 \\ \frac{\partial}{\partial q_{it}} PI^T(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \frac{\partial}{\partial q_{it}} PI^r(q_0, p_0, q_1, p_1) = \frac{\partial}{\partial q_{it}} PI^{r*}(q_0, p_0, q_1, p_1) \quad \text{for } \forall i, t=0 \text{ or } 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial p_{it} \partial p_{jt}} PI^T(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \frac{\partial^2}{\partial p_{it} \partial p_{jt}} PI^r(q_0, p_0, q_1, p_1) = \frac{\partial^2}{\partial p_{it} \partial p_{jt}} PI^{r*}(q_0, p_0, q_1, p_1) \quad \text{for } \forall i, j, t=0 \text{ or } 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial p_{it} \partial q_{jt}} PI^T(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \frac{\partial^2}{\partial p_{it} \partial q_{jt}} PI^r(q_0, p_0, q_1, p_1) = \frac{\partial^2}{\partial p_{it} \partial q_{jt}} PI^{r*}(q_0, p_0, q_1, p_1) \quad \text{for } \forall i, j, t=0 \text{ or } 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial q_{it} \partial q_{jt}} PI^T(q_0, p_0, q_1, p_1) &= \frac{\partial^2}{\partial q_{it} \partial q_{jt}} PI^r(q_0, p_0, q_1, p_1) = \frac{\partial^2}{\partial q_{it} \partial q_{jt}} PI^{r*}(q_0, p_0, q_1, p_1) \quad \text{for } \forall i, j, t=0 \text{ or } 1 \end{aligned}$$

が成立することを示している。これらは、三つの COLI が互いの近似になっていることを示すものではあるが、「全ての」Superlative Index が互いの二階近似になっているという Diewert (1978) の Statement は誤りであったことが判明している。Hill (2006)⁶は Quadratic Mean of Order r に対応する生計費指数が全て Superlative Index になることを利用し、 r を様々な値に変化させながら、1977 年から 1994 年までのアメリカ合衆国の GDP データを用い、生計費指数を作成し比較した。すると、 r をマイナス無限とプラス無限に設定した場合の生計費指数間の差の最大値はラスパイレスとパーシェの間の差よりもかなり高い確率で高くなり (153 のうち 146)、-5 から 5 までの間に限定しても、かなり高い割合でラスパイレス-パーシェの差を超えていた。Hill (2006) は r をマイナス無限とプラス無限に発散させたとき、生計費指数は下記を満たすことを見出した。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} PI^r = \lim_{r \rightarrow -\infty} PI^r = \sqrt{\min \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} \right) \times \max \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} \right)}$$

⁶Hill, Robert (2006) "Superlative Index Numbers: Not All of Them Are Super," *Journal of Econometrics*, 130, pp.25-43.

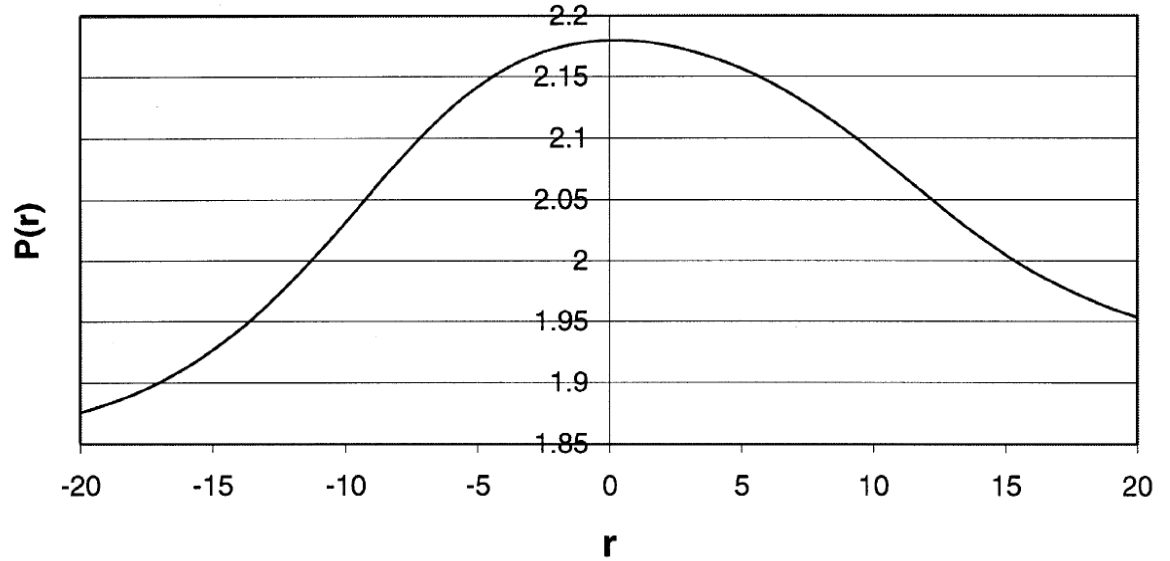


Fig. 1. Price index for 1977–1994 comparison (USA).

図 1: Figure 1

なお、Quadratic Mean of Order r 関数で、 $r = 0, 1, 2$ の三種類の値はそれぞれ、Törnqvist、Walsh、Fisher の三種類の生計費指数に対応していたことを思い出してほしい。Hill (2006) は、 r が 0 と 2 の間で生成される Superlative Index は非常によく似ており、アメリカのデータを用いても、OECD 諸国の国間の物価を用いても、その差は極わずかであり、ラスパイレスとパーシェの差に比べて非常に小さく、差は最大でもコンマ数% 程度に過ぎないことを指摘している。一方、 r の絶対値を非常に大きくすると、Superlative Index 間の差は拡大し、最大で 100% を超えることもある。図は Hill (2006) の Figure 1 であり、アメリカの 1977-1994 年 GDP データで、価格と数量の情報が利用可能な 64 系列に関して、 r の値を変化させたときの PI^r の違いを図示している。 r が 0 近辺、絶対値で 2 以内であれば、 PI^r の値はほぼ水平で、非常に近い値になっていることがわかるが、 r の絶対値が大きくなるにつれ乖離は大きくなり、また曲線は水平になっていく。Hill (2006) の結果から $\lim_{r \rightarrow \infty} PI^r = \lim_{r \rightarrow -\infty} PI^r$ であり、このデータでは極限值は 1.90 である。

Hill (2006) はさらに下記の定理を証明している。

(定理 1) PI^r は、もしも対数価格変分の分布が対称であり、かつ、全ての商品の weight が同一 ($w_i = 1/n$) のとき、 PI^r は r に依存しない。

(定理 2) 全ての商品の weight が同一 ($w_i = 1/n$) であり、かつ、対数価格変分が右に歪んでいる分布を X また X と対称の分布で左に歪んでいるが平均値は X と共通の分布を Y とする。さらに、 X と Y に対応する PI^r がともに一つのターニングポイントを有するとする。このとき、 X に基づく PI^r のターニングポイントは PI^r の最小値であり、 Y に基づく PI^r のターニングポイントは PI^r の最大値となっている。

図の例では、 Y 、すなわち、逆 U 字型となっており、価格分布が左に歪んでいることを示唆している。Hill の結果から、Superlative Index が互いに似ているのは、相対価格の歪みが少ないか、 r の絶対値が小さいときに限定されることがわかる。

Hill (2006) と Diewert (1978) の結果を総合すると、Törnqvist、Walsh、Fisher の三種類の生計費指数はいずれも代替の弾力性等の構造パラメータを推計する必要なく容易に計算可能であり、公理的にも意味を与えることが可能であり、かつ三者の間のかい離はごくわずかであるが、それは Superlative Index によるものではなく、 r の絶対値が小さいためである、ということであろう。

6 ホモセティック効用関数への批判

Superlative Index の理論は、効用関数の一次同次性、すなわちホモセティック効用関数の仮定に依存している。Diewert (1976) は、Törnqvist 指数がノンホモセティック効用関数に対応していることで、Superlative Index がノンホモセティックなケースもカバーしていると議論している。もっとも、Törnqvist 指数は、基準効用として二時点の効用の幾何平均を採用することが前提となっており、一般的な効用水準基準には対応しておらず、その点では制約が課されていることになる。Superlative Index が本当に広いクラスの効用関数に対応した生計費指数であるか否かは常に論争の対象になっており、今日でも批判されることは少なくない。Breuer and Lippe (2011) は、この点を特に強く批判し、Superlative Index は強い効用関数の制約のもとに初めて成立するとしている⁷。Dumagan and Mount (1997)⁸は、ノンホモセティック効用関数を仮定し、複数財の需要と供給の関係をシミュレートした上で、基準時点の効用水準を用いた真の COLI が Fisher 指数や Törnqvist 指数と大きく乖離し、むしろ伝統的な Laspeyres 指数のほうがより真の COLI に近いことがありうることを示している。ホモセティック効用関数の場合は、所得弾力性は常に

⁷Claus C. Breuer and Peter M. von der Lippe (2011) “Problems of operationalizing the concept of a cost of living index” MPRA Paper No. 32902.

⁸Dumagan J., and T. Mount (1997) “Re-examining the Cost-of-Living Index and the Biases of Price Indices: Implications for the U.S. CPI,” ESA/OPD 97-5, U.S. Department of Commerce, Economics and Statistics Administration, Washington D.C.

1 となる。ノンホモセティックの場合には所得弾力性は 1 には一般にならない。もしも真のデータがノンホモセティックである場合、所得弾力性が 1 から乖離することによる価格と数量の関係が大きく指数の結果を左右する可能性は否定できない。Dumagan and Lippe (1997) は、Diewert の Superlative Index は下位代替バイアスはないが、所得に関するバイアスが発生するとし、基準時の所得で固定する Laspeyres 指数のほうがより真の COLI に近いことがありうることを示しているのである。もっとも、真の生計費指数を計算する際には効用水準を一定と仮定しており、効用に直接大きな影響をあたえる所得効果の影響は代替効果に比べて限定的になっていることも事実であり、Dumagan and Lippe (1997) の結果がどの程度一般的に発生しうかは明らかではない。

ホモセティック効用関数に基づく Superlative Index にとり、ホモセシティへの依存度の強さは、二時点の効用の幾何平均を基準とすることの適否に依存すると思われる。基準時や比較時の効用を基準とし、二時点の効用水準が大きく異なる場合（数量指数が大きく 1 から乖離する場合）、Törnqvist 指数はそれらの生計費指数と大きく乖離することは十分にありうる。そして、Törnqvist とほぼ同様の値をとる Fisher や Walsh もまた大きく乖離することになるだろう。ただし、二時点間の COLI を測る際に、両時点での効用水準のなんらかの平均をとることは自然であり、幾何平均をとることも、それほどおかしいこととはいえず、むしろ基準時や比較時のみに依拠するほうが不自然に思われる。真の生計費指数がわからない場合、観察データのみからどの指標がより真の生計費指数に近いかの判断は不可能である。そして、シミュレーションによる場合、そのシミュレーションの仮定の適否が問われることになる。ノンホモセティックな効用関数が重要な役割を示すのは、経済発展の初期段階や貧困家庭のように、非常に所得弾力性の低い消費の割合が強い場合であろう。一方、大域的にノンホモセティックな場合、近世成長経路を考えることが困難になり、長期的に安定した消費・所得パターンがなくなってしまう。成熟した経済や代表的な個人を考える場合、すなわち標準的なマクロモデルを考え、かつ大分類を考える場合は、ホモセティック効用関数の仮定はそれほど制約的ではない可能性もあると思われる。

7 Flexibility の要請について

ある物価指数が Superlative であることを調べるには、それが Flexible な効用、あるいは支出関数のから導出される生計費指数であることを示す必要がある。そのような Flexible な効用・支出関数が見つければよいが、見つからない場合は、ある物価指数が Superlative であるとは言えないが、一方、Superlative でない、とも言うことはできない。Sato-Vartia 指数は、実際に指数を作成すると、Fisher や Törnqvist、Walsh ときわめてよく似た動きを

示すが、他の三種の指数と異なり Flexible な支出や効用関数から導出できていない。CES 型効用・支出関数のパラメータは $n + 1$ であり、Flexible な関数に必要な $n(n + 1)/2$ に比べて少なすぎ、Flexible にならないのである。

Barnett and Choi (2008)⁹は、二階の近似、の意味を拡張している。Diewert (1976) では、一階、二階の微係数が一致することを要求していたが、Barnett and Choi (2008) は

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f^*(x) - f(x))}{\|x - x_0\|^2} \rightarrow 0$$

もしくは

$$f^*(x) - f(x) = o(\|x - x_0\|^2) \quad (10)$$

を用いている。そして、 $x \rightarrow x_0$ のとき、この条件は、二階連続微分可能な時には、Diewert (1976) の用いた微係数の一致と同値になることが知られている。Superlative Index であることを示すには上記をみたす $f(x)$ を探さねばならないが、Barnett and Choi (2008) は $f(x)$ の存在を示すことと、 $f(x)$ の関数形を求めることは異なることを指摘している。たとえ Closed Form の関数形が存在せず、例えば spline でつながるようなものであっても、二階連続微分可能な関数は無数に存在している。そして、調べる関数の空間を拡大することで、より多くの物価指数が Superlative であることを示すことが可能であると主張している。そして、二期間の支出シェアを対称に扱う対数物価指数、すなわち、

$$\begin{aligned} \log PI^{T-S} &= \sum_{i=1}^n \frac{m(w_{j,1}, w_{j,0})}{\sum_{j=1}^n m(w_{j,1}, w_{j,0})} \log \left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} \right) \\ m(x, y) &= m(y, x), m(x, x) = x \\ \min(x, y) &\leq m(x, y) \leq \max(x, y) \end{aligned}$$

をみたす物価指数 (Sato-Theil 指数と呼ばれる) は全て、任意の $f^*(x)$ に対し、(10) を満たすような関数 $f(x)$ が存在することを示している。この物価指数には Sato-Vartia 指数が含まれている。すなわち、Sato-Vartia 指数は、Barnett and Choi の定義する Superlative Index であることになる。確かに、物価指数が事前に与えられている場合、それを Exact な生計費指数になるような支出関数、あるいは効用関数が存在していれば良く、その関数形を特定化する必要は必ずしもない。一方、効用関数や支出関数には、一次同次性以外にも満たさねばならない性質が多々ある。効用関数であれば単調性、擬凹性、支出関数であれば凹性などである。たとえ Flexible な関数 $f(x)$ が存在しても、それが効用や支出関数に課されるべき性質を満たしていないのであれば、それは生計費指数とみなすことには無理があり、Barnett and Choi

⁹William A. Barnett and Ki-Hong Choi, (2008) “Operational identification of the complete class of superlative index numbers: An application of Galois, theory” *Journal of Mathematical Economics* Volume 44, Issues 7–8, July 2008, Pages 603–612

(2008) の定義をそのまま Superlative Index とすることには問題がある。一方、Sato-Vartia 指数は CES 効用関数の下での Exact になっており、さらに拡張された関数 $f(x)$ により、Flexible になるということは、Sato-Vartia 指数が Fisher や Törnqvist とよく似た動きをすることは偶然ではないことを示しており、その意味では、Barnett and Choi (2008) の貢献は大きいと言えるだろう。

Deaton (2010) は、国間の比較の際に Superlative Index を利用する際に問題が生じると指摘している。Superlative Index の計算には、効用関数、もしくは支出関数が二時点、あるいは二地点で同一と仮定しする必要がある。Törnqvist の場合は、二地点あるいは二時点の支出シェアの平均を用いることになる。無論、効用関数や支出関数が同一であれば、観察される支出シェアの違いは、価格の違いのみに依存する (効用がホモセティックであれば)。これは、イギリスや日本のような先進国とアフリカの低開発諸国の間の生計費指数を計算する場合、各商品に関する支出シェアの二国の平均が Weight として単純に計算することになるが、実際には、先進国と低開発国において、各商品への支出シェアは大きく異なっており、生計費指数として解釈することには非常に無理のある指数となるであろう。これは、二国間で選好が同一と仮定することに対する強い批判である。

Superlative Index は、公理的アプローチと経済学的アプローチをつなぐ非常に強力かつ魅力的なアイデアであるが、これで物価指数理論は終焉はせず、残念ながら、当初 Diwert が夢見ていたような統合は達成できたとは言えない。Barnett and Choi (2008) のような数学的な拡張は現在でも続けられているが、Superlative index の理論は現在、急展開を見せているともいえない状況であり、関心は、むしろより実践的な方向に、例えば商品の移り変わりが激しい場合の計測手法、家計間の物価指数の違い、地域間の指数の収束など、より応用経済学的な方向に進んでいる。

8 その他の展開

Deaton (2010) は、国間の比較の際に Superlative Index を利用する際に問題が生じると指摘している。Superlative Index の計算には、効用関数、もしくは支出関数が二時点、あるいは二地点で同一と仮定しする必要がある。Törnqvist の場合は、二地点あるいは二時点の支出シェアの平均を用いることになる。無論、効用関数や支出関数が同一であれば、観察される支出シェアの違いは、価格の違いのみに依存する (効用がホモセティックであれば)。これは、イギリスや日本のような先進国とアフリカの低開発諸国の間の生計費指数を計算する場合、各商品に関する支出シェアの二国の平均が Weight として単純に計算することになるが、実際には、先進国と低開発国において、各商品への支出シェアは大きく異なっており、生計費指数として解釈するこ

とには非常に無理のある指数となるであろう。これは、二国間で選好が同一と仮定することに対する強い批判である。

Superlative Index は、公理的アプローチと経済学的アプローチをつなぐ非常に強力かつ魅力的なアイデアであるが、これで物価指数理論は終焉はせず、残念ながら、当初 Diwert が夢見ていたような統合は達成できたとは言えない。Barnett and Choi (2008) のような数学的な拡張は現在でも続けられているが、Superlative index の理論は現在、急展開を見せているともいえない状況であり、関心は、むしろより実践的な方向に、例えば商品の移り変わりが激しい場合の計測手法、家計間の物価指数の違い、地域間の指数の収束など、より応用経済学的な方向に進んでいる。