2016年応用マクロ経済学
指数理論 (8)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成29年1月4日

概 要

Variety Expansion Effects by Feenstra (1994)

1 Variety Effects

Dixit and Stiglitz (1977) に基づく CES 型効用関数では、商品の種類数、n は固定されていた。では n が変化すると、モデルに何が生じるだろうか?ここで、商品数を n_t とし、下記のような効用関数を仮定しよう。

$$U_t = \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it} q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\sigma > 1, a_{it} > 0, \sum_{i=1}^{n} a_{it} = 1$$

このモデルの解法は前の講義ノート全く同じなので、効用最大化の結果、需要関数、支出関数及び間接効用関数は下記のようになる。

$$q_{it} = U_t \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t} \right)^{-\sigma}$$

$$E\left(U_t, p^t\right) = U_t P_t = U_t \times \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$V(p, I) = I_t \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

ここで、全ての商品の品質 (効用における) および価格が同一で 1、すなわ

ち、$a_{it} = \overline{a}, p_{it} = 1$ を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
V(p, I) &= I_t \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\
&= I_t \left(\sum_{i=1}^{n_t} \overline{a}^{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\
&= I_t \left(n_t \overline{a}^{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\
&= I_t n_t^{\frac{1}{\sigma-1}} \overline{a}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}
\end{aligned}
$$

もしも σ が 1 に近い値をとると、効用水準は商品種類 n_t に関して敏感に反応するようになり、1 に収束すると、効用の種類に関する弾力性は無限に発散していく。所得と価格が一定であれば、間接効用は n_t の増加関数となり、弾力性の水準により、効用の増加速度はどこまでも大きくなりうる。所得と価格が一定の下で商品の種類 (variety) を増加させるには、個々の商品の購入量を減らすことになる。より多くの商品を少量ずつ消費する、すなわち消費の平準化が効用を高めることを意味する。これは CES 効用関数が凹関数であることの帰結であり、代替の弾力性が同一であることに依存するものではない。所得や価格が一定であれば、商品の種類が多いほど厚生が高まることを Love of Variety と呼ぶ。時に、CES 型効用関数そのものが Love of Variety 型と呼ばれることがある[1]。Krugman (1980)[2]は、この特徴を用い、自国と外国で生産されている商品には違いがあると仮定した上で Love of Variety が二国間貿易の源泉となりうることを示した。また、Romer による論文[3]では、この関数形を生産に用い、商品の種類の増加が生産性を増加させ、内生成長を起こすことを示している。

CES 型にかかわらず、財空間に新たに財が加わり、既存の財価格や所得に影響がないのであれば、財・商品種類の増加が効用水準の増加を引き起こすことは自然である。すくなくとも、機会集合は縮小はしない。問題は、果たして、どの程度効用が増加するか、すなわち効用の種類弾力性の値である。CES 型では、価格が全商品で同一と仮定し弾力性が一定のまま商品の種類が増加していく。はたして、これは現実の財の種類増加の効果のよい描写になっているのだろうか?

消費者にとっての選択肢の増加を経済モデルでどう描写するかは、計量経済学でも問題となっている。多項ロジットモデルの例として、赤いバス、青いバス (Red Bus, Blue Bus) 問題という有名な例がある。いま、タクシーと

[1]Dixit and Stiglitz (1977) では、Love of Variety は考察されておらず、商品の数は一定であるとされている。しかしながら、商品間の代替の弾力性が異なることを許容するモデルも考察しており、商品間の代替の弾力性一定という仮定が非常に強いことも指摘している。

[2]Krugman, Paul. (1980). “Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade,” *American Economic Review*, Vol. 70, No. 5, pp. 950-959.

[3]P.Romer (1987) “Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization,” *American Economic Review*, 77(2), pp. 56-52. 及び P. Romer (1990) “Endogenous Techological Change,” *Journal of Political Economy*, 98, 5, pp S71-S012.

バスの二種類の移動手段のある市場を考える。このバスは赤く塗られている。いま、このバスと全く同じ機能・性能、スケジュール、料金だが、外側の色だけ赤ではなく青で塗られているバスが登場したとしよう。利用客にとっては、バスの色が赤いか青いかはどうでもよい (どうせ乗っている間は色は見えない) ので、単に赤いバスの市場が青いバスによって二分割されるだけと考えるのが自然であろう。しかし、ロジットで必要とされる IIA(Independence of Irrelevant Alternatives) を仮定してしまうと、赤いバスとタクシーの選択は青いバスの有無に依存しないので、タクシーと赤いバスのシェアの比は、青いバスが登場する前と同じ値にならねばならない。これは、赤いバスと青いバスが完全な代替財になっているにもかかわらず、それを無視して異なる財と扱うことから生じる問題である。Love of Variety を考える際、どのような商品間、財間の差異を考えているか、CES が想定するような弾力性が一定とする仮定はどの程度適切であるのか、慎重に検討する必要がある。観光地を例にとっても、冬山のスキーと夏のビーチは異なる商品として、二つの選択肢があることは人々の厚生を拡大させるが、夏のビーチで、わすが数百メートルしか離れておらず、ほとんど同一のビーチの選択肢が増加しても、人々の厚生に与える影響は軽微のはずである。カップラーメンの蓋に人気アイドルの写真が貼られていたら、そのアイドルのファンにとっては従来とは異なる商品になるであろうし、アイドルに関心のない人にとっては、従来の商品と完全代替であろう。これは、スマートフォンの新機能を使いこなす人と、無視する人、テレビや PC の性能など、多くの商品にかかわる大きな問題である。

CES 型による Love of Variety を正当化する一つのロジックは、これを複雑なモデルの近似とみなすことである。よく似た、しかし若干異なる財の存在 (Poduct Differentiation) の経済分析には長い歴史がある。その中でも Hotelling (1929) およびそれに続く一連の立地による差別化には多くの研究の蓄積がある[4]。北海道に住む人は、沖縄からわざわざ商品を取り寄せるよりも北海道産の商品を消費するほうがより効率的であろう。市場が統合されていない場合、立地による独占的競争が発生し、商品の差別化が生じることになる。問題は、この種類のモデルでは異質な消費者を扱う必要があり、動学や国際貿易等、諸分野に応用するのが容易ではないことである。一方、Dixit and Stiglitz (1977) による CES 型効用関数が生み出す Love of variety は、異質な個人や企業という要素を極力排し、単純なモデルで分析できるため、非常に多くの応用先があるという大きなメリットがある。

Love of Variety には批判も多いが、現在のマクロ経済学や国際貿易研究において実質的に標準のフレームワークとなっている。ここでは、国際貿易を

[4]Hotelling, Harold (1929) "Stability in Competition," *The Economic Journal*, 39,4157. Lancaster, K. (1979) V*ariety, Equie and Efficiency*, New York: Columbia University Press. Salop, Ste. (1979) "Monopolistic Competition with Outside Goods," *Bell Journal of Economics*, 10,
141-156.

念頭に置いた Feenstra (1994)[5]の COLI を紹介する。

2 Feenstra (1994)

CES 型効用関数の単位支出関数、

$$E\left(1, p^t\right) = P_t = \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

から始めよう。二期間、t 期と $t-1$ 期の間の物価の変化を考える。t 期に存在する財の集合を I_t 二つの期間どちらにも存在する財の集合を $I\ (\neq \emptyset)$、a_{it} は時間によらず一定、すなわち、$a_{it} = a_i$ とする。このとき、効用一単位あたりの支出関数は

$$P_t = \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

となるが、これは t 期において利用可能な財の集合 I_t に依存するので、

$$P_t\left(p_t, I_t\right) = \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

と書くことにしよう。二期間の生計費指数、COLI は

$$\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)}$$

となる。ここで、Feenstra (1994) は

$$\begin{aligned} PI^{FS} &= \frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} \\ &= PI^{sv}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ \lambda_r &= \frac{\sum_{i \in I} p_{i,r} x_{i,r}}{\sum_{i \in I_r} p_{i,r} x_{i,r}} \\ PI^{sv} &: \text{Sato-Vartia COLI for } I \end{aligned}$$

となることを示した。PI^{sv} は、前の講義ノートで示した Sato-Vartia 型の COLI で、二期間で共通する財、継続商品に限定した COLI である。すなわち、Feenstra の COLI は、継続商品に限定した Sato-Vatia 型 COLI と、λ-Ratio の関数の積で表すことが可能である。λ_t は t 期において利用可能な商品の売り上げのうち、継続商品の売り上げの割合である。もしも新商品が多ければ、この割合が低下する。$\sigma > 1$ を仮定しているので、λ_t が λ_{t-1} にくら

[5]Feenstra, Robert C, (1994) "New Product Varieties and the Measurement of International Prices," *American Economic Review*, vol. 84(1), pages 157-77, March.

べて増加すれば、Feenstra 型 COLI は λ-Ratio の減少する、すなわち、財の種類が増加すると COLI は低下するのである。

(証明)

i 財の支出シェアは

$$
\begin{aligned}
w_{it} &= \left(\frac{a_{it}p_{it}}{P_t}\right)^{1-\sigma} \\
&= a_{it}^{1-\sigma}p_{it}^{1-\sigma}P_t^{\sigma-1} \\
P_t &= \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma}p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
P_t = a_{it}p_{it}w_{it}^{\frac{1}{\sigma-1}}
$$

これは、

$$
\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} = \frac{a_{it}p_{it}w_{it}^{\frac{1}{\sigma-1}}}{a_{it-1}p_{it-1}w_{it-1}^{\frac{1}{\sigma-1}}}
$$

$a_{it} = a_i$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} &= \frac{p_{it}w_{it}^{\frac{1}{\sigma-1}}}{p_{it-1}w_{it-1}^{\frac{1}{\sigma-1}}} \\
&= \left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\left(\frac{w_{it}}{w_{it-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}
\end{aligned}
$$

ところで、継続商品に限定した場合の i 財への支出シェア $w_{it}\left(I\right)$ と通常の支出シェア $w_{it} = w_{it}\left(I_t\right)$ の関係を考えると、

$$
\begin{aligned}
w_{it}\left(I_t\right) &= \frac{p_{i,r}x_{i,t}}{\sum_{j\in I_t} p_{j,t}x_{j,t}} \\
&= \frac{p_{i,r}x_{i,t}}{\sum_{j\in I_t} p_{j,t}x_{j,t}}\frac{\sum_{j\in I} p_{i,r}x_{i,t}}{\sum_{j\in I} p_{j,t}x_{j,t}} \\
&= \frac{p_{i,r}x_{i,t}}{\sum_{j\in I} p_{j,t}x_{j,t}}\frac{\sum_{j\in I} p_{i,r}x_{i,t}}{\sum_{j\in I_t} p_{j,t}x_{j,t}} \\
&= w_{it}\left(I\right)\frac{\sum_{j\in I} p_{j,t}x_{j,t}}{\sum_{j\in I_t} p_{j,t}x_{j,t}} \\
&= w_{it}\left(I\right)\lambda_t
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} = \left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\left(\frac{w_{it}\left(I\right)}{w_{it-1}\left(I\right)}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}
$$

この右辺の、継続商品に限定した場合の幾何平均を s_i を用いて計算すると、

$$\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} = \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \prod_{i \in I}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)^{s_i}\left(\frac{w_{it}\left(I\right)}{w_{it-1}\left(I\right)}\right)^{\frac{s_i}{\sigma-1}}$$

$$s_i = \frac{\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}$$

ここで、前回の講義ノートで示したように、

$$PI^{sv} = \prod_{i \in I}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)^{s_i}$$

である。残るは、

$$\prod_{i \in I}\left(\frac{w_{it}\left(I\right)}{w_{it-1}\left(I\right)}\right)^{\frac{s_i}{\sigma-1}}$$

である。自然対数をとると、

$$\begin{aligned}
&\ln \prod_{i \in I}\left(\frac{w_{it}\left(I\right)}{w_{it-1}\left(I\right)}\right)^{\frac{s_i}{\sigma-1}} \\
&= \sum_{i \in I}\left(\frac{s_i}{\sigma-1}\right)\left(\ln w_{it}\left(I\right) - \ln w_{it-1}\left(I\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)\sum_{i \in I}\frac{\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}\left(\ln w_{it}\left(I\right) - \ln w_{it-1}\left(I\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)\sum_{i \in I}\frac{\left(w_{i1} - w_{i0}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}
\end{aligned}$$

ここで、分子は

$$\sum_{i \in I}\left(w_{i1} - w_{i0}\right) = \sum_{i \in I} w_{i1} - \sum_{i \in I} w_{i0} = 1 - 1 = 0$$

したがって、

$$\prod_{i \in I}\left(\frac{w_{it}\left(I\right)}{w_{it-1}\left(I\right)}\right)^{\frac{s_i}{\sigma-1}} = 1$$

である。これで、

$$\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} = \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} PI^{sv}$$

(証明終わり)

Feenstra (1994) の COLI は、財空間の変化が生計費指数に与える影響を数量化している点で、従来の COLI とは一線を画すものである。公理論的アプローチで財空間の変化を扱うことは極めて困難であり、経済学アプローチの

利点といえる。問題は、価格と数量の情報のみでは COLI を計算できず、弾力性の情報が必要となる点である。Sato-Vartia 型の COLI は、複雑な Weights を用いる一方、弾力性を推計する必要はなかったが、今回は弾力性を計測せねばならないのである。

代替の弾力性の推計は容易ではない。価格と数量の観察値が大量にあったとしても、それが需要と供給のどちらの変動を反映しているかを見分けねばならないためである。適切な操作変数が見つかる場合、あるいは供給曲線のみをシフトさせるような変動を抽出できれば観察データから需要弾力性を推計可能となるが、通常は、そのような都合の良い操作変数や供給変動を一般に全ての財市場について見出すことは不可能である。Feenstra (1994) は、この弾力性の推計手法についても、比較的簡単に推計可能な手法を提案している。これは、弾力性が時間を通じて一定の場合に適用可能なものである。

3　弾力性の推計

i 財への支出シェアに戻り、かつ、a_{it} が可変としよう。すると、

$$w_{it} = a_{it}^{1-\sigma} p_{it}^{1-\sigma} P_t^{\sigma-1}$$

両辺の自然対数をとると、

$$\ln w_{it} = (1-\sigma)\ln a_{it} + (1-\sigma)\ln p_{it} + (\sigma-1)\ln P_t$$

階差をとり、

$$\begin{aligned}
\Delta \ln w_{it} &= \Phi_t - (\sigma-1)\,\Delta \ln p_{it} + \varepsilon_{i,t} \\
\Phi_t &= (\sigma-1)\,\Delta \ln P_t \\
\varepsilon_{i,t} &= (1-\sigma)\,\Delta \ln a_{it}
\end{aligned}$$

すなわち、選好ショックが誤差項の一部となる。次に、供給関数として下記のような単純なものを仮定する。

$$\Delta \ln p_{it} = \omega \Delta \ln q_{it} + \xi_{it}$$

ただし $\omega > 0$ は供給弾力性であり、q_{it} は i 財の数量である。ξ_{it} は誤差項であり、需要曲線の誤差項 $\varepsilon_{i,t}$ と直行していると仮定する。支出シェアの定義から、

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{E_t}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\ln w_{it} &= \ln p_{it} + \ln q_{it} - \ln E_t \\
\ln q_{it} &= \ln w_{it} - \ln p_{it} + \ln E_t \\
\Delta \ln q_{it} &= \Delta \ln w_{it} - \Delta \ln p_{it} + \Delta \ln E
\end{aligned}$$

これを供給曲線に代入すると、

$$\begin{aligned}
\Delta \ln p_{it} &= \omega \left(\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln p_{it} + \Delta \ln E\right) + \xi_{it} \\
(1+\omega)\, \Delta \ln p_{it} &= \omega \Delta \ln w_{it} + \omega \Delta \ln E + \xi_{it} \\
\Delta \ln w_{it} &= \frac{(1+\omega)}{\omega} \Delta \ln p_{it} - \Delta \ln E - \frac{\xi_{it}}{\omega}
\end{aligned}$$

となり、支出シェアと価格の変化に関する関係式を得る。

次に、上記の関係式を需要曲線に代入すると、

$$\begin{aligned}
\Delta \ln w_{it} &= \frac{(1+\omega)}{\omega} \Delta \ln p_{it} - \Delta \ln E - \frac{\xi_{it}}{\omega} \\
&= \Phi_t - (\sigma - 1)\, \Delta \ln p_{it} + \varepsilon_{i,t} \\
\left(\frac{(1+\omega)}{\omega} + (\sigma - 1)\right) \Delta \ln p_{it} &= \Delta \ln E + \Phi_t + \varepsilon_{i,t} + \frac{\xi_{it}}{\omega} \\
\left(\frac{1+\omega\sigma}{\omega}\right) \Delta \ln p_{it} &= \Delta \ln E + \Phi_t + \varepsilon_{i,t} + \frac{\xi_{it}}{\omega} \\
\Delta \ln p_{it} &= \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln E + \Phi_t) + \frac{\xi_{it}}{1+\omega\sigma} + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) \varepsilon_{i,t}
\end{aligned}$$

簡単のために

$$\begin{aligned}
\frac{\xi_{it}}{1+\omega\sigma} &= \delta_{it} \\
\left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln E + \Phi_t) &= \Psi_t
\end{aligned}$$

とすると、

$$\Delta \ln p_{it} = \Psi_t + \delta_{it} + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) \varepsilon_{i,t}$$

となる。これで、上記の式と

$$\varepsilon_{i,t} = \Delta \ln w_{it} - \Phi_t + (\sigma - 1)\, \Delta \ln p_{it}$$

という二本の推定式を得たことになる。求めたいパラメターは二つの弾力性、σ と ω である。問題は、Φ_t と Ψ_t であり、これを消去するため、他の財からの乖離をとる。Feenstra (1994) は、国際貿易を考えているため、最大の取引国を k 国とし、k 国からの乖離を計算している。具体的には、

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varepsilon}_{i,t} &= (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt}) + (\sigma - 1)\, (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) \\
\widetilde{\delta}_{it} &= (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) - \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) \widetilde{\varepsilon}_{i,t} \\
&= \frac{-\omega\,(\sigma+1) + 1 + \omega\sigma}{1+\omega\sigma} (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt}) \\
&= \left(\frac{1-\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) - \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt})
\end{aligned}$$

という、一階の階差と、基準からの乖離という二重階差を計算する。すると、二式に含まれるパラメターは σ と ω のみとなる。これは非線形連立方程式となる。二重階差をとることにより、マクロショックが消去されていることには特に注意が必要である。ここでの識別条件は、需要ショックと供給ショックが直行していることであり、両者を同時にシフトしかねないマクロのショックは推定から除外しているのである。さて、上記の moment 条件は $\widetilde{\varepsilon}_{i,t}$ と $\widetilde{\delta}_{it}$ の直行性の一つしかなく、このままでは二つのパラメターの識別ができない。そこで、Feenstra (1994) は分析を著しく容易にする工夫をしている。具体的には、二つの誤差項の積をとり

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varepsilon}_{i,t}\widetilde{\delta}_{it} &= \left(\Delta\ln p_{it} - \Delta\ln p_{kt}\right)^2 (\sigma - 1)\left(\frac{1-\omega}{1+\omega\sigma}\right) \\
&\quad + \left(\left(\frac{1-\omega}{1+\omega\sigma}\right) - \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right)(\sigma-1)\right)\left(\Delta\ln p_{it} - \Delta\ln p_{kt}\right)\left(\Delta\ln w_{it} - \Delta\ln w_{kt}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right)\left(\Delta\ln w_{it} - \Delta\ln w_{kt}\right)^2 \\
\widetilde{\varepsilon}_{i,t}\widetilde{\delta}_{it} &= \left(\frac{(1-\omega)(\sigma-1)}{1+\omega\sigma}\right)\left(\Delta\ln p_{it} - \Delta\ln p_{kt}\right)^2 + \left(\frac{1-\omega\sigma}{1+\omega\sigma}\right)\left(\Delta\ln p_{it} - \Delta\ln p_{kt}\right)\left(\Delta\ln w_{it} - \Delta\ln w_{kt}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right)\left(\Delta\ln w_{it} - \Delta\ln w_{kt}\right)^2
\end{aligned}
$$

右辺に出てくる変数を下記のように変換し、移項すると

$$
\begin{aligned}
Y_{it} &= \left(\Delta\ln p_{it} - \Delta\ln p_{kt}\right)^2 \\
X_{1i,t} &= \left(\Delta\ln w_{it} - \Delta\ln w_{kt}\right)^2 \\
X_{2i,t} &= \left(\Delta\ln w_{it} - \Delta\ln w_{kt}\right)\left(\Delta\ln p_{it} - \Delta\ln p_{kt}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{it} &= \theta_1 X_{1i,t} + \theta_2 X_{1i,t} + u_{it} \\
u_{it} &= \widetilde{\varepsilon}_{i,t}\widetilde{\delta}_{it}\left(\frac{1+\omega\sigma}{(1-\omega)(\sigma-1)}\right) \\
\theta_1 &= \frac{\omega}{(1-\omega)(\sigma-1)} \\
\theta_2 &= \frac{1-\omega\sigma}{(1-\omega)(\sigma-1)}
\end{aligned}
$$

と書くことが可能である。無論、最後の式を線形回帰で推計するには、$X_{1i,t}$ と $X_{2i,t}$ が u_{it} と直行するという追加の仮定が必要となる。しかし、価格とシェアは $\widetilde{\varepsilon}_{i,t}$ と $\widetilde{\delta}_{it}$ と相関を持っており、したがって、$\widetilde{\varepsilon}_{i,t}\widetilde{\delta}_{it}$ すなわち、u_{it} とも相関してしまい、線形回帰で必要な直行条件を満たさない。そこで、このパネル構造を利用し、時間平均をとり、

$$
\overline{Y}_i = \theta_1 \overline{X}_{1i} + \theta_2 \overline{X}_{1i} + \overline{u}_i
$$

を考える。ある商品の需要が変動し、価格が変化したとする。その需要変動そのものは i.i.d. であり、他の商品の需要や供給とも相関していない。無論、価格変化と需要の変動とは相関がある。一方、価格の変化の一部は供給ショックによりもたらされている。仮定から、供給ショックと需要ショックは直行している。とすると、時間平均をとれば、価格変化は需要ショックと供給ショックという互いに直行するショックから作られており、価格変化の時間平均は、需要・供給ショックの積と相関しなくなるのである。これは、商品ダミーと $\overline{u}_i$ との相関を考えると、ゼロになる、すなわち、全ての商品に対して、確率的には等しく $\overline{u}_i$ が生じることを示している[6]。無論、この変換が可能なのは、構造パラメターが時間によらず一定であるという仮定があるためであり、定常性が重要な役割を果たしている。すなわち、弾力性が一定という仮定が決定的な役割を果たしている[7]。

時間平均をとった場合、$\overline{X}_{1i}$ と $\overline{X}_{1i}$ は $\overline{u}_i$ と直行する、ということは、θ_1 と θ_2 は線形回帰による求めることが可能になることを意味する。Feenstra (1994) は、需要・供給の弾力性が数量と価格に関するパネルデータ及び定常性の仮定があれば、単純な回帰分析により求めることが可能になることを示したのである。これは、のちに多くの研究で利用されている。

4 Broda and Weinstein (2010)

Broda and Weinstein (2010)[8]は、Feenstra (1994) の COLI を拡張し、アメリカにおける商品レベルのデータに適用した。国間の貿易データというマクロデータではなく、商品レベルの POS(Point of Sales) データであれば、製造社やブランドの情報が利用可能である。CES 型の効用関数では商品間代替の弾力性を一定と仮定していたが、Broda and Weinstein (2010) はそれを多段階にし、商品間、メーカー間、カテゴリー間の三種類の異なる弾力性を想定した。カテゴリーは時間によってい一定であるが、商品ブランドの種類と商品の種類は時間により変化しうるとし、λ-Ratio を二段階に分けている。具体的には、Broda and Weinstein の COLI は下記のようになる。

$$PI^{BW} = \prod_{g\in G}\left\{\prod_{b\in g}\left[PI^{sv}\left(\frac{\lambda_{bt}}{\lambda_{bt-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma w(b)-1}}\right]^{\Phi_{tw}(b)}\left(\frac{\lambda_{gt}}{\lambda_{gt-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma b(g)-1}}\right\}^{\Phi_{tb}(g)}$$

ただし、$\lambda_{st}\,(s=g,b)$ は、ブランド及び商品レベルの継続商品の支出割合であり、$\sigma w\,(b)$ はブランド内の弾力性、$\sigma b\,(g)$ ブランド間の弾力性である。

---

[6]証明の詳細は、Feenstra (1991) “New Goods and Index Numbers: U.S. Import Prices,” *NBER Working Paper* w3610. を参照せよ。

[7]Abe et al. (2016) は弾力性が可変な場合の推定を行っている。

[8]Broda, C. and Weinstein, D.E. (2010). “Product creation and destruction:evidence and price implications.” *American Economic Review*, 100, 691–723.

$\Phi_{tb}(s)$ 及び $\Phi_{tw}(s)$ は、Sato-Vartia で用いた

$$\Phi_{tw}(s) = \frac{(w_{b1} - w_{b0}) / (\ln w_{b1} - \ln w_{b0})}{\sum_{b \in s} (w_{b1} - w_{i0}) / (\ln w_{b1} - \ln w_{b0})}$$

のブランド内、およびブランド間の対数 Weight である。Feenstra(1994) と異なり、この推計には大量の弾力性の推計が必要となるが、Feenstra (1994) と同様に、線形回帰で求めることが可能となる。