2016年応用マクロ経済学
指数理論 (7)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 28 年 12 月 25 日

概 要

CES 効用関数と Sato-Vartia Index

1 CES 型効用関数

Constant Elasticity of Substitution (CES) 型関数はコブダグラス型やレオンチェフ、線形関数を特殊ケースとして含む関数形であり、生産関数の一つとして 1960 年代に Arrow 達により経済学の世界に導入された。現在では、生産のみではなく、効用関数としても頻繁に用いられており、特に、Dixit and Stiglitz (1977)[1]が発表されて以降、国際経済や経済成長理論、景気循環理論分析において多用されるようになっており、特に独占的競争市場を用いる New Keynesian DSGE モデルにおいては中心的な役割を果たしている。

物価指数理論においても、CES 効用関数の場合の生計費指数はラトガース大学の佐藤和夫とヘルシンキ大学の Yrjö Vartia により[2]、1970 年代にほぼ同時に、独立して研究され、Sato-Vartia index と呼ばれている。その後も財の Variety Expansion Effects を捉える一手法として、Feenstra (1994)[3]や Broda and Weinstein (2010)[4]等、近年においても研究が盛んにおこなわれている。Feenstra 達の研究は指数理論というよりも経済分析を主眼においているが、その基本となる Sato-Vartia index の特徴を把握することは重要である。本講

[1]Dixit, Avinash K & Stiglitz, Joseph E, (1977). "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity," *American Economic Review,* American Economic Association, vol. 67(3), pages 297-308, June.

[2]Sato K. (1976). The ideal log-change index number, *The review of Economics and Statistics*, 58, n. 2, 223-228.

Vartia Y. O. (1976). Ideal log-change index numbers, *Scandinavian Journal of Statistics*, 3, 121-126.

[3]Feenstra, R.C. (1994). "New product varieties and the measurement of international prices." *American Economic Review*, 84(1), 157–77.

[4]Broda, C. and Weinstein, D.E. (2010). "Product creation and destruction: evidence and price implications." *American Economic Review*, 100, 691–723.

義ノートでは、CES 型効用関数における双対性の特徴と生計費指数を求めてみよう。

2 CES 型効用関数の需要関数と支出関数

効用関数を下記のような CES 型と仮定しよう。

$$U_t = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it} q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\sigma > 1, a_{it} > 0, \sum_{i=1}^{n} a_{it} = 1$$

q_{it} は i 財の消費数量である。無論、$\sigma = 1$ の時はコブ・ダグラス型、$\sigma = \infty$ の時は線形となる。なお、$\sigma > 1$ の仮定は、右下がりの需要曲線を導出する際に、独占企業の利潤が無限にならないようにするための仮定であり、独占企業を仮定しない場合はその必要はなく、$\sigma > 0$ であれば凹関数となり、効用最大化と矛盾しない。そして、$\sigma = 0$ の時には効用関数はレオンティエフとなる。

まず、この効用関数に対応する支出関数を求めてみよう。

$$\min \sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}$$

$$s.t. \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it} q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \geq U_t$$

すると、一階条件は

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{it} q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} a_{it} q_{it}^{\frac{-1}{\sigma}} &= \lambda p_{it} \\ &= a_{it} U_t^{\frac{1}{\sigma}} q_{it}^{\frac{-1}{\sigma}}\end{aligned}$$

λ はラグランジュ乗数である。したがって、

$$\begin{aligned}U_t^{\frac{1}{\sigma}} a_{it} q_{it}^{\frac{-1}{\sigma}} &= \lambda p_{it} \\ q_{it} &= a_{it}^{\sigma} \left(\lambda p_{it}\right)^{-\sigma} U_t\end{aligned}$$

これを予算制約式に代入すると、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it} &= \sum_{i=1}^{n} p_{it} a_{it}^{\sigma} \left(\lambda p_{it}\right)^{-\sigma} U_t \\ &= \lambda^{-\sigma} U_t \sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma} \\ &= I_t\end{aligned}$$

ただし、I_t は外生で与えられる支出総額 (所得) である。したがって、

$$\lambda^{-\sigma} = U_t^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma} \right)^{-1} I_t$$

これを一階条件に代入して

$$\begin{aligned}
q_{it} &= a_{it}^{\sigma} \left(\lambda p_{it} \right)^{-\sigma} U_t \\
&= a_{it}^{\sigma} U_t p_{it}^{-\sigma} \lambda^{-\sigma} \\
&= a_{it}^{\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma} \right)^{-1} I_t \\
&= \frac{a_{it}^{\sigma} I_t p_{it}^{-\sigma}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma}}
\end{aligned}$$

これを効用関数に代入すると間接効用関数を得る。すなわち、

$$\begin{aligned}
V\left(p, I\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it} q\left(p, I\right)_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it} \left(\frac{a_{it}^{\sigma} I_t p_{it}^{-\sigma}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it} \frac{a_{it}^{\sigma-1} I_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} p_{it}^{-(\sigma-1)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(I_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \sum_{i=1}^{n} a_{it} \frac{a_{it}^{\sigma-1} p_{it}^{-(\sigma-1)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= I_t \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= I_t \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{1/\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= I_t \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{-1}{1-\sigma 1}}
\end{aligned}$$

これを I_t についてとくと、

$$I_t = V \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

これは、支出関数であり、下記のように書くことが可能である。

$$E\left(p, U_t\right) = U_t \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

CES 効用関数はホモセティックであり、支出関数は効用水準に関する線形関数となる。単位効用当たりの支出関数を一般物価として下記のよう定義すると、

$$P_t = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

個別財への需要は

$$\begin{aligned} q_{it} &= \frac{a_{it}^{\sigma} I_t p_{it}^{-\sigma}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it}^{1-\sigma} a_{it}^{\sigma}} \\ &= \frac{a_{it}^{\sigma} I_t p_{it}^{-\sigma}}{P_t^{1-\sigma}} \\ &= I_t \frac{a_{it}^{\sigma} p_{it}^{-\sigma}}{P_t^{1-\sigma}} \\ &= \frac{I_t}{P_t} \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t} \right)^{-\sigma} \end{aligned}$$

となる。すなわち、個別財への需要量は相対価格と実質所得に依存しており、相対価格の弾力性は $-\sigma$ となっている。これを価格に関して整理すると、

$$\begin{aligned} p_{it}^{-\sigma} &= \frac{q_{it} P_t^{1-\sigma}}{I_t a_{it}^{\sigma}} \\ p_{it} &= \left(\frac{q_{it} P_t^{1-\sigma}}{I_t a_{it}^{\sigma}} \right)^{\frac{-1}{\sigma}} \\ p_{it} q_{it} &= q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} P_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} a_{it} \\ \sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it} &= P_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} \sum_{i=1}^{n} a_{it} q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\ &= P_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} U_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\ &= (U_t P_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} = I_t \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} (U_t P_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} &= I_t \\ (U_t P_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} &= I_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\ U_t P_t &= I_t \end{aligned}$$

これは、

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it} = U_t P_t$$

が成立することを意味している。

これを用いて需要関数から所得 I_t を消去することが可能であり、

$$
\begin{aligned}
q_{it} &= \frac{I_t}{P_t}\left(\frac{a_{it}p_{it}}{P_t}\right)^{-\sigma} \\
&= U_t\left(\frac{a_{it}p_{it}}{P_t}\right)^{-\sigma}
\end{aligned}
$$

とマクロ経済学でよく見かける形になる。標準的な New Keynesian モデルでは $a_{it}=1$ を仮定しているため、需要曲線はさらに単純になる。

3 CES 型効用関数における生計費指数-Sato-Vartia

効用水準を 0 期で固定し、二時点における支出関数の比、すなわち Laspeyres-Konüs の真の生計費指数を CES 型効用関数の場合で計算すると、下記のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{E\left(p^1,U_0\right)}{E\left(p^0,U_0\right)} &= \frac{U_0\left(\sum_{i=1}^{n}a_{it}^{\sigma}p_{i1}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}{U_0\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i0}^{\sigma}p_{i0}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{it}^{\sigma}p_{i1}^{1-\sigma}}{\sum_{i=1}^{n}a_{i0}^{\sigma}p_{i0}^{1-\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{it}^{\sigma}p_{i0}^{1-\sigma}}{\sum_{k=1}^{n}a_{k0}^{\sigma}p_{k0}^{1-\sigma}}\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}
\end{aligned}
$$

ここで、一階条件

$$
\begin{aligned}
q_{it} &= a_{it}^{\sigma}\left(\lambda p_{it}\right)^{-\sigma}U_t \\
p_{it}q_{it} &= \lambda^{-\sigma}a_{it}^{\sigma}p_{it}^{1-\sigma}U_t \\
a_{it}^{\sigma}p_{it}^{1-\sigma} &= p_{it}q_{it}\lambda^{-\sigma}U_t^{-1}
\end{aligned}
$$

を用い、かつ、$a_{it}=a_{i0}$ を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{E\left(p^1, U_0\right)}{E\left(p^0, U_0\right)} &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_{i0}^\sigma p_{i0}^{1-\sigma}}{\sum_{k=1}^n a_{k0}^\sigma p_{k0}^{1-\sigma}} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0} \lambda^{-\sigma} U_0^{-1}}{\sum_{k=1}^n p_{k0} q_{k0} \lambda^{-\sigma} U_0^{-1}} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}{\sum_{k=1}^n p_{k0} q_{k0}} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}}{\sum_{k=1}^n p_{k0} q_{k0}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n w_{i0} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}
\end{aligned}
$$

これが通常の定義に従う Laspeyres-Konüs の真の生計費指数である。これを求めるためには、支出シェアと価格比に加え、弾力性 σ を用いねばならないことに注意されたい。この弾力性の値は非常に重要な構造パラメターであり、別途推計する必要がある。

次に、同じ真の生計費指数を異なる手法、対数階差を用いて計算してみよう。まず、需要関数を変形し、

$$
\begin{aligned}
q_{it} &= U_t \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t}\right)^{-\sigma} \\
\frac{p_{it} q_{it}}{E_t} &= \frac{U_t}{E_t} \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t}\right)^{-\sigma} p_{it} \\
&= \frac{U_t P_t}{E_t} \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t}\right)^{1-\sigma} \\
w_{it} &= \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t}\right)^{1-\sigma}
\end{aligned}
$$

両辺の対数をとり、

$$
\ln w_{it} = (1-\sigma) \ln a_{it} + (1-\sigma) \ln p_{it} - (1-\sigma) \ln P_t
$$

したがって、

$$
\ln P_t = \frac{1}{(1-\sigma)} \ln w_{it} - \ln a_{it} + \ln p_{it}
$$

ここで a_{it} が一定と仮定して、対数階差をとると、

$$
\ln P_1 - \ln P_0 = \frac{1}{(1-\sigma)} \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right) + \left(\ln p_{i1} - \ln p_{i0}\right)
$$

さらに、

$$
s_i = \frac{\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}
$$

と定義する。なお、

$$\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}-w_{i0})=\sum_{i=1}^{n}w_{i1}-\sum_{i=1}^{n}w_{i0}=0$$

であることに注意されたい。

分母と分子の関係から明らかに、

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=1$$

が成立する。s_i を Weight にして対数階差の加重平均をとると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln P_1-\ln P_0\right)\\
&=\left(\ln P_1-\ln P_0\right)\sum_{i=1}^{n}s_i\\
&=\left(\ln P_1-\ln P_0\right)\\
&=\frac{1}{(1-\sigma)}\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln w_{i1}-\ln w_{i0}\right)+\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln p_{i1}-\ln p_{i0}\right)\\
&=\frac{1}{(1-\sigma)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(w_{i1}-w_{i0})\,/\,(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}{\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}-w_{i0})\,(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}\left(\ln w_{i1}-\ln w_{i0}\right)+\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln p_{i1}-\ln p_{i0}\right)\\
&=\frac{1}{(1-\sigma)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(w_{i1}-w_{i0})}{\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}-w_{i0})\,(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}+\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln p_{i1}-\ln p_{i0}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln p_{i1}-\ln p_{i0}\right)
\end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$\ln P_1-\ln P_0=\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln p_{i1}-\ln p_{i0}\right)$$

両辺の exponential をとると

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\ln P_1-\ln P_0\right)\\
&=\exp\left(\ln P_1\right)/\exp\left(\ln P_0\right)\\
&=\frac{P_1}{P_0}\\
&=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\left(\ln p_{i1}-\ln p_{i0}\right)\right)\\
&=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{p_{io}}\right)^{s_i}
\end{aligned}$$

$$s_i=\frac{(w_{i1}-w_{i0})\,/\,(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}{\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}-w_{i0})\,/\,(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}$$

となる。すなわち、CES 型効用関数の単位支出関数の比、すなわち COLI は

$$PI^{sv} = \frac{P_1}{P_0} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} \right)^{s_i}$$

としても表すことが可能である。この公式は 1970 年代にほぼ同時に独立して見出した二人の研究者に敬意を表し、Sato-Vartia 型物価指数と呼ばれる。前に導いた COLI と異なり、この物価指数には弾力性 σ が出てこない。その代り、基準時と比較時の二時点における支出シェアの情報が必要であるが、それらは Fisher や Törnqvist の計算でも必要なものでもある。CES 型効用関数において弾力性は極めて重要なパラメターであるにも関わらず、そのパラメターの値を知らなくとも COLI の推計が可能であることにこの指数算式の意義がある。直観的には、弾力性の情報は、価格変化と数量変化に反映されており、それはウェイトの変化として現れているのである。この Sato-Vartia 型物価指数に対応する数量指数を

$$QI^{sv} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{s_i}$$

としよう。このとき、$PI^{sv}QI^{sv}$ はどうなるだろうか?その前に対数平均の復習をしよう。。

一般に二つの正の値 a と b の対数平均を導入しよう。対数平均は下記で定義される。

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \frac{a-b}{\ln(a/b)} \quad \text{if } a \neq b \\ &= a \quad \text{if } a = b \end{aligned}$$

これはどのように解釈できるだろうか?連続微分可能な関数 $f : R_{++} \to R$ には中間値の定理が成立し、$a \neq b$ であれば

$$\frac{f(a) - f(b)}{a-b} = \frac{df(m)}{dx}$$

となる m が常に、$a < m < b$ の中に存在する。ここで、$f(x) = \ln x$ としよう。すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{f(a) - f(b)}{a-b} \\ m &= \frac{a-b}{\ln a - \ln b} \\ &= \frac{a-b}{\ln(a/b)} \end{aligned}$$

となり、m は a と b の対数平均となる。すなわち、対数平均とは、対数関数の二点間の傾きと微分係数が一致する点を意味する。

さて、二時点における財 i の支出シェアの対数平均は

$$L\left(w_{i1}, w_{i0}\right) = \frac{w_{i1} - w_{i0}}{\ln\left(w_{i1}/w_{i0}\right)}$$

したがって、

$$w_{i1} - w_{i0} = \ln\left(w_{i1}/w_{i0}\right) L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)$$

この和はゼロであるから、

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(w_{i1} - w_{i0}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(w_{i1}/w_{i0}\right) L\left(w_{i1}, w_{i0}\right) = 0
\end{aligned}$$

であった。

$$w_{it} = \frac{p_{it}q_{it}}{E_t}$$

だから、

$$\sum_{i=1}^{n} \ln\left(w_{i1}/w_{i0}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(p_{i1}q_{i1}\right) - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(p_{i0}q_{i0}\right) - \ln\left(E_1\right) + \ln\left(E_0\right)$$

よって、

$$\sum_{i=1}^{n} L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)\left(\ln\left(p_{i1}q_{i1}\right) - \ln\left(p_{i0}q_{i0}\right) - \ln\left(E_1\right) + \ln\left(E_0\right)\right) = 0$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\ln\left(E_1\right) - \ln\left(E_0\right) &= \frac{\sum_{i=1}^{n} L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)\left(\ln\left(p_{it}q_{it}\right) - \ln\left(p_{it}q_{it}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)\left(\ln\left(p_{i1}/p_{i0}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)} + \frac{\sum_{i=1}^{n} L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)\left(\ln\left(q_{i1}/q_{i0}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} L\left(w_{i1}, w_{i0}\right)}
\end{aligned}$$

この exponential をとり整理すると、

$$\begin{aligned}
\frac{E_1}{E_0} &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{s_i} \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}}\right)^{s_i} \\
&= PI^{sv}QI^{sv}
\end{aligned}$$

すなわち、Sato-Vartia 指数は Factor Reversal を満たすのである[5]。Factor Reversal は非常に強い性質であり、この公理とほかのいくつかの公理を組み合わせると Fisher 指数しか残らなくなってしまう。したがって Sato-Vartia 指数は、いくつかの基本公理を満たさないはずである。その一つは単調性であ

[5]Fattore (2007) "A Characterization of the Sato-Vartia Price Index," *Working Papers, 2007601*, Univertia degli Studi di Milano-Bicocca, Dipeartimento di Statistica. は、加重幾何平均を用いる物価指数の中で、Sato-Vartia のみが Factor Reversal を満たすことを示している。

り、これは Sato-Vartia に限定された問題ではなく、単調性の欠如は対数階差を用いる指数で、基準時か比較時いずれかのシェアを用いる指数 (Törnqvist 指数を含む) に共通する問題であることが知られている[6]。しかし、これは考えてみればおかしな性質である。CES 型効用関数の COLI として導出されている限り、生計費指数は物価に関して単調性を満たさねばならないはずである。商品価格の上昇は個人の購入機会集合を縮小させるので、同じ厚生を実現させるためには、支出水準は上昇することはあっても低下することはあり得ない。では、CES 型効用関数の COLI になる Sato-Vartia はなぜ単調性をみたさないのだろうか?これは、CES 型効用関数に課していたパラメターへの制約、すなわち、代替の弾力性 $\sigma > 1$、あるいは $\sigma > 0$ の仮定が Sato-Vartia では課されていないことによる。$\sigma < 0$ のような、経済学的には正当化されないケースも Sato-Vartia には含まれているのである。このようなとき、Törnqvist 指数の時と同様に、数量を一定として価格だけ上昇させると、Weight が急激に低下し、全体の物価を引き下げてしまう可能性があるのである。

[6]Reinsdorf, M.B., Dorfman, A.H., 1999. The Sato?Vartia index and the monotonicity axiom. *Journal of Econometrics* 90, 45-61.