2016年応用マクロ経済学
指数理論 (4)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成28年11月17日

概 要

公理アプローチ 3 各種物価指数算式、特にStuvel指数に関して

1 Fisher指数以外の指数算式

前の講義ノートで、Value Index、すなわち二期間の支出額の比を下記のように定義した。

$$V_{0t} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_j p_{j0} q_{j0}} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0}$$

ここで、数量が同一のベクトルでない限り、価格変化比で集計する場合、総和が1のWeightにならず、また物価が変わらずに数量が変わるだけでもValue Indexは変動するため、物価指数とみなすことはできない。そこで、Laspeyresは基準時の、Paashceは比較時の数量ベクトルで固定することで、「平均」的な物価変動を価格比によって捉えようとしている。もしも両時点での情報を利用可能なのであれば、二期で共通のWeightとし二つの数量のなんらかの平均 $m\left(q_{i0}, q_{i1}\right)$ を用いることが可能であろう。

1.1 Maashall-Edgeworth 指数

Marshall -Edgeworth 指数[1]は下記で定義される

$$PIME\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_{i1}\left(\frac{q_{i0}+q_{i1}}{2}\right)}{\sum_{j=1}^{n}p_{j0}\left(\frac{q_{j0}+q_{j1}}{2}\right)}.$$

すなわち、$m\left(q_{i0},q_{i1}\right)=\frac{q_{i0}+q_{i1}}{2}$ と算術平均を用いている。

1.2 Walsh 指数

Walsh 指数[2]は下記で定義される。

$$PIW\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_{i1}\sqrt{q_{i0}q_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n}p_{j0}\sqrt{q_{j0}q_{j1}}},$$

これらの二つの指数はよく似ているが、数量に関する不変性 (前回の講義ノートの (T-7), (T-8)、すなわち、$\lambda>\mathbf{0}$ に関して、

$$PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=PI\left(\lambda\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\lambda\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)$$

を満たすのは、明らかに Walsh 指数のほうであり、Marshall -Edgeworth 指数は $\mathbf{q}_t$ に関してゼロ次同次ではないため、この性質を満たさない。これは、国間の比較を考えるとはっきりする。大国と小国の物価水準を考える際、Marshall -Edgeworth 指数は大国の値に引きずられる傾向があり、もしも片方の Weight、すなわち大国の大きさを無限に拡大していくと、物価指数は大国の物価にほぼ等しくなってしまう。数量情報がなくとも、支出シェアの情報から Walsh 指数は計算可能である。多少複雑だが下記のようになる。

[1]Marshall (1887) と Edgeworth (1925) がその名前の根拠としてい引用されているが、私には彼らの論文・著作のどこの箇所にその記述があるかまだ見つけられていない …

[2]Walsh, C.M. (1921), *The Problem of Estimation*, London: P.S. King & Son. は http://www.unz.org/Pub/WalshCorrea-1921 で読むことができる。Walsh 指数は p.97 で議論されている。また、Fisher への公開討論の様子が下記に書かれている。

Walsh (1921) "The Best Form of Index Number: Discussion," *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, 17, No. 133, pp. 537-544.

$$PIW\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_{i1}\sqrt{q_{i0}q_{i1}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}p_{j0}\sqrt{q_{j0}q_{j1}}}$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\sqrt{p_{i0}p_{i1}}\sqrt{q_{i0}q_{i1}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_{j0}}{\sqrt{p_{j0}p_{j1}}}\right)\sqrt{p_{j0}p_{j1}}\sqrt{q_{j0}q_{j1}}}$$

$$\text{右辺分子}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\frac{\sqrt{p_{i0}q_{i0}p_{i1}q_{i1}}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_{i0}q_{i0}}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_{i1}q_{i1}}}$$

$$\text{右辺分母}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_{j0}}{\sqrt{p_{j0}p_{j1}}}\right)\frac{\sqrt{p_{j0}q_{j0}p_{j1}q_{j1}}}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_{i0}q_{i0}}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_{i1}q_{i1}}}$$

$$PIW\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_{j0}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}}}$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i0}}}{\sqrt{p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}}}$$

分母と分子の価格比の 0 と 1 の位置が逆になっていることに注意する必要がある。

Walsh 指数は Factor Reversal、すなわち要素転逆性を満たさない。Factor Reversal は

(T-5)　要素転逆性 (Factor Reversal)
価格と数量を入れ替えた場合、価格指数と数量指数も入れ替わり、その積は Value Index と一致する。すなわち、

$$PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)PI\left(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1\right)=\frac{\mathbf{q}_1'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}$$

であった。すなわち、価格と数量を入れ替えた値と、物価指数を乗じると Value Index となり、価格と数量を入れ替えたものは数量指数をみなすこと

が可能となる。Walsh 指数で価格と数量を入れ替えると、

$$\begin{aligned} QIW\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) &= PI\left(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1}\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n} q_{j0}\sqrt{p_{j0}p_{j1}}} \end{aligned}$$

そして、

$$QIW\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) PI\left(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1}\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n} q_{j0}\sqrt{p_{j0}p_{j1}}} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\sqrt{q_{i0}q_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n} p_{j0}\sqrt{q_{j0}q_{j1}}}$$

支出シェア公式を用いると

$$\begin{aligned} \text{右辺分子} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}} \times \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{q_{i1}}}{\sqrt{q_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}} \\ \text{右辺分母} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{p_{j0}}}{\sqrt{p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}} \times \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{q_{i0}}}{\sqrt{q_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}} \end{aligned}$$

ここで、もしも Walsh の物価・数量指数の積が

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{q_{i1}}}{\sqrt{q_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\left(\frac{\sqrt{q_{i1}}}{\sqrt{q_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}$$

を見たせばよいのだが、残念ながら成立せず、そのため Walsh の数量・物価指数の積は Value Index と一致しない。下記のような価格と数量の組み合わせを考えてみよう

時期	p1	p2	q1	q2	支出
0	10	10	10	20	300
1	20	10	5	25	350

この場合の各主要物価・数量指数は下記のようになる

Walsh Price	1.29
Walsh Quantity	0.939
Las Price	1.333
Las Quantity	1
Paa Price	1.167
Paa Quantity	0.875
Fisher Price	1.247
Fisher Quantity	0.935
Value Index	1.1667
Walsh Price×Quantity	1.214
Fisher Price×Quantity	1.1667

Fisher 指数は、数量指数と物価指数を乗じると Value Index と一致するが、Walsh の場合は一致しないことがわかる。

1.3 Young 指数

ここまでは、基準時を 0、比較時を 1 とし、そこにおける数量、価格の情報を用いてきたが、価格比を計算する二時点と数量を調査する時点が異なることがある。たとえば、詳細な家計調査をある年に行い、それを Weight として採用するが、物価の変化は他の時点を基準に考えたいときである。去年に比べて物価が何パーセント変化したかを、4 年前の数量を用いて計算することは実際には頻繁に行われている。基準時点として、0 でも 1 でもない、b という時点を想定し、そこにおける支出シェアをまず下記のように定義する

$$s_{ib} = \frac{p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ib}q_{ib}}$$

18 世紀から 19 世紀にかけて活躍したイギリスの農業経済学者 (政治算術)、Young が 1812 年に考案した Young 指数は下記で定義される。

$$PIY\left(\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) s_{ib}$$

これは Laspeyres 指数の近似となる。具体的には、

$$\begin{aligned} PIY - PL &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)(s_{ib} - s_{i0}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PL\right)(s_{ib} - s_{i0}) \end{aligned}$$

すなわち、相対価格と Laspeyres 指数とのかい離、および二時点間でのシェアの変化の共分散に両者のかい離は一致する。このかい離は、相対価格の変化が大きいと、シェアが上昇するか下降するか、を意味しており、需要システムを考えると負になる可能性が高い。すなわち、Young 指数は Laspeyres よりも小さくなるだろう。

1.4 Stuvel 指数

Factor Reversal、すなわち数量指数と価格指数が数量と価格ベクトルに関して対象に定義され、さらに乗じると Value Index になる、という公理、あるいは要請は非常に厳しく、Fisher 指数が数多い指数の中で望ましいと言われる最大の要因である。Stuvel (1957)[3]は、Factor Reversal を重視し、Fisher とは異なるアプローチを提唱した。

まず、i 財のレベルで考える。t 期での i 財への支出額を v_{it} とすると、

$$v_{it} = p_{it}q_{it}$$

となる。支出額の変分は

$$\begin{aligned}
\Delta v_{it} &= v_{it} - v_{i0} \qquad (1)\\
&= p_{it}q_{it} - p_{i0}q_{i0}\\
&= p_{i0}q_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - p_{i0}q_{i0}\\
&= v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0}\\
&= v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0} + v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) - v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\\
&= v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1\right) + v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1\right)
\end{aligned}$$

と書くことができる。また、価格と数量を逆にして

$$\begin{aligned}
\Delta v_{it} &= v_{it} - v_{i0} \qquad (2)\\
&= v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0}\\
&= v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0} + v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right)\\
&= v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right)\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1\right) + v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1\right)
\end{aligned}$$

[3]Stuvel (1957) "A New Index Number Formula" *Econometrica*, Vol. 25, No. 1, pp. 123-131

とも書くことができる。すなわち、同じ値をとるべき下記の二式を得る。

$$\begin{aligned}\Delta v_{it} &= v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)+v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)\\ &= v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right)\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)+v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)\end{aligned}$$

Stuvel は、この両式の単純平均をとり

$$\begin{aligned}\Delta v_{it} &= v_{i0}\frac{\frac{p_{it}}{p_{i0}}+1}{2}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)+v_{i0}\frac{\frac{q_{it}}{q_{i0}}+1}{2}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)\\ A_i &= v_{i0}\frac{\frac{p_{it}}{p_{i0}}+1}{2}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)\\ B_i &= v_{i0}\frac{\frac{q_{it}}{q_{i0}}+1}{2}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)\end{aligned}$$

という式を導出する。Stuvel は A_i、数量変化が引き起こす平均的な支出額の変化であり、B_i は価格変化が引き起こす平均的な支出額変化と解釈している。

これを i に関して集計すると、

$$\sum_{i=0}^{n}\Delta v_{it}=\sum_{i=0}^{n}A_i+\sum_{i=0}^{n}B_i$$

$V_0=\sum_{i=0}^{n}v_{i0}$、$A=\sum_{i=0}^{n}A_i, B=\sum_{i=0}^{n}B_i$ とすると

$$V_1-V_0=A+B$$

となる。Stuvel は、望ましい物価指数 PI と数量指数 QI は A_i と B_i の定義式のアナロジーで

$$\begin{aligned}A &= V_0\frac{PI+1}{2}(QI-1)\\ B &= V_0\frac{QI+1}{2}(PI-1)\end{aligned}$$

をみたすものと定義する。問題は、この関係式をみたす PI と QI を見つけることである。両式を足すと

$$\begin{aligned}A+B &= V_0\frac{PI+1}{2}(QI-1)+V_0\frac{QI+1}{2}(PI-1)\\ &= V_0\frac{PI+1}{2}QI-V_0\frac{PI+1}{2}+V_0\frac{QI+1}{2}PI-V_0\frac{QI+1}{2}\\ &= \left(\frac{V_0}{2}\right)(PIQI+QI-PI-1+QIPI+PI-QI-1)\\ &= \left(\frac{V_0}{2}\right)(2PIQI-2)\\ &= V_0(PIQI-1)\end{aligned}$$

両式の差をとると、

$$
\begin{aligned}
A - B &= V_0 \frac{PI+1}{2} (QI - 1) - V_0 \frac{QI+1}{2} (PI - 1) \\
&= \left(\frac{V_0}{2} \right) (PIQI + QI - PI - 1 - QIPI - PI + QI + 1) \\
&= V_0 (QI - PI)
\end{aligned}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
V_1 - V_0 &= A + B \\
&= V_0 (PIQI - 1) \\
&= V_0 PIQI - V_0
\end{aligned}
$$

したがって、

$$PIQI = \frac{V_1}{V_0}$$

が成立する。これは、物価指数と数量指数を乗じると Value Index になることを示しており、望ましい性質である。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
A - B &= V_0 \left(QI - \frac{1}{QI} \frac{V_1}{V_0} \right) \\
&= V_0 QI - \frac{V_1}{QI}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
(A - B) QI &= V_0 QI^2 - V_1 \\
QI^2 + (B - A) \frac{QI}{V_0} - \frac{V_1}{V_0} &= 0
\end{aligned}
$$

これは数量指数に関する二次方程式であり、非負の階は

$$QI = \frac{A - B}{2V_0} + \sqrt{\left(\frac{(B - A)}{2V_0} \right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}$$

同様に物価指数も導出可能であり、

$$PI = \frac{B - A}{2V_0} + \sqrt{\left(\frac{(B - A)}{2V_0} \right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}$$

残るはＡとＢである。

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=0}^{n} v_{i0} \frac{\frac{p_{it}}{p_{i0}}+1}{2}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}+1\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} p_{i0}q_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}+1\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} \left(p_{it}+p_{i0}\right)\left(q_{it}-q_{i0}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{i=0}^{n} v_{i0} \frac{\frac{q_{it}}{q_{i0}}+1}{2}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}+1\right)\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} p_{i0}q_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}+1\right)\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} \left(q_{it}+q_{i0}\right)\left(p_{it}-p_{i0}\right)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\frac{A-B}{V_0} &= \left(\frac{1}{2V_0}\right)\sum_{i=0}^{n}\left(\left(p_{it}+p_{i0}\right)\left(q_{it}-q_{i0}\right)-\left(q_{it}+q_{i0}\right)\left(p_{it}-p_{i0}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2V_0}\right)\sum_{i=0}^{n}\left(-2p_{it}q_{i0}+2p_{i0}q_{it}\right) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n} p_{i0}q_{it}}{\sum_{i=0}^{n} p_{i0}q_{i0}} - \frac{\sum_{i=0}^{n} p_{it}q_{i0}}{\sum_{i=0}^{n} p_{i0}q_{i0}} = QI^L - PI^L
\end{aligned}$$

すなわち、Laspeyres の数量指数と物価指数の引き算に等しい。したがって、Stuvel の数量・物価指数は下記のようになる。

$$\begin{aligned}
QI^{SV} &= \frac{QI^L - PI^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{QI^L - PI^L}{2}\right)^2 + \frac{V_1}{V_0}} \\
PI^{SV} &= \frac{PI^L - QI^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{QI^L - PI^L}{2}\right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}
\end{aligned}$$

さて、Stuvel 物価指数をみると、Laspeyres 物価・数量指数と Value Index の関数となっているが、なぜこれが物価指数と解釈できるのかはっきりしな

い。まず全ての価格が二期間でまったく変わっていないときのことを考えよう。このとき、当然ながら $PI^L = PI^P = 1$ となり、Value Index は QI^L に等しくなる。したがって、

$$\begin{aligned} PI^{SV} &= \frac{1-QI^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{QI^L-1}{2}\right)^2 + QI^L} \\ &= \frac{1-QI^L}{2} + \sqrt{\frac{QI^{L2}+2QL+1}{4}} \\ &= \frac{1-QI^L}{2} + \frac{1+QI^L}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり、恒等性 (Identity) を満たすことがわかる。次に、比較時の価格が基準時に比べ上昇し、しかし数量は全く変わらないとしよう。このとき、$QI^L = QI^P = 1$ となる。したがって、Value Index は PI^L に一致する。すなわち、

$$\begin{aligned} PI^{SV} &= \frac{PI^L-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-PI^L}{2}\right)^2 + PI^L} \\ &= \frac{PI^L-1}{2} + \frac{1+PI^L}{2} \\ &= PI^L \end{aligned}$$

よって、これは比較時価格の上昇関数、基準時価格の減少関数であり、単調性 (Monotonicity) を満たす。次に、Stuvel 物価・数量指数は Laspeyres 物価・数量指数と Value Index のみの関数であり、両者は次元性 (Dimensionality)、および位無差別性 (Commensurability) を満たす。すなわち、Stuvel 物価指数や数量指数は各指数が満たすべき望ましい性質をかなり兼ね備えていることがわかる。さらに、Fisher 指数の最大の利点であった要素転逆 (反転性、Factor Reversal) を満たすことも明らかである。これがゆえに、Stuvel は自らの指数に自信を持ち、1989 年には刺激的なタイトルの本を出版し、自らの指数の宣伝を行っている[4]。しかしながら、やはりこの物価指数は、Laspeyres や Fisher と異なり、直感的にその性質を理解するのが難しい。Vogt(1981)[5]は下記のような性質を指摘している。

まず、Stuvel の数量指数と物価指数の引き算をとると、

$$\begin{aligned} PI^{SV} - QI^{SV} &= PI^L - QI^L \\ QI^L - QI^{SV} &= PI^L - PI^{SV} \end{aligned}$$

となる。すなわち、Laspeyres 数量、物価指数との差が等しいという性質がある。この $QI^L - QI = PI^L - PI$ と Factor Reversal、すなわち、$PIQI = V_1/V_0$

[4]G.Stuvel (1989) *The Index Number Problem and Its Solution*, Intl Specialized Book Service, Inc.

[5]A. Vogt (1981) "Characteizations of Indices, Especially of the Stuvel and the Banerjee Index," *Statistishce Hefte* 21, 66-71.

をみたす PI と QI を考えてみよう。PI を消去すると、

$$\begin{aligned} PI &= QI + PI^L - QI^L \\ QI\left(QI + PI^L - QI^L\right) &= V_1/V_0 \\ QI^2 + (PI^L - QI^L)QI - V_1/V_0 &= 0 \end{aligned}$$

さいごの二次方程式の非負の解は

$$QI = \frac{(QI^L - PI^L)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(QI^L - PI^L)}{2}\right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}$$

となり、Stuvel 数量指数と一致する。同様に Stuvel 物価指数も導出可能である。すなわち、Stuvel の物価・数量指数は Factor Reversal を満たし、かつ、Laspeyres 数量および価格指数とのかい離の大きさが等しい指数と定義することも可能である。ある指数が、Laspeyres を基準として、そこからのかい離の幅が数量と価格のいずれも同じ程度のものであるような、そして数量と価格指数がうまく定義されているような指数が Stuvel 指数であるということができる。

Stuvel 指数が他の指数と大きく異なるのは、議論の出発点を変化率でなく、変化量、$\Delta v_{it} = v_{it} - v_{i0}$ にしている点にある。支出変化の割合ではなく、の絶対額の変分である。そしして、支出の変化を価格変化によるものと数量変化によるものの二つの和、$V_1 - V_0 = A + B$ と、A を価格変化によもの、B を数量変化によるもの、と解釈するのである。支出総額の変化を加法で分解するとした場合、確かに Stuvel 指数は自然な方法である。(1) と (2) の単純平均をとっている点は不自然であるが、それを加重平均として一般化することは容易である。また、その場合、(1) のみを用いると Laspeyres に、(2) のみを用いると Paasche に、そして様々な Weight を用いると、Fisher 指数などと同じになることが知られている[6]。Stuvel 指数は、指数が満たすべき多くの公理を満たす[7]。しかしながら、Stuvel 指数の最大の欠点としてよく指摘されるのが、linear Homogeneity を満たさないことである。これは、価格ベクトルに関して線形になっていないことから明らかである。また、数学的には望ましい性質を有するとしても、Stuvel 指数の直感的な解釈が非常に困難であることも普及の大きな妨げとなっている。Stuvel(1957) は、その指数が Laspeyres および Value Index という、経済学的解釈が非常に明快な変数のみに依存していることを強調しているが、なぜ平方根なのか、数学の展開なしにその意味を理解することは困難である。Paashce や Fisher 物価指数は、数量が基準時よりも大きく変化すると、物価指数の値も大きく変化する。その意味では、物価指数は価格のみでなく、数量の変化の関数でもある。としたら、Stuvel 物価指数が数量指数に依存していることも、それほど不自然な

[6]興味があるものは Lippe (2007) の p.157 を参照せよ。

[7]Circularity、循環性もみたす、とする論文もときおり見かけるが、おそらく間違いである。

ことではないかもしれない。Value Index の変化を下方に分解するという点では非常に優れており、かつ多くの公理をみたしている点では注目に値するが、直感にアピールしないこと、および Linear Homogeneity を満たさないことからも 1960 年以降の指数理論の展開においては、Stuvel 指数はほとんど議論されることはなかった。

しかしながら、Stuvel 指数に対する関心は近年復活しつつある。Balk (1997)[8]は、GDP 等の多くのカテゴリーを含む指数を念頭におき下記の三要件をまず挙げる。

(1)　各カテゴリーにおける物価指数と数量指数の積は Value Index に等しくなければならない (Factor Reversal)

(2)　カテゴリー毎に計算し、そのうえで集計した場合と、全てを Pool して集計した場合で、その値は一致しなければならない。

(3)　もしも全てのカテゴリーにおける値が同じであれば、総合値も同じにならねばならない。

そして、Balk (1997) は、これら三つの性質を同時にみたすのは Stuvel 指数しかないことを証明している。なお、Fisher 指数は (2) を満たさない。すなわち、サブカテゴリーに関して Fisher 指数を計算し、第二段階でサブカテゴリーへの支出総額や Fisher 指数を変数としても、総合での Fisher 指数を得ることはできない。Laspeyres や Paasche 指数、及び Stuvel 指数はこの性質をみたす (無論、Laspeyres と Paashce は Factor Reversal を満たさない)。非常に多様な商品を含む指数を作成する際には、そして Factor Reversal が重要である場合 (マクロ経済学では往々にしてとても重要である) は、Stuvel 指数は一考の価値があると思われる。近年では、POS データなど多くの価格、数量情報が利用可能になり、コンピューターの計算能力も飛躍的に向上しているため、一つの指数ではなく、様々な指数を計算し比較されることは珍しくない。近年では、Fisher や Walsh と並び、Stuvel 指数の計算結果も報告されることは珍しくなくなっている[9]。

[8]B.M. Balk (1997) "CONSISTENCY-IN-AGGREGATIONAND STUVEL INDICES",*Review of Income & Wealth*, 42, 3, pp.353-363.

[9]Koji Nomura and Jon D. Samuels (2003) "Wage Differentials and Structure in the U.S. and Japan, 1960–2000 — Purchasing Power Parities for Labor Input"等