2016年応用マクロ経済学
指数理論(2)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成28年10月19日

概　要

公理アプローチ　1 数量に依存しない物価指数の公理的アプローチ

1　公理アプローチ

前回の講義ノートではLaspeyres指数とPaasche指数について簡単に説明し、両者の差が価格変化率と数量変化率の間の共分散により生じていることを示した。では二つの指数のうち、どちらが「正しい」物価指数なのだろうか?もしくは、どちらがより「適切な」指数であろうか?Laspeyresは、Weightが基準時点のものであるので、基準時点を固定すれば、毎期毎期数量の情報を収集する必要がなく、計算実務はPaascheよりもはるかに容易である。しかしながら、価格変化にともない数量も大きく変化していく場合、Laspeyresはその変化をすべて無視することになる。特に、長期にわたる価格変化を追いかける場合等、数量が大きく変化していくことが想定される場合はPaascheのほうがより経済の実際の変化を反映している可能性が高い。いずれにせよ、目的と費用、そしてデータの特徴により両物価指数の評価は変わってくるだろう。

公理アプローチ、あるいはテストアプローチと呼ばれる指数理論は、より一般的に望ましい指数計算方式を導出しようとする試みであり、指数が満たすべき性質を列挙していき、望ましい指数の範囲を絞り込むことを念頭においている。

ミクロ経済学の公理アプローチでは、選好関係が満たすべき性質、具体的には、連続性、推移性、凸性、完備性、反射性、局所非飽和性等の各公理をまず定義し、それら公理をみたす二項関係を合理的主体による選好関係と定義した。その選好関係を基にし、経済モデル、需要体系や市場均衡を定義している。すなわち、公理体系のみで必要な仮定や構造を特定しているのである。基本となる公理はそれに基づくすべての理論の根幹となるため、それら

は、議論抜きで受け入れられるものでなければならない。無論、公理を緩めることができればそれは大きな貢献であるが、確立された公理体系の多くは必要十分条件で固められており、緩和化は難しいものが多い。公理アプローチは、モデルがよって立つ仮定をすべて明らかにしている点で、見通しがよくなる利点がある。物価指数に関する公理体系も、物価指数が議論抜きで当然満たすべきと思われる公理を並べ、それを満たすものとして物価指数を定義し、それに基づいて指数を特定化、あるいはモデル化を試みるものである。Fisher 指数は、そのような公理体系から演繹される一つの指数である。しかしながら、物価が当然みたすべきと歴史的に考えられる公理をすべて満たす指数は存在しないこともまた証明されている。すなわち、残念ながら、公理アプローチのみでは、物価指数理論は完結しなかったのである。しかしながら、公理アプローチの研究の進展により明らかとなったことも多い。今回と次回の講義ノートでは、公理アプローチによる物価指数理論の入門として、公理アプローチにより得られているいくつかの定理を紹介する。今回の講義ノートはさらにその入門の入門として、非常に単純化されたケースを想定し、公理アプローチの雰囲気を伝える。数量情報を含むより実践的な物価指数理論の公理アプローチは次の講義ノートでカバーする。なお、本講義ノートの内容は、Eichhorn and Voeller (1976) に沿っている。

2　数量に依存しない場合の物価指数への公理アプローチ

現代の物価指数は、ほとんどの場合数量と価格と両方の情報に依存して決定されている。しかしながら、今回は、数量に依存しない物価指数を考え、その公理的アプローチを概観する。厳密には関数解析に関するかなりつっこんだ知識が必要となるので、技術的な証明は省く。興味のあるものは、Aczel, J. (2006)[1] 及び、Eichhorn (1978)[2]等を参照すること。

2.1　数量に依存しない物価指数の例

Lippe (2007) によると、フランス人 Dutot が 1738 年に、0 期と t 期の物価比較に関する下記の物価指数を提案している。

$$PI^C = \frac{\sum p_{i,t}}{\sum p_{i,0}}$$

これは各時点の商品価格の平均値の比較であり、Dutot Index と呼ばれる。

[1]ハードカバーは数万円するが、Paper Backs なら Dover からて安く入手可能である。

[2]W. Eichhorn (1978) *Functional Equations in Economics*, Addison-Wesley Publication Company. Aczel(1966) は純粋な関数解析に関する数学書であるが、Eichhorn(1978) は経済学への応用を目的とした本であり、指数理論やマクロ経済学の集計問題、需要システムなどをカバーしている。証明もよりステップバイステップで解説している。

この物価指数は、個別商品価格の水準に依存してしまい、例えば缶コーヒー24 缶入りを用いるか、一缶を用いるかにより、たとえ一缶あたりの価格が同一であっても、全体の物価指数に影響を与えてしまうという性質を持っている。また、Carli は 1764 年に下記の指数を提案している。

$$PI^D = \sum \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,0}} \right)$$

これであれば、缶コーヒー 24 缶と 1 缶の価格どちらを用いても、物価指数に影響は与えない。Jevons は 1863 年に下記のような幾何平均の指数を提唱している。

$$PI^J = \prod \left(\frac{p_{i,t}}{p_{i,0}} \right)$$

また、Jevons はさらに後年に調和平均による下記の指数

$$PI^{HR} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum \left(\frac{p_{i,0}}{p_{i,t}} \right)}$$

さらに、Fisher は 1922 年の大著において、Carli 指数と調和平均の幾何平均、すなわち Fisher 指数の数量のないバージョンを考察している。

$$PI^{CHR} = \sqrt{PI^C PI^{HR}}$$

3　公理体系入門

すべての正の実数をとる二時点の価格ベクトル、$\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_{t,0} = (p_{1,t}, p_{2,t}, ...p_{n,t})'$ を考える。物価指数 PI を、$\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ から正の実数空間への関数 $PI : \mathbf{R}^{2n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ としよう。まず、下記の四つの公理を導入する。

- (A-1) 単調性

  PI は、$\mathbf{P}_0$ に関して単調減少 , $\mathbf{P}_1$ に関して単調増加関数である。

- (A-2) 一次同次性

  $\mathbf{P}_1$ に正の実数 λ が乗じられた場合、PI は λ 倍となる。すなわち、

  $\mathrm{PI}(\mathbf{P}_0, \lambda\mathbf{P}_1) = \lambda\mathrm{PI}(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$

- (A-3) 恒等性

  もしもすべての価格が二時点で同一ならば、物価指数は 1 となる、すなわち、

$\mathrm{PI}(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0) = 1$

- (A-4) 次元性

  通貨の単位を変更しても、物価指数には影響をあたえない、すなわち、

  $\mathrm{PI}(\lambda\mathbf{P}_0, \lambda\mathbf{P}_1) = \mathrm{PI}(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1)$

これら四つの公理は、互いに独立であることが知られている。「公理が独立」であるとは、どの三つの公理を選んでも、その三つをみたし、かつ残りの一つを満たさない物価指数を考案することが可能である時をいう。

- 単調性をみたさず、ほかを満たす例

$$PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) = \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}\right)^{\alpha 2} \left(\frac{p_{3,1}}{p_{3,0}}\right)^{\alpha 3} ... \left(\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)^{\alpha n}$$

$$\alpha_1 < 0, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n > 0, \sum \alpha_i = 1$$

- 一次同次性をみたさず、ほかを満たす例

$$PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) = \sqrt{\frac{\mathbf{a}'\mathbf{P}_1}{\mathbf{a}'\mathbf{P}_0}}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

- 恒等性のみを満たさない例

$$PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{P}_1}{\mathbf{b}'\mathbf{P}_0}$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

- 次元性のみを満たさない場合、かなり複雑であるが $\cdots$

$$PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) = \frac{\sum p_{i,0}}{\sum p_{i,0} + 1} \frac{1}{n} \times \sum \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + \frac{1}{\sum p_{i,0} + 1} \max\left[\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}} ..., \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right]$$

上記の例はいずれもかなり不自然である。しかし、それぞれの公理のみを満たさない例があるということは、各公理の情報がリダンダントではないことを確認したことになる。

逆に、上に挙げた四つの公理をみたす物価指数の例は無数にある。数量をすべて 1 で固定した Paasche や Laspeyres を考えれば自明であろう。上記の公理に関しては、さらに、下記の定理が知られている。

定理 1 $PI_i, (i = 1, 2, 3., , k)$ が *(A-1)* から *(A-4)* の四つの公理を満たすとする。このとき、下記の二つの物価指数もまた四つの公理を満たす。

$$PI\_1 = \left(\alpha_1 PI_1^{\delta} + \alpha_2 PI_2^{\delta} + ... + \alpha_k PI_k^{\delta}\right)^{1/\delta}$$
$$PI\_2 = PI_1^{\alpha_1} PI_2^{\alpha_1} ... PI_k^{\alpha_1}$$
$$\delta \neq 0, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$$

自明であり、証明不要であろう。

- 中間値性

  物価指数 PI が与えられたとき、その値は、構成要素の価格変化率の最小値と最大値の間に存在する、すなわち、$\min\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, ...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right) \leq PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) \leq \max\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, ...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)$

中間値性については下記の便利な定理が存在する。

定理 2 公理 *(A-1), (A-2)* および *(A-3)* をみたす関数 $PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right)$ があるとする。このとき、$PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right)$ は中間値性を満たす。

証明

定義より

$$\min\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, ...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)\mathbf{P}_0 \leqq \mathbf{P}_1 \leqq \max\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, ...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)\mathbf{P}_0$$

さらに、

$$\begin{aligned}\min\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, ...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right) &= v\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) \\ &= v\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0\right) \quad \textit{from Identity} \\ &= PI\left(\mathbf{P}_0, v\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right)\mathbf{P}_0\right) \ \textit{from linearity} \\ &\leq PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right)\end{aligned}$$

逆からは

$$\begin{aligned}\max\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}},\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}},...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)&=m\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)\\&=m\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)PI\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_0\right)\\&=PI\left(\mathbf{P}_0,m\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)\mathbf{P}_0\right)\\&\geq PI\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)\end{aligned}$$

4 循環性と時間可逆性

次の二つは直感的には重要であるが、指数理論ではその必要性、重要性について激しい議論の対象となってきたものである。

- (A-5) 循環性

  時間が 0,1,2 と三時点あるとする。無論、時間の流れは数値の大きさ通り、0<1<2 である。このとき、

  $$PI\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)PI\left(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2\right)=PI\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_2\right)$$

  すなわち、毎年の物価指数を乗じることで、長期の物価指数を得ることが可能になる。

- (A-6) 時間可逆性

  $$PI\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)PI\left(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_0\right)=1$$

  すなわち、物価が 0 期から 1 期にわたって変化し、1 期から 2 期にかけて 0 期の水準に戻った場合、0 期から 2 期までの物価変化はなかったことになる。

循環性は時間可逆性を一般化したものであり、循環性を満たしていれば、時間可逆性も当然満たしている。

定理 3 $\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1$ から正の実数への関数 $PI\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)$ が循環性 *(A-5)* を満たすのは、以下の形であることが必要十分条件である。

$$PI\left(\mathbf{P}_0,\mathbf{P}_1\right)=\frac{L\left(\mathbf{P}_0\right)}{L\left(\mathbf{P}_1\right)}$$
$$L:\mathbf{R}^n_{++}\to\mathbf{R}_{++}$$

証明

十分性は自明である。$\frac{L(\mathbf{P}_0)}{L(\mathbf{P}_1)} \times \frac{L(\mathbf{P}_1)}{L(\mathbf{P}_0)} = 1$ のように、乗じていけばよい。必要性に関しては、循環性より

$$PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) = \frac{PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2\right)}{PI\left(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\right)}$$

上式左辺は $\mathbf{P}_2$ に依存していない。したがって、右辺もまた $\mathbf{P}_2$ に依存しないはずであり、証明が終わる。

この定理は、循環性が指数に対して非常に厳しい制約となることを示している。数量に依存する場合も同様であり、多くの指数がこの公理によってはじかれてしまう。

- 乗法性 (A-7)
  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ から正の実数への関数 $PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right)$ が以下の性質を満たすとき乗法性を有するという。

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k} = \left(k_1, k_2, ...k_n\right), \lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right), \\
&\mathbf{k}, \lambda \in \mathbf{R}^n_{++}, \\
&\Phi\left(\mathbf{k}, \lambda\right) : \mathbf{R}^{2n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}
\end{aligned}$$

このとき

$$PI\left(\mathbf{k}'\mathbf{P}_0, \lambda'\mathbf{P}_1\right) = \Phi\left(\mathbf{k}, \lambda\right) PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right)$$

乗法性は強い性質であり、個別商品価格の変動を物価指数から分離できることを意味する。この乗法性については、下記の定理が知られている。

定理 4 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ から正の実数への関数 $PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right)$ が単調性 *(A-1)*、一次同次性 *(A-2)*、恒等性 *(A-3)*、及び乗法性 *(A-7)* を満たし、かつ、$\Phi\left(\mathbf{1}, \mathbf{1}\right) = 1$ とする。この必要十分条件は、

$$\begin{aligned}
&PI\left(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\right) = \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}\right)^{\alpha 2} \left(\frac{p_{3,1}}{p_{3,0}}\right)^{\alpha 3} ... \left(\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)^{\alpha n}, \\
&\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n > 0, \sum \alpha_i = 1
\end{aligned}$$

である。

証明　十分性は自明
必要性

価格と Weight の逆数をとり、

$$p_{i,0} = \frac{1}{x_i}, k_i = \frac{1}{u_i}$$

とする。乗法性をみたす関数 G があるとするすると、

$$G\left(\mathbf{u}'\mathbf{x}, \lambda'\mathbf{P}_1\right) = \Psi\left(\mathbf{u}, \lambda\right) G\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1\right),$$
$$where \quad G\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1\right) = PI\left(\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..\frac{1}{x_n}\right), \mathbf{P}_1\right),$$
$$\Psi\left(\mathbf{u}, \lambda\right) = \Phi\left(\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, ..\frac{1}{u_n}\right), \lambda\right).$$

このとき、G は単調増加関数となる (第一要素 $\mathbf{x}$ に関しても、逆数をとっているので、増加関数となることに注意せよ)。すると、$\Psi\left(\mathbf{u}, \lambda\right)$ もまた単調増加関数となる。対数をとると、

$$\log G\left(\mathbf{u}'\mathbf{x}, \lambda'\mathbf{P}_1\right) = \log\left(\Psi\left(\mathbf{u}, \lambda\right)\right) + \log G\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1\right)$$

ここで、$\log G = H, \log \Psi = W$ とすると、

$$H\left(\mathbf{u}'\mathbf{x}, \lambda'\mathbf{P}_1\right) = W\left(\mathbf{u}, \lambda\right) + H\left(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1\right)$$

H と W は厳密に単調増加な関数となっている。この階となる関数 H と W を求めてみよう。

まず、単純なケースから始めよう。

$$f\left(xy\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right)$$

は Cauchy Equation と呼ばれるものの一つであり、x と y が正の値とすると、

$$x = e^u, y = e^r$$

と変換可能である。すると、

$$f\left(xy\right) = f\left(e^{u+r}\right) = f\left(e^u\right) + f\left(e^r\right)$$

したがって、上式は

$$g\left(u + r\right) = g\left(u\right) + g\left(r\right), g\left(u\right) = f\left(e^u\right)$$

正の値の任意の u, r について成立するのであれば、この足し算を続けることで、

$$g\left(nu\right) = ng\left(u\right)$$

これが正の任意 u について成立しているということは、f が u について線形であることを意味しており、

$$g\left(u\right) = cu$$

すなわち、

$$f(x) = c \ln x$$

Aczel (1966) の P.144 には、上式を一般化し

$$f(xy) = g(x) + h(y)$$

となるときの一般解の導出が説明されている。今回は、$h = f$ であり、それよりは制約の強いものとなっている[3]。Aczel (1966) によると、任意の正数 $\mathbf{u}'$ と λ' というパラメターを有するこの関数方程式の解は

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1) = \gamma_1 \log x_1 + ... + \gamma_n \log x_n + \gamma_{n+1} \log p_1 + ... + \gamma_{2n} \log p_n + b,$$
$$W(\mathbf{u}, \lambda) = H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1) - b$$

なとる。対数を指数をとって戻すと

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1) = \exp(H(\mathbf{x}, \mathbf{P}_1)) = e^b x_1^{\gamma_1} ... x_n^{\gamma_n} p_1^{\gamma_{n+1}} ... p_n^{\gamma_{2n}}$$
$$PI(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1) = e^b \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}\right)^{\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_1}} \left(\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}\right)^{\frac{\gamma 2}{\gamma_2}} \left(\frac{p_{3,1}}{p_{3,0}}\right)^{\frac{\gamma_{n+3}}{\gamma_3}} ... \left(\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)^{\frac{\gamma_{2n}}{\gamma_n}}$$

この式が恒等性と一次同次性をみたすための必要十分条件は、$b = 0, \sum_i \frac{\gamma_{n+i}}{\gamma_i} = 1$ である。

[3] Eichhorn (1978) の p.41 にはさらに直接的な証明がある。