

# 2016年応用マクロ経済学

## 指数理論(11)

阿部修人  
一橋大学経済研究所

平成 29 年 1 月 13 日

概要

地域間物価指数

### 1 Introduction

これまで、異なる時点間の物価比較について論じたが、本講義ノートでは同一時間における、異なる地域間の物価比較について議論する<sup>1</sup>。二つの異なる時点間と、地点間の比較の間に、数学的な違いはなく、これまで同様に、Fisher や Törnqvist 等の指数を作成したり、経済学的アプローチに従い COLI を作成することも可能である。しかしながら、比較する対象が複数の場合、すなわち複数時点間と複数地域間の比較では、決定的に異なる点が存在する。それは、時点は過去から未来に向かって一つのベクトル上に並んでいるが、複数の地域は、一つのベクトル上にない点である。複数地域間の「距離」を定義することは可能であるが、時点のような明確さでは定義することはできない。そこで重要になるのが「推移性」である。推移性は、時点間で成立すれば望ましい性質の一つという扱いであり、実際にはほとんどの指数が推移性を満たしていない。この推移性の欠如は、それほど深刻な欠点とみなされていなかったが、地域間では深刻な問題になりうる。推移性は、二国間  $X, Y$  の物価指数を  $PI^{XY}$  とすると、任意の三地点  $A, B, C$  において

$$PI^{AC} = PI^{AB} \times PI^{BC}$$

が成立することであった。すなわち、二国間の物価は、直接比較しても、第三国を経由しても同じ値になることが要請されている。これが成立していれば、為替レートにおいて、英ポンドと米ドル、日本円の関係は、どのように変換しても同一となっているように、国ごとに固有の一つの物価水準が定義

<sup>1</sup>PPP に関する包括的な紹介は、CPI Manual に対応する OECD による大著、PPP Manual (2012) *Eurostat-OECD Methodological Manual on Purchasing Power Parities* がある <https://www.oecd.org/std/prices-ppp/PPP%20manual%20revised%202012.pdf>

できる。逆に、これが成立しないと仮定しよう。すると、国際間の所得格差を比較する際、どの国を基準にするかで、所得の大小関係が変化してしまう可能性がある。例えば、アメリカを基準にする場合とイギリスを基準にする場合で、ドイツと日本の相対的な豊かさが逆転してしまう可能性がある。一つの国に対して一つの物価が定義されないと、国際比較の際に大きな問題が生じてしまうのである。国際比較のためには、推移性をみたく物価が各国で一つ（あるいは相対的に一つ）定まらねばならないのである。

各国比較の際の第二の問題は、国間で消費財が大きく異なることである。たとえよく似た先進諸国間の比較であっても、「代表的」な商品は往々にして全く異なってしまう。日本の消費者物価指数で採用されている代表的品目の銘柄のほとんどは、同じ東アジアの先進国である台湾では存在しないものである。さらに、たとえよく似た商品が存在したとしても、そのウェイトは大きく異なりうる。ラスパイレスとパーシェのギャップは、国間では相当に大きくなるのが想定される。意味のある物価計測のために越えねばならないハードルは非常に大きいのである。

## 2 商品カテゴリー内の指数

GDP や家計消費は非常に多くの種類のカテゴリーに分かれている。ここでは、まず、一商品カテゴリー内の国際比較を考える。同一地域における時点間比較であれば、これは、単に代表的商品を選び、その相対価格を調べるだけであったが、国際比較の際には、それらが複数存在することになり、複雑になる。

### 2.1 Eltető – Köves -Szulc (EKS)

1960年代の三人の研究者による研究<sup>2</sup>に基づくこの手法はEKS、あるいはさらに昔のGiniも含めてGEKSとも呼ばれる<sup>3</sup>。二つの指数の推移性を満たすための工夫がされている。具体的には、世界に $M$ 地域存在するとしよう。そして、 $M$ 内の任意の二地点 $j, k$ 間で、ある商品カテゴリー内で共通に観察される商品の種類数を $n_{jk}$ とする。そして、二地点間の物価を

$$P_{jk} = \prod_{i=1}^{n_{jk}} \left( \frac{p_i^k}{p_i^j} \right)^{\frac{1}{n_{jk}}}$$

<sup>2</sup>Eltető and Köves (1964) および Szulc (1964) の論文はハンガリー語で書かれており私は読んでない。

<sup>3</sup>Gini, C. (1931) "On the circular test of index numbers," *Metron*, (2) pp. 3-24.

のように、単純幾何平均で定義する。そして、EKS, あるいは GEKS は

$$P_{jk}^{EKS} = \prod_{l=1}^M (P_{jl} \times P_{lk})^{\frac{1}{M}}$$

で定義される。すなわち、 $j, k$  の二地域間の物価を、第三地域  $l$  を経由したすべての物価の組み合わせの幾何平均が EKS 物価指数となる。EKS(GEKS) で作成された物価指数は明らかに推移性をみだす。なお、ここでは、二地域間の物価指数、 $P_{jk}$  の計算は単純幾何平均としたが、基本となる二地点間の物価指数はなんでもよく、Törnqvist や Fisher、Walsh 等様々な選択肢がある。ところで、この手法では、財の代表性に関して全く考慮されていない。そこで、同一商品カテゴリーにおいて  $j$  国において代表的な財とみなされるものの集合を  $M(j)$ 、その数を  $n_{j,k}$  国において代表的な財とみなされるものの集合を  $M(k)$ 、その数を  $n_k$  とし、幾何平均、すなわち、

$$P_{jk} = \left[ \prod_{i \in M(j)} \left( \frac{p_i^k}{p_i^j} \right)^{\frac{1}{n_j}} \prod_{i \in M(k)} \left( \frac{p_i^k}{p_i^j} \right)^{\frac{1}{n_k}} \right]^{1/2}$$

とすると、二国間の代表的財の違いをある程度踏まえた推計が可能になる。もっとも、果たして比較可能な商品が各国でどれほど存在するかが大きな問題となる。なお、ここでは数量や支出の情報を全く用いていないが、それは一つの商品カテゴリー内の推定であるためであり、このレベルで詳細な数量や支出の情報が存在するほうが稀である。

## 2.2 Country-Product-Dummy (CPD)

Stochastic Approach によるこの手法は、回帰分析により商品カテゴリーごと、地域ごとの推計量をえるものである。具体的には、 $j$  地域における  $i$  財の対数価格を下記のように分解する：

$$\ln p_i^j = \eta_1 D_1 + \eta_2 D_2 + \dots + \eta_n D_n + \pi_1 D_1^* + \pi_2 D_2^* + \dots + \pi_M D_M^* + u_i^j$$

ここで、 $D_i$  は商品ダミー、 $D_i^*$  は地域ダミーである。これを線形回帰により係数を得、

$$PPP^j = \exp(\hat{\pi}_j)$$

と定義すると、二地域  $j, k$  間の物価指数は

$$P^{jk} = \frac{PPP^k}{PPP^j}$$

と定義できる。このアプローチでは、各国の商品間の微妙な差異をコントロールするため、回帰変数を増やしたり、様々な weight を用いるなど、拡張が容易であるという利点がある一方で、回帰分析に頻繁に生じる様々なバイ

アス (omitted variables、 sample selection 等) の指摘があるなど、近年急速に研究が進んでいる<sup>4</sup>。現在、各国別物価指数、すなわち Purchasing Power Parity (PPP) を公表している World Bank および Penn World Table 8.0 のいずれにおいても、この商品カテゴリー内の集計の際には EKS(GEKS) が用いられていたが、近年、CPD も用いられるようになってきている。

### 3 商品カテゴリー間の集計

商品カテゴリー毎の価格指数が作成された後、地域間指数を作成するには、カテゴリー間の集計が必要になる。ここでは、やはり、推移性が満たされるようにせねばならない。

#### 3.1 EKS(GEKS)

カテゴリー内の集計の場合、EKS は特にウェイトを用いなかったが、カテゴリー間の集計の場合は数量か支出の情報を利用可能になる。標準的なカテゴリー間 EKS(GEKS) 指数は下記のように定義される。

$$EKS_{jk} = \prod_{l=1}^M (PI_{jl}^F \times PI_{lk}^F)^{\frac{1}{M}}$$

ただし、 $PI_{jl}^F$  は二地域  $j, l$  間の Fisher 物価指数である。無論、Fisher の代わりに Törnqvist を用いることも可能であり、Caves et al. (1982) は Fisher よりも Törnqvist が望ましいと議論している。Fisher や Törnqvist を用いることで、指数論的に望ましい性質を有することに加え、下位代替バイアスからも自由になるという利点がある。一方、対象地域 (国) が多いと、計算量が増加していくという欠点がある。例えば、47 都道府県の EKS を計算するには、 $47 \times 46/2 = 1081$  の組み合わせがあり、それをすべて計算する必要がある。もっとも、今のコンピューターであればその問題は深刻ではない。EKS(GEKS) を時系列方向に用いる場合は、例えば週次データで 10 年分だと 10 万以上の計算が必要になるが、それでも十分に対応可能であり、計算量の問題は現在では深刻な問題ではなくなっている<sup>5</sup>。

#### 3.2 Geary-Kahmis (GK)

EKS と並び、現在利用される集計方法が Geary-Kahmis (GK) 法である。これは、一つの地域  $j$  に対し一つの物価  $PPP_j$  を、そして各商品  $i$  に対し、地

<sup>4</sup>Selvanathan and Rao (1994) にも詳細な紹介があるが、近年の研究としては、Silver (2009) “The Hedonic Country Product Dummy Method and Quality Adjustments for Purchasing Power Parity Calculations” IMF 等がある。

<sup>5</sup>とはいい、家計別物価指数に EKS を適用すると、1000 万を超える計算になり、さすがにかなりの負荷となる。

域間平均価格  $P_i$  という概念を導入する。ある商品  $i$  の、地域間平均価格は、もしも全ての異なる地域が一つの場所に固まっていたのであれば、

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^M p_i^j q_i^j}{\sum_{j=1}^M q_i^j}$$

すなわち、一数量単位当たりの平均価格になる。しかしながら、地域間で平均価格 (PPP) が異なる場合、その違いを考慮し、

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^M \frac{p_i^j q_i^j}{PPP_j}}{\sum_{j=1}^M q_i^j}$$

とすることが適切であろう。無論、 $PPP_j$  がわからないので、上記の計算は直ちにはできない。 $PPP_j$  は地域  $j$  の平均物価であり、

$$PPP_j = \frac{\sum_{i=1}^N p_i^j q_i^j}{\sum_{i=1}^N P_i q_i^j}$$

で定義される。すなわち、地域間平均価格  $P_i$  に比較して、その地域の商品価格  $p_i^j$  がどの程度割高、割安かを反映している。 $PPP_j$  の計算には  $P_i$  が必要となっている。GK 法による PPP は、 $P_i$  と  $PPP_j$  の  $M+N$  個、すなわち地域の数と商品カテゴリーの数の和からなる個数の連立方程式の解として出てくる  $PPP_j$  である。

この連立方程式は非線形であり、解析的に解くことは一般に不可能である。しかしながら、この連立方程式は、数量がある種の条件をみたす時<sup>6</sup>には PPP や平均商品価格が正の値でユニーク (一国を基準にする必要がある) に決まる事が Khamis (1970, 1972) により証明されている<sup>7</sup>。実際に数値的に解くには iteration が必要である。具体的には

- (1) まず、各地域の  $PPP_1, PPP_2, \dots, PPP_M$  の初期値を適当に与える
- (2) (1) の初期値の下で商品別平均価格  $P_i$  を計算する

<sup>6</sup>様々な条件が存在するが、たとえばすべての数量が正であればペロン・フロベニウスの定理を利用することができる。

<sup>7</sup>Khamis, S.H. (1972) "A New System of Index Numbers for National and International Purposes," *Journal of Royal Statistics Society, Series A* 135, Part B 32: 81-98. に説明されているが、証明そのものは Khamis, S.H. (1970) "Properties and conditions for the existence of a new type of index numbers," *Sankhyd*, B, 32, 81-98. にある。

- (3) (2) で得られた  $P_i$  の下で、新たに地域別平均物価 PPP を計算する  
 (4) (2) に戻り、 $P_i$  を計算、さらに PPP を求め、収束するまで繰り返す

上記のプロセスは容易であり、また経験的にはかなり高速に収束する。一つ注意すべき点は、この計算で得られた PPP を 10 倍、P を 1/10 にしてもやはり連立方程式をみたしてしまうことであり、どこかに基準点を設ける必要がある。通常は、アメリカ合衆国や東京のように、最大の地域の PPP を 1 に基準化し、それとの相対価格で各地域の PPP を計算していく。

### 3.3 EKS vs. GK

EKS は World Bank で、GK は Penn World Table でそれぞれ PPP の計算に利用されている。すなわち、国際比較のための国別物価指数として、二つの PPP の系列を利用可能なのである。Penn World Table は内生成長理論の契機となったものであり、そのデータを基に、非常に数多くの成長回帰分析に用いられているし、World Bank の PPP は貧困指標において頻繁に用いられている。量指数は計算方法が全く異なるため、どちらも推移性は満たすものの、値そのものは大きく異なることが多い。

GK 法の利点として頻繁に挙げられるのは、それが加法で定義されているため、一国の  $GDP = \sum_{i=1}^N p_i^j q_i^j$  を地域の平均価格  $PPP_j$  で割ったもの、すなわち「実質」GDP は、その国の生産量を国際平均価格で評価したものに一致する、すなわち、

$$\frac{\sum_{i=1}^N p_i^j q_i^j}{PPP_j} = \sum_{i=1}^N P_i q_i^j$$

が成立する。これは極めて有用な性質であり、国際平均価格と PPP が整合的に作成されていることになる。これは、EKS にはない性質である。また、GK 数量指数として

$$QI_{jk}^{GK} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i q_i^k}{\sum_{i=1}^N P_i q_i^j}$$

すなわち、国際平均価格で評価した数量の比と定義し、かつ、物価指数を

$$PI_{jk}^{GK} = \frac{PPP_k}{PPP_j}$$

で定義すると、

$$\begin{aligned}
 PI_{jk}^{GK} \times QI_{jk}^{GK} &= \frac{PPP_k}{PPP_j} \times \frac{\sum_{i=1}^N P_i q_i^k}{\sum_{i=1}^N P_i q_i^j} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i^k q_i^k}{\sum_{i=1}^N P_i q_i^k} \times \frac{\sum_{i=1}^N P_i q_i^j}{\sum_{i=1}^N p_i^j q_i^j} \times \frac{\sum_{i=1}^N P_i q_i^k}{\sum_{i=1}^N P_i q_i^j} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i^k q_i^k}{\sum_{i=1}^N p_i^j q_i^j}
 \end{aligned}$$

すなわち、Value Index となる。このように、数量指数を容易に作成可能なところも GK 法の利点である。しかしながら、近年では GK に対する批判も強い。最大の批判は、それが下位代替バイアスをもたらす点にある。GK 法による実質化を行うと、一国の GDP は  $\sum_{i=1}^N P_i q_i^j$  となる。これは、国際平均価格で数量を評価していることになる。もしも、国際平均価格よりも安い消費財への需要のシフトが発生しても、それは国際平均価格で評価されてしまうため、実際の支出額よりも高い水準の値となってしまう。すなわち、貧困国の GDP が過剰に推定される可能性がある。Ackland et al. (2013)<sup>8</sup>は、まず EKS のほうが、経済学的な生計費指数、COLI に近いことを示したのち、GK 法では、EKS に比べ、世界の貧困水準を 30% 程度低く見積もり、特にアジア諸国において貧困を過少に評価する傾向が強いことを指摘している。

## 4 その他

GK は加法で定義されていたが、それを乗法、すなわち対数差分で定義するものが Rao 指数として考案されている<sup>9</sup>。EKS 法は、全ての国を対称に扱っているが、より大きな国は、それだけの Weight を持つべきである、という視点もありうる。EKS で、その Weight を盛り込むことも可能である。また、

<sup>8</sup>Robert Ackland & Steve Dowrick & Benoit Freyens, (2013) "Measuring Global Poverty: Why PPP Methods Matter," *The Review of Economics and Statistics*, MIT Press, vol. 95(3), pages 813-824, July.

<sup>9</sup>Rao, D. S. Prasada (1990) "A System of Log-Change Index Numbers for Multilateral Comparisons," in Salazar-Carrillo and Rao (eds), *Comparisons of Prices and real Products in Latin America*, Contributions to Economic Analysis Series, North-Holland, Amsterdam, 127-39.

EKS で、国間の距離をなんらかの形で反映させる試みも行われている。近い国、として、二国間のラスパイレスとパーシェのギャップを用い、そのギャップが小さい国間では、支出パターンが近いとみなし、そうした国間での指数を作成するアプローチであり、Minimum Spanning Tree(MST) と呼ばれる手法を応用するものである<sup>10</sup>。EKS の問題は、二国の間をつなぐ関係が無数に存在することである。もしも二国をつなぐ関係がユニークに定まれば、問題は単純化される。MST は、二国の間をつなぐ関係、たとえば A,B, C, D の四か国があり、A と B の関係として AB, ACB, ADB, ACDB, ADCB の 5 種類の関係がありうる。このなかで、MST は、ある基準に従い一つを選択するアルゴリズムである。Hill (1999) はラスパイレス・パーシェギャップを用いて、任意の二国間の距離を定めている。具体的には、二国 AB 間の距離を

$$D(A, B) = \left| \frac{\ln(PIL_{AB}^L)}{\ln(PIP_{AB}^P)} \right|$$

で定める。次に、全ての国が一つの線につながるような組を合わせを全てもとめる。例えば、横一線ですべてつながるもの、一つの国を中心に放射状につながるもの、などである。そして、それぞれの線の距離は上記の  $D(A, B)$  で与えられており、その距離の総和が最小になるような Tree を求め、それを最小化させるのである。図は Hill (1999)<sup>11</sup> が求めた OECD 諸国の Minimum Spanning Tree である<sup>12</sup>。

$D(A, B)$  は時間を通じて変化しうる。としたら、MST は国間のみでなく、時点に関しても構築せねばならないかもしれない。また、パーシェ・ラスパイレスギャップは直観的にはその意味はわかりやすいものの、理論的な正当化は難しい。MST を用いるアプローチは現在の最先端であり、今だ多くの論点が残っておりこの MST を採用している国際機関はまだないが、この可能性を巡り、非常に多くの研究がされている。近年の展開については、Hill and Hill (2009)<sup>13</sup> が詳しい。また、Stochastic Approach が国間の PPP で用いられることも増えている<sup>14</sup>。

EKS、GK、CPD および MST のいずれも、二国の物価比較の際に、第三国の情報が必要になるという特徴がある。二時点間の物価比較であれば、第

<sup>10</sup>詳しくは、Hill, Robert, J. (1999) “Comparing Price Levels Across Countries Using Minimum Spanning Trees,” *Review of Economics and Statistics* 81(1) 135-142. を参照せよ。

<sup>11</sup>Robert Hill (1999) “International Comparisons Using Spanning Trees,” in Alan Heston and Robert E. Lipsey ed. *International and Interarea Comparisons of Income, Output, and Prices*, (p. 109 - 120), University of Chicago Press

<sup>12</sup>Minimum Spanning Tree は Nash 均衡を求める際にも利用されることがあり、アルゴリズムは Matlab や Mathematica, R 等多くの言語で公表されている。

<sup>13</sup>Hill, Robert J. and Peter T.Hill (2009) “Recent Developments in the International Comparison of Prices and Real Output,” *Macroeconomic Dynamics*, Vol13(52), 194-217.

<sup>14</sup>Rao, D. S. Prasad (2004) “The Country-Product-Dummy Method: A Stochastic Approach to the Computation of Purchasing Power Parities in the ICP,” Paper presented at the SSHRC Conference on Index Numbers and Productivity Measurement, Vancouver, Canada, June 30–July 3. を参照せよ。

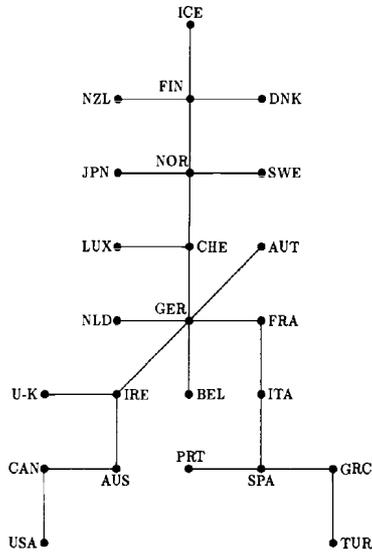


Fig. 2.4 Minimum spanning tree for the OECD

図 1: Spanning Tree for OECD from Hill (1999)

三時点の情報は原則必要がなかったが、一国、もしくは一地域が増加すると、全ての物価を再計算する必要が出てくるのである。EKS(GEKS)は、近年、Chain Drift を除去するために時系列データにも応用されるようになっている<sup>15</sup>。EKS法を用いる一つのメリットは、二時点で全ての財が重複していなくとも物価比較が可能なことであり、スキャナーデータのように財の入れ替わりが激しい時にはその特性が有効に活用される可能性が高いが、アドホックに window を設定するか、新しい情報が来るたびに過去の値をすべて計算しなおす必要が出てくるのは問題である。もっとも、これは季節調整やデトレンドの際にも発生する問題でもある。

<sup>15</sup>Ivancic, Lorraine & Erwin Diewert, W. & Fox, Kevin J., (2011) "Scanner data, time aggregation and the construction of price indexes," *Journal of Econometrics*, Elsevier, vol. 161(1), pages 24-35, March.