2016年応用マクロ経済学
指数理論(10)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成29年1月4日

概 要

Stochastic Approach

1 Introduction

現在の金融政策では、コアインフレーション率が政策ターゲットとなっている。コアやコアコア、アメリカ版コア、日本版コアなど、コアインフレという概念は頻繁に、そして様々なバリエーションとともに使われている。はたして、コアインフレーションとは何なのだろうか?生鮮食料品を除くもの、エネルギー関係を除くもの、大きな変動を示した品目を除外するもの (刈込平均)、中央値を使うものなど、様々なコアインフレが提案されているが、そうしたものには経済学的な、学術的根拠があるのだろうか?コアインフレという概念を初めて導入したとされる Bryan and Cecchetti (1994)[1]では、コアインフレは経済理論に基づき、下記のように定義されている。まず、多数の同質な企業が価格を期首に設定するとする。同質なため、期首に設定される価格は前期と比べ、貨幣成長率と一致する割合で変化するはずである。次に、期中に各企業は idiosyncratic な系列相関のないショックに直面すると仮定する。また、企業の価格改定にはメニューコストが必要であるとする。すると、大きなショックを体験し、メニューコストを払っても良いと考える企業は価格を改定し、そうでなかった企業は価格を改定しないであろう。政策当局者が期末の価格しか観察できないとすると、各企業の価格変化率は一致せず、様々な商品価格の分布に直面することになるだろう。各企業の商品価格は、モデルのパラメターを適当に設定すると、下記のようになるだろう

$$\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \pi_t + \varepsilon_{it}$$

[1]Bryan, Michael F. and Cecchetti, Stephen G. (1994). "Measuring Core Inflation," in N. Gregory Mankiw, ed., Monetary Policy. Chicago: University of Chicago Press, pp. 195-215.

ただし、π_t は貨幣成長率であり、各企業共通のトレンドとなる。ε_{it} は企業固有ショックの結果、価格を改定した企業に発生する価格の「違い」である。もしも企業固有ショックが平均ゼロで対照的な分布をもち、かつメニューコストが企業間で同一であれば、ε_{it} の平均値はゼロになることが期待される。実際には、貨幣成長率と π_t は一致するとは限らないが、トレンドインフレ率 π_t は、観察された価格変化率の平均値をとることで、推計可能である。この π_t こそが、コアインフレ率なる。上記の式を回帰式とみたてると、価格比を定数項にのみ回帰した係数が π_t の不偏一致推定量となるはずである。これは、

$$\widehat{\pi}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)$$

この推定量の標準誤差は

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{\pi}_t\right) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\right) \\
&= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\pi_t + \varepsilon_{it}\right)\right) \\
&= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\varepsilon_{it}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=t}^{n}\left(\varepsilon_{it}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}Var\left(\varepsilon_{it}\right)
\end{aligned}$$

また、$Var\left(\varepsilon_{it}\right)$ は

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=t}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}} - \widehat{\pi}_t\right)^2}{n-1}$$

で不変推定量を得ることが可能である。すなわち、コアインフレ率は、回帰分析により計算することが可能であり、そこには標準誤差が付与される。回帰係数として物価上昇率を計測可能であり、かつ標準誤差がつくというのは非常に魅力的である。それは、面倒な公式や数量ウェイト、支出シェアウェイトも考える必要はなく、効用関数や生産関数の課す制約を考える必要もない。さらに、標準誤差が付加されることで、物価上昇率の推定値の「信頼性」の指標が入手できるわけであり、もしも標準誤差が大きければ、得られた物価上昇率は信頼性の低いものとみなすことが可能になる。ここではごく単純な仮定を置いているが、ショック項およびトレンドインフレ率の確率過程をより複雑にし、時系列分析の手法を駆使してより高度な推計を試みることも可能であり、動的因子分析手法などを用いた論文が多数発表されている[2]。

[2]近年の展開に関しては、James H. Stock, Mark W. Watson (2015) “Core Inflation and Trend Inflation,”NBER Working Paper No. 21282 を参照せよ。

公理体系や経済モデルに依拠せず、価格データには確率項が含まれているとみなし、回帰分析や最尤法などの推計によりインフレ率の計測を試みるアプローチを Stochastic Approach という。Bryan and Cecchetti (1994) は指数理論の論文は一切引用していないが、上記の、個々の商品の価格変化率を共通成分と idiosyncratic 成分に分解し、なんらかの平均をとることで共通成分を抽出しようというアイディアは 19 世紀の Jevons(1863)[3]にまでさかのぼる。そこでは、Jevons は数式は展開していないものの、「(価格比の) 平均をとることで、独立の変動は互いに打ち消しあい、必要とされる金価値の変化が残るであろう (Jevons 1863)」と述べている。20 世紀初頭にケインズ達によりこのアプローチは徹底的な批判をうけるが、20 世紀後半にまた復活し、現在では公理体系や経済学的アプローチと並ぶ指数理論の一つ、とくに地域間物価指標を計測する際には標準的手法の一つとなっている。ただし、Bryan and Cecchetti (1994) が導出した価格変化率の決定式が非常に強い仮定に基づいていることからわかるように、他の公理的アプローチは経済学的アプローチと比べ、理論的な背景について多くの疑問があることも事実であり、批判的な立場に立つものも少なくない。事実、CPI Mannual (2004) では 20 世紀後半以降の Stochastic Approach についてはほとんど触れられていない。マクロ経済学では、コアインフレの推定という独自の研究分野が成立し、多くの論文が執筆されているが、多くの場合他の指数理論との連携は意識されておらず、時系列解析の一応用分野として、指数理論とは独立した発展を遂げているのが現状である。本講義ノートでは、19 世紀の Jevons 達の議論から現在の、いわゆる New Stochastic Approach まで概説する。

2 Unweighted Stochastic Approach

Bryan and Cecchetti (1994) の notation を少し変更し、

$$\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \alpha_t + \varepsilon_{it}$$

としよう。また、ε_{it} は商品間でも時間方向、(i,t)、両方に関して独立で同一の分布に従っていると仮定しよう。すると、α_t の最良不偏一致推定量は

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)$$

で得られる (ML と OLS の結果は一致する)。これは、Carli Index である。この指数は単調性と一次同次性は満たすが、Time Reversal は満たさない。すなわち、今期と来期をひっくり返しても、物価は一般に逆数にならない。そ

[3]Jevons, W.S. (1863) "A Serious Fall in the Price of Gold Ascertained and its Social Effects Set Forth", reprinted in *Investigations in Currency and Finance* (London: Macmillan and Co., 1884), pp. 13–118

こで、対数変分を用いた式、

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)=\beta_t+\varepsilon_{it}$$

とし、やはり、ε_{it} は商品間でも時間方向にも $i.i.d.$ であると仮定しよう。すると、最良不偏一致推定量は

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_t&=\frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\\&=\ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)^{1/n}\end{aligned}$$

となる。これは Jevons Index である。これは Carli Index と異なり、Time Reversal を満たす。さらに、一次同次性や比較時点価格に関する単調性等、物価指数が満たすべき多くの性質 (公理) を満たすことは明らかである。もう少し一般化し、下記のような式を考えてみよう。

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)=\alpha_t+\beta_i+\varepsilon_{it}$$

やはり、ε_{it} は商品間でも時間方向にも $i.i.d.$ であるとする。このとき、異なる商品間でトレンドは時間により変化する部分は共通であり、一方、トレンドの水準そのものは商品により異なると仮定しよう。このとき、単に、ε_{it} の平均値が各期、各商品に関してゼロであると仮定するだけでは、商品固有効果である β_i は識別することができないため、様々な識別戦略をとる必要がある。

さらに一般化し、

$$\frac{p_{it}}{p_{it-1}}=f_i\left(\alpha_t,\varepsilon_{it}\right)$$

としよう。こうすると、α_t の推計手法は単なる線形回帰ではなくり、時系列解析やパネルデータ分析で発展してきた様々な推計手法を用いる可能性が出てくる。例えば、日本銀行が発表している物価の一つに、刈込、すなわち変動の大きなカテゴリーを落としたうえで平均をとるアプローチ、あるいは中央値を用いるケースなど、様々な可能性がある。それらは、いずれも誤差項の分布と関数形 f_i の形状に関する仮定をおいていると解釈することが可能である。

もっとも、単純な Stocahstic Appoach で導出される Jevons 指数や Carli 指数は、全ての商品が同じ weight で扱われているため、今日では用いられることはほとんどない。

各商品の価格変化は、共通要素と商品固有効果に分解され、商品固有効果は平均をとると消滅していく、という発想は Keyenes が徹底的に批判[4]してい

[4]Keynes, J.M. (1930) A *Treatise on Money in Two Volumes: 1:The Pure Theory of Money* (London: Macmillan).

る。Keynes の文章は決して読みやすくないが、単純化すると、各商品の価格比の変化が互いに独立であるとする仮定 (大数法則により平均値がゼロにいくために必要) に関するものである。ある商品価格が上昇したとし、それが他の商品価格の動きと独立であると仮定するのは、一般均衡を考えるとおかしいことになる。たとえ商品間で共通の要素の存在を認めるにしろ、かなり単純化された一般均衡モデルでも、上記のような価格変化の動きを正当化するのは困難であろう。まして、現実の経済では商品価格に影響を与える要因は多様かつ複雑であり、商品間で独立の誤差項ということは考えることは難しい。そもそも、共通要素としてのインフレーションというのは本当に実在するのだろうか?上記のモデルでは、その実在を仮定して推計を行うことになるが、そのようなモデルが正しいかどうかはどのようにして知ることができるのだろうか?Bryan and Cecchetti (1994) は、貨幣成長率がインフレーション率となる状況を考えていた。単純な貨幣成長率モデルではそのような均衡解を容易に得ることができるが、その場合貨幣の役割はごく単純なものになっており、実際の経済の大多数をしめる内部貨幣、すなわち信用創造が組み込まれておらず、特に短期変動を描写するモデルとしては大きな問題を有している。単純な貨幣成長率モデル、money in utility や cash in advanced のようなモデルでは、全ての商品で共通な一つのインフレ率の存在を導くことが可能ではあるが、それはおそらく、現実の金融政策とはほとんど整合性を有しないものであろう。

3 Weighted Stochastic Approach

Keynes (1930) は、Jevons のアプローチに関し、各商品を同列に扱っていることについても厳しく批判している。ほとんどだれも買わないような商品と、小麦やコメのような主要商品を同じように扱うことには明らかに無理があり、19 世紀においても、Laspeyres のような、数量や支出によりウェイトを用いた指数が提唱されていた。Stochastic Approach に、数量や支出情報を組み込むことは可能であろうか?これは実は非常に容易に実現可能である。例えば、

$$\rho_{i01} = \frac{1}{2}\left(w_{i1} + w_{i0}\right)$$

のように、二時点の支出シェアの平均値を ρ_{i01} としよう。そして、

$$R_{i01} = \rho_{i01} \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)$$

すなわち、二時点の価格の対数変分に支出シェアの平均を乗じたものを R_{i01} と定義しよう。このサンプル平均の不変推定量は

$$
\begin{aligned}
E\left(R_{i01}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\rho_{i01}\ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\frac{1}{2}\left(w_{i1}+w_{i0}\right)\ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) \\
&= \ln PI^{T}
\end{aligned}
$$

となる。これは Törnqvist 指数である。また、この推定量の標準誤差を計算することも可能である。同様に、様々なウェイトを考え、そのサンプル平均をとることで Laspeyres や Paashce などの各種指数をサンプル平均として得ることも容易である。様々なウェイトを想定することで各種の物価指数を得られることになるが、では、それらの中の何を採用するべきか、このアプローチからは明らかではないからではない。何か選択する際の尺度があるのだろうか?

4 New Stochasitic Approach

80 年代に Stochastic Approach は復活を遂げることになる。その立役者の二人は指数論関する教科書、Selvanathan and Rao (1994), を執筆している。そこで彼らが強調しているのは、Stochastic Approach により指数の推定値には標準誤差が付与することが可能であり、指数の信頼性を数値化することが可能になること、である。標準誤差の少ない場合、推定量の信頼性は増加していくし、回帰式全体の R^2 は、回帰式そのもののデータへの適合度合いを示す、すなわち回帰式そのものの信頼性の指標とみなすことも可能であろう。前節の推定式でも標準誤差は付加されるが、推定式をより複雑にすることにより、様々な計量手法を駆使することが可能になる。具体的には、価格決定式に他の変数をコントロール変数として導入したり、最尤法を行うことが可能である。ここでは、Selvanathan and Rao (1994) に従い、Generalized Least Squares(GLS) を用いた手法を紹介しよう。下記のようなモデルを考える。

$$
\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \alpha_t + \varepsilon_{it}
$$

計量の入門書の表記に合わせ、上記の α_t をコンスタント項と係数の組み合わせ、被説明変数を y とし

$$
y_{it} = \beta_t x_{it} + \varepsilon_{it}
$$

と書くことにしよう。x_{it} は単なるコンスタンスト項であり、1 を構成要素

とする列ベクトルである。このとき、Weight 行列 Ω を用いた場合の GLS は

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta}_t^{GLS} &= \left(X_t'\Omega^{-1}X_t\right)^{-1} X_t'\Omega^{-1}Y_t \\
X_t &= (1,1,1,1,...,1)' \\
Y_t &= \left(\ln\left(\frac{p_{1t}}{p_{1t-1}}\right), \ln\left(\frac{p_{2t}}{p_{2t-1}}\right), \ln\left(\frac{p_{3t}}{p_{3t-1}}\right), ..., \ln\left(\frac{p_{nt}}{p_{nt-1}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、誤差項が i.i.d. ではなく、

$$u_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{\sqrt{\rho_{it}}}$$

$$\rho_{it} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{it}q_{it}}{E_t} + \frac{p_{it+1}q_{it+1}}{E_{t+1}}\right)$$

となっているとしよう。このとき、OLS は効率的ではなく、分散不均一が生じる。また、分母は Törnqvist の Weight の関数となってる。このとき、ε_{it} の分散を σ^2 とすると、共分散行列は

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\rho_{1t}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\rho_{2t}} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

このとき、

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\rho_{1t}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\rho_{2t}} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} \rho_{1t} & 0 & & 0 \\ 0 & \rho_{2t} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \rho_{nt} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
X_t'\Omega^{-1} &= \frac{1}{\sigma^2}(1,1,1,1,...,1)\begin{pmatrix} \rho_{1t} & 0 & & 0 \\ 0 & \rho_{2t} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \rho_{nt} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma^2}(\rho_{1t}, \rho_{2t}, ..., \rho_{nt}) \\
X_t'\Omega^{-1}X_t &= \frac{1}{\sigma^2}(\rho_{1t}, \rho_{2t}, ..., \rho_{nt})(1,1,1,,...,1)' \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \\
X_t'\Omega^{-1}Y_t &= \frac{1}{\sigma^2}\sum \rho_{it}\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_t^{GLS} &= \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2} \sum \rho_{it} \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) \\ &= \sum \frac{1}{2}\left(\frac{p_{it}q_{it}}{E_t} + \frac{p_{it+1}q_{it+1}}{E_{t+1}}\right) \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\end{aligned}$$

となり、Törnqvist 指数を GLS の推計量として得ることが可能である。また、標準誤差も簡単に求めることが可能である。

さらに変更し、今度は

$$\begin{aligned} u_{it} &= \varepsilon_{it}\sqrt{w_{i0}} \\ x_{it} &= \sqrt{w_{i0}} \\ y_{it} &= \frac{p_{it}}{p_{i0}}\sqrt{w_{i0}} \end{aligned}$$

としよう。このとき、

$$\Omega = \sigma_2 \begin{pmatrix} w_{10} & 0 & & 0 \\ 0 & w_{20} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & w_{n0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_t'\Omega^{-1} &= \frac{1}{\sigma_2}\left(\sqrt{w_{10}}, \sqrt{w_{20}}, ..., \sqrt{w_{n0}}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{w_{10}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_{20}} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \frac{1}{w_{n0}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_2}\left(\frac{1}{\sqrt{w_{10}}}, \frac{1}{\sqrt{w_{20}}}, .., \frac{1}{\sqrt{w_{n0}}}\right) \\ X_t'\Omega^{-1}X_t' &= \frac{1}{\sigma_2} \\ X_t'\Omega^{-1}Y_t &= \frac{1}{\sigma_2}\left(\sqrt{w_{10}}, \sqrt{w_{20}}, ..., \sqrt{w_{n0}}\right)\left(\frac{p_{1t}}{p_{10}}\sqrt{w_{10}}, \frac{p_{2t}}{p_{20}}\sqrt{w_{20}}, .., \frac{p_{nit}}{p_{n0}}\sqrt{w_{n0}}\right)' \\ &= \frac{1}{\sigma_2}\sum w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_t^{GLS} &= \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2} \sum w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}} \\ &= \sum w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\end{aligned}$$

となり、Laspeyres 物価指数を得ることができる。同様に、様々な変数変換を行うことで、各種指数を作成することが可能である。

5　共通トレンドの識別

様々な商品間には共通のトレンドがあるが、価格変化率の水準そのものに商品間で差異がある、すなわち

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \alpha_t + \beta_i + \varepsilon_{it}$$

を考えてみよう。無論、この式のパラメターをすべて推計することはできない。ある推計量があるとし、そこから商品固有効果全体を 1/2 減らして、α_t を 1/2 増加させても全く同じ残渣となるためである。そのため、識別条件を外から加えねばならない。例えばある特定の商品の固有効果をゼロにする、でもよいが、より自然なものとして、Selvanathan and Rao (1994) は

$$\sum w_{i0}\beta_i = 0$$

すなわち、基準時における支出シェアで加重平均した場合の商品別固有効果の平均はゼロになる、という識別条件をおいている。この制約のもとで価格指数を推計することになる。これは係数に関する線形制約つき OLS で推計可能である。具体的には、係数制約を

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\beta &= 0 \\ \mathbf{R} &= (w_{10}, w_{20}, ..., w_{n0}) \end{aligned}$$

推計式を

$$y = X\beta + \varepsilon$$

とすると、制約付き最小二乗は

$$(y - X\beta)' (y - X\beta) - 2\lambda\mathbf{R}\beta$$

一階条件は

$$-X'y + X'X\beta - \mathbf{R}'\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}^{cons} &= (X'X)^{-1} X'y + (X'X)^{-1} \mathbf{R}'\lambda \\ \mathbf{R}\widehat{\beta}^{cons} &= \mathbf{R}(X'X)^{-1} X'y + \mathbf{R}(X'X)^{-1} \mathbf{R}'\lambda \\ 0 &= \mathbf{R}\beta^{ols} + \mathbf{R}(X'X)^{-1} \mathbf{R}'\lambda \end{aligned}$$

よって、

$$\lambda = -\left[\mathbf{R}(X'X)^{-1} \mathbf{R}'\right]^{-1} \mathbf{R}\beta^{ols}$$

これを代入して、

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}^{cons} &= (X'X)^{-1} X'y - (X'X)^{-1} \mathbf{R}' \left[\mathbf{R}(X'X)^{-1} \mathbf{R}'\right]^{-1} \beta^{ols} \\ &= \beta^{ols} - (X'X)^{-1} \mathbf{R}' \left[\mathbf{R}(X'X)^{-1} \mathbf{R}'\right]^{-1} \mathbf{R}\beta^{ols} \end{aligned}$$

が制約付き OLS の推計量となる。Selvanathan and Rao (1994) は ε_{it} の分散が $\frac{\sigma_2}{w_{i0}}$ となっているとき (非対角成分は全てゼロである)、共通成分の制約付き推計量は Laspeyres 指数になることを証明している。時間のあるものは試みてみよ。

6 Feenstra-Reinsdorf (2007)

New Stochastic Approach に対して直ちに生じる批判は、推定式がなんらかの理論から導出されたものではなく、いきなり研究者により与えられていることであろう。これに対する一つの反論が Feenstra and Reinsdorf (2007)[5]である。CES 型効用関数に対応する支出関数は、前の講義ノートで下記のように与えられていた。

$$E\left(U_t, p^t\right) = U_t P_t = U_t \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

ホモセティック効用関数であることを利用し、効用水準を消去し、さらにパラメターを変換して、

$$c\left(p_t, b_t\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_{it} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

としよう。シェファード・マッケンジーの補題を用い、この対数微分を整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln c\left(p_t, b_t\right)}{\partial \ln p_{it}} &= \frac{p_{it} q_{it}}{c\left(p_t, b_t\right)} = w_{it} \\ &= c\left(p_t, b_t\right)^{\sigma-1} b_{it} p_{it}^{1-\sigma}\end{aligned}$$

と、i 財への支出シェアとなる。よって、この対数階差をとると、

$$\Delta \ln w_{it} = (\sigma - 1) \Delta \ln c\left(p_t, b_t\right) + \Delta \ln b_{it} + (1-\sigma) \Delta \ln p_{it}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\varepsilon_{it} &= \Delta \ln b_{it} \\ \alpha_t &= (\sigma - 1) \Delta \ln c\left(p_t, b_t\right)\end{aligned}$$

とすると、

$$\Delta \ln w_{it} = \alpha_t + (1-\sigma) \Delta \ln p_{it} + \varepsilon_{it}$$

[5]R.C. Feenstra and M. B. Reinsdorf (2007) “Should Index Numbers Have Standard Errors? Theory and Application to Asian Growth”, in Berndt and Hulten Ed. *Hard-to-Measure Goods and Services: Essays in Honor of Zvi Griliches* University of Chicago Press, pp. 483-513.

さらに変形すると、

$$\begin{aligned}\Delta \ln p_{it} &= \Delta \ln c\,(p_t, b_t) + \frac{\Delta \ln w_{it}}{(1-\sigma)} + \frac{\varepsilon_{it}}{(\sigma-1)} \\ &= \ln PS^{sv} + \frac{\Delta \ln w_{it}}{(1-\sigma)} + \frac{\varepsilon_{it}}{(\sigma-1)}\end{aligned}$$

となる。この式と、new stochastic approach の

$$\Delta \ln p_{it} = \alpha_t + \beta_i + \varepsilon_{it}$$

と比較してみよう。識別条件として、

$$\sum w_{i0}\beta_i = 0$$

を課すということは、$\Delta \ln w_{it}$ のなんらかの平均をゼロにすることに等しい。そこで、Sato-Vartia の weight を用いると、

$$s_i = \frac{(w_{i1} - w_{i0}) \,/\, (\ln w_{i1} - \ln w_{i0})}{\sum_{i=1}^{n} (w_{i1} - w_{i0}) \,/\, (\ln w_{i1} - \ln w_{i0})}$$

このとき、常に、

$$\sum s_i \frac{\Delta \ln w_{it}}{(1-\sigma)} = 0$$

が成立する。Feenstra and Reinsdorf (2007) はこれをもってして、New Stochastic Approach の推定式は経済学的に正当化されると議論している。無論、Feenstra (1994) 本人が指摘しているように、誤差項 ε_{it} は選好パラメター b_{it} の関数であり、支出ウェイトと密接な関係を有するので OLS の推定式はバイアスを持ってしまい、GMM 等の工夫が必要となる。また、選好パラメターの変化の分布について強い仮定をおく必要が生じてくる。

7　批判

New Stochastic Approach への最も厳しい批判は Diewert (1995) によるものである[6]。具体期には、次の点を指摘している。1)　実際の誤差項の分散が仮定されている分散と異なる、(2) サンプルの期間が異なると、指数の推定量が変化する、(3) 実質的な変化が生じ相対価格が変化した場合、その変化はトレンドの変化のノイズとなる。

どれも重要な批判であるが、特に (1) と (3) は重要なものであろう。誤差項の分散を様々な形に変えることで各種指数にすることが可能であるが、誤差項の分散は推定されるべきものであり、強い仮定を特に根拠なしにおくことを正当化することは困難であると思われる。もしも New Stochastic Approach

[6]Diewert (1995) “On the Stochastic Approach to Index Numbers,” Discussion Paper No. 95–31, Department of Economics (Vancouver: University of British Columbia).

による GLS が正しいのであれば、FGLS、すなわち、第一ステップで OLS を用いて分散行列を計算し、第二ステップで Weighted OLS を用いる場合とほぼ一致するはずであるが、多くの場合、それら FGLS と標準的な指数は一致しなくなる。(2) は、回帰分析で推計する場合、1990 年から 1991 年までの物価の変動の推計量が、2000 年のデータを入れるか入れないかで変化してしまうことになる。標準誤差も同じくサンプルサイズに依存してくる。実質的に大きな変化は生じにくいとは思われるが、ある程度のウィンドウを事前に設定し固定する必要が出てくる。(3) もまた深刻な問題であり、そもそも共通変動とは何か、なぜ相対価格は変動するのか、という根本的な問題に行き着く。回帰分析や最尤法を用いる場合誤差項の分布の情報が決定的に重要になってくるが、そこの理論が特にないために生じる問題でもある。

Lippe (2007) は、支出ウェイトの中に価格情報が含まれており、それを外生として扱うことに疑問を呈している。確かに、価格が変動すればウェイトも通常は変動するはずであり、誤差項の分散が価格に依存しないという仮定は正当化することが困難であろう。さらに Lippe (2007) は数値計算をおこない、Laspeyres や Paasche 等の各種指数の平均値が大きく異なるのに対し、New Stochastic Approach による標準誤差はほとんど差が生じないことを指摘している。New Stochastic Approach の最大のメリットの一つは標準誤差が付くことであるが、それが平均値よりも小さな相違しかないのであれば、各種指数を比較する際、特に有用な情報ではなくなってしまう。

New Stochastica Approach が本領を発揮するのは、公理体系の指数論が機能しない、推移性が重要になる地域間物価指数である。推移性をみたす物価指数は、公理体系のもとではごく限られたものになっており実用的なものは存在しなかった。New Stochastic Approach では、地域間物価の相違は、地域ダミーにより容易に推計可能となるのである。