2016年応用マクロ経済学
指数理論 (1)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 28 年 10 月 18 日

概 要

指数理論入門とラスパイレス、パーシェ指数

1　はじめに

物価指数は、現在の金融政策における最重要経済指標であり、かつ国民経済計算などの重要な経済統計の基礎となっている。特に、「異次元」の金融政策が各国で実行されている今日新聞で物価が話題にのぼらない日はないと言ってよいくらい、新聞やテレビなど、各種報道で頻繁に取り上げられている。かつては総務省や日本銀行など、ごく一部の公的機関のみが作成してた物価指標は、現在では非政府機関も試算を発表するなど、物価は計測、試算からその活用まで、広く社会に広がっているといえる。

それほど一般的になっている物価指数であるが、いざ、その背景となる理論を理解しようとすると、多くの人は躓くではなかろうか。基本的な物価指数は、ミクロ経済学やマクロ経済学の入門書で触れられているが、そこでカバーされている内容は、現在の理論の進展と比べると 100 年近く前の段階で止まっており、多くの研究者が分析上用いている理論からは程遠いものである。そして、大学院用のミクロ・マクロ経済学の教科書はもちろん、計量経済学においても指数理論の進展についてはほとんど触れられていない。経済学術誌における研究分野の分類体系では、指数理論に関する研究は数理・定量的分析、およびマクロ経済学の両方に分類されることが多いが、index theory という独自の分類はされていない。C43 Index Numbers and Aggregation, Leading Indicators とう項目はあるが、これは景気循環予測などを念頭においているものと思われる。大学院レベルの指数理論は、ILO 等が共同で執筆している「消費者物価マニュアル」における 15-18 章が現在では必読書となっている。この「マニュアル」は統計作成業務にあたる実務家を想定した、日本語訳は 900 ページ近くにのぼる大著であり、包括的な内容である。しかし

なが、学部入門レベルを終えた後、実務家や専門家を目指さないものには、この大著はハードルが高いことは否めない。

私事であるが、物価に関する研究を開始した 2006 年頃、指数理論に研究対象を広げることに対して強い気おくれを感じていた。指数理論はその重要性と歴史の長さから、膨大な先行研究と成果の蓄積があるが、私のうけた大学院講義では全く触れられておらず、完全に独学となること、そして、通常の経済理論や計量経済学とは大きく異なった手法、思考法が背後にあるように思われたためである。だが、結果として指数理論研究に足を踏み入れることになり、I. Fisher 達による古典的な研究から比較的最近までの研究に目を通し、かつ指数理論の専門家との交流を通じ、ある程度、若干であるが、私なりの理解が進みつつある。本講義では、実験的に、一マクロ経済学者がみた指数理論、という立場で指数理論を概観したい。

2　用語について

「物価」という言葉は「物」の「価格」という意味である。経済学では、物は財に相当しており、形のある「もの (ひらがな)」である。人間にとり価値のある「もの (ひらがな)」を商品と呼び、商品は形のある財と形のないサービスに分類される。日本銀行の作成する物価指数は、財の価格を調べる企業物価指数と、サービスの企業向けサービス価格指数の二つに分類されており、「物価」指数と価格指数、という二つの用語を使い分けている。一方、英語では、どちらも Price Index となっている。総務省の作成している消費者物価指数は、その対象範囲の半分近くがサービスでありがなら、「物価」、という用語を使っている。小学館の「日本国語大辞典」によると、物価という表現は 9 世紀に書かれた、当時の律令の解説書「令義解 (りょうのぎげ)」に登場し、15 世紀に書かれた「史記」の注釈書「史記抄」にも出てくる。一方、「価格」は 19 世紀後半、Rate お呼び Value の翻訳語として作り出されたものであり (price ではない)、その歴史は浅い。1887 年 (明治 20 年) には日本で卸売物価指数が既に作成されており、歴史を考えると商品空間全体を対象として「物価」と呼ぶことは仕方ないようである。

3　指数の基本問題

もしも私たちの関心が企業の売り上げ、家計の所得額のみであれば、指数を作成する必要はない。企業の売り上げや家計の所得は金額という統一単位があり、それらを集計すればよいだけである。しかし、もしも、複数の商品価格や売上数量の動向に関心がある場合は、話は一気に複雑になる。ある商品の価格が 100 円から 120 円に、売上数量は 100 個から 50 個に変化し、別の商品が 50 円から 100 円 (数量は 100 個から 50 個に) に変化したとき、それ

はどう集計すればよいのだろうか?問題は、ある商品の 100 円と別の商品の 50 円という価格は、どちらも円という統一単位であっても、100 円と 50 円の足し算には意味がないことにある。単純な総和に意味がない場合、一番情報が多いのは、個々のデータをすべて並べることである。個々の商品の価格と数量の変化の表を眺めることで、大ざっぱな状況を知ることはできるかもしれない。しかしながら、もしも対象商品が数万個あったらどうだろうか?たとえ情報が落ちるとしても、理解しやすいような形で情報を集約する必要が出てくるだろう。仮に、商品価格変化の一般的な特徴 (もしも存在すれば) を見たい場合、いろいろな選択肢がある。一つは、個々の商品価格の変化率を計算し、それらを単純平均、あるいは加重平均することであろう。より複雑な手法としては、価格の自然対数をとり、その差分を時間ダミーに回帰する、あるいは因子分析やカルマンフィルターを用いて共通要素の抽出も可能であろう。問題は、手法を選択する時、どの手法が望ましいか明らかでないことである。なぜ単純平均、あるいは加重平均ではいけないのだろうか?加重平均をとる場合、その重みはどう計算すればよいのだろうか?それぞれの手法が望ましいケース、望ましくないケースを思い描くのはたやすい。しかしながら、極力一般的な状況を考え、普遍的な指数の導出を試みたのが I. Fisher による公理主義的アプローチであり、Fisher 指数はその一つの成果である。残念ながら、Fisher 指数もまた完全な指数ではなく、公理主義的アプローチで一つの指数を導出することはできないことが知られている。さらに、Fisher が挙げた、指数が満たすべき基本正式をすべて満たす指数は存在しないことも明らかとなっている。このアプローチがついえた状況では、各指数の特徴を踏まえたうえで、利用する側が自分の責任で指数を選択する必要があるのである。

4 ラスパイレス指数とパーシェ指数

指数理論の最初として、学部教科書でも触れられており、最もよく用いられるラスパイレス指数とパーシェ指数について復習し、その特徴をみてみよう

まず、t 期における i 財の数量を q_{it}、価格を p_{it} とする。また、0 期と t 期の総支出額の比を Value Index と呼ぶことにする。なお、特に説明がない場合、価格と数量はすべて正の値をとる実数であると仮定する (数量のゼロを除外することには実際上は非常に大きな問題であるがゼロからの変化率を求めることはできないので、ゼロを扱うためには追加の仮定が必要となる)

$$V_{0t} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0}$$

太字 $\mathbf{p}_t$ は $\mathbf{p}_t = (p_{i0}, p_{1t}, p_{2t}, ...p_{nt})'$ の縦価格ベクトルであり、$\mathbf{p}_t'$ はその転

値ベクトルである。Value Index は、下記のような加重平均で示すことも可能である。

$$V_{0t} = \sum_i w_{it}^* \frac{p_{it}}{p_{i0}},$$

$$w_{it}^* = \frac{p_{i0} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}}$$

ただし、重み w_{it}^* は、分母と分子の数量の時期が異なるため、その総和は 1 にならない。総和が 1 になるなためには、数量を評価する時期を統一せねばならない。具体的には、数量から時間に関する subscript を除去し、

$$P_{0t} = \frac{\sum_i p_{it} q_i}{\sum_i p_{i0} q_i} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}} = \sum_i w_i \frac{p_{it}}{p_{i0}}$$

$$w_i = \frac{p_{i0} q_i}{\sum_i p_{i0} q_i}, \sum_i w_i = 1$$

とする必要がある。数量の時期を 0 にしたとき、Laspeyres Index を得る。すなわち、

$$P_{0t}^L = \frac{\sum_i p_{it} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}}$$

一方、数量の時期を t にすると、Paashce Index、すなわち

$$P_{0t}^P = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{it}}$$

を得る。通常、それぞれの指数は以下のように記される。

$$P_{0t}^L = \frac{\sum_i p_{it} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} = \sum_i \frac{p_{it}}{p_{i0}} \left(\frac{p_{i0} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} \right)$$

$$\left(P_{0t}^P \right)^{-1} = \sum_i \frac{p_{i0}}{p_{it}} \left(\frac{p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{it} q_{it}} \right)$$

もしくは

$$P_{0t}^{P} = \frac{1}{\sum_{i} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{-1} \left(\frac{p_{it}q_{it}}{\sum_{i} p_{it}q_{it}}\right)}$$

Laspeyres Index は価格指数の加重平均、Paashce 指数は価格変化率の加重調和平均 (Harmonic Mean) となっている。

4.1 (復習) 調和平均

$x_1, x_2, ...x_n$ の調和平均 (Harmonic Mean) h とは

$$\frac{n}{h} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n},$$
$$h = \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)}$$

で定義される。すなわち、逆数の平均の逆数である。この調和平均の意味としてよく知られているのが、行きが時速 100 キロで帰りが時速 200 キロの場合の平均時速を求めるケースである。道のりが 100 キロだとしよう。するとり、行きは 1 時間で、帰りは 30 分となる。一時間 30 分で 200 キロの道を行ったことになるので、平均時速は 133.33 キロである。これは、二つの速度の調和平均 2/((1/100) + (1/200)) と一致する。x_1 と x_2 の調和平均を考えてみよう。すると、

$$h = \frac{2}{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}\right)}$$
$$= \frac{2x_1x_2}{x_2 + x_1}$$
$$(x_2 + x_1)\, h = 2x_1x_2$$
$$x_2h + x_1h = 2x_1x_2$$
$$x_2h - x_1x_2 = x_1x_2 - x_1h$$
$$x_2\,(h - x_1) = x_1\,(x_2 - h)$$

もしも $x_1 \neq x_2$なら

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_2 - h)}{(h - x_1)}$$

すなわち、調和平均からのかい離値の比が、もとの比に等しいように作られている。

4.2 (復習) 幾何平均

$x_1, x_2, ...x_n$ の調和幾何平均 (Geometric Mean) gm とは

$$\begin{aligned} gm &= \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{1/n} \end{aligned}$$

である。幾何平均とよばれる理由は、二辺の長さが a と b である長方形と同じ面積の正方形の一片の長さはが幾何平均で与えられるためと言われている。幾何平均は経済学、特に動学分析と相性が良い。例えば、ある変数の年間成長率が一年目で 100% 、すなわち 2 倍。二年目が 50% 、すなわち 1.5 倍になったとする。この二年間の平均年間成長率を計算してみよう。算術平均だと、(2+1.5)/2=3.5/2 となる。しかし、実際の変数は、当初が 100 であれば、一年後に 200、二年後は 300 になっており、100 から 300 までの三倍になっている。すなわち、二年したら三倍になるような年間成長率は、$x^2 = 3$ すなわち、$x = \sqrt{3}$ である。一方、幾何平均をとると、$\sqrt{2 * 1.5} = \sqrt{3}$。すなわち、複利計算が発生する、成長率の平均を計算する際には、幾何平均を用いるのが便利である。

なお、一般に、すべての正の実数ベクトルに関しては、

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

が成立することが知られている。興味あるものは証明してみよ。

5 数量指数

価格指数ほどには用いられないが、数量についても指数を作成することが可能である。数量指数 Q とすると、Laspeyres と Paashce 数量指数はそれぞれ

$$Q_{0t}^{L} = \frac{\sum_i p_{i0} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} = \frac{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0}$$

$$Q_{0t}^{P} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{it} q_{i0}} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_0}$$

ここで、重要な性質がある。Laspeyres と Paashce は、それぞれの Price

Index と Quantity Index を乗じても、Value Index にはならない。すなわち、

$$Q^L_{0t}P^L_{0t} = \frac{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_0}\frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_0}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_0},$$

$$Q^P_{0t}P^P_{0t} = \frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_0}\frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_t}$$

はそれぞれ解釈不能な数値であるが、それぞれを互い違いにとると、

$$Q^L_{0t}P^P_{0t} = \frac{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_0}\frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_t} = \frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_0} = V_{0t}$$

$$Q^P_{0t}P^L_{0t} = \frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_0}\frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_0}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_0} = \frac{\mathbf{p}'_t\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}'_0\mathbf{q}_0} = V_{0t}$$

となる。このような関係にある Q^P_{0t} を P^L_{0t} の Cofactor とを呼ぶ (Q^L_{0t} は P^P_{0t} の cofactor である)。

6 Laspeyres、Paasche 両指数の関係

Laspeyres、Paasche 両指数の間には密接な関係がある。両価格指数の差、

$$g = \frac{P^P_{0t} - P^L_{0t}}{P^L_{0t}}$$

は Lasperyes-Paashce ギャップと呼ばれる。g は下記のように分解することが可能である。

$$g = \frac{\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - P^L_{0t}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - Q^L_{0t}\right)}{P^L_{0t}Q^L_{0t}}$$

(証明)

$$\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - P^L_{0t}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - Q^L_{0t}\right) = \sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\frac{q_{it}}{q_{i0}} - \sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}Q^L_{0t} - \sum_i w_{i0}\frac{q_{it}}{q_{i0}}P^L_{0t} + \sum_i w_{i0}P^L_{0t}Q^L_{0t}$$

$$\sum_i w_{i0} = 1, \sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}Q^L_{0t} = P^L_{0t}Q^L_{0t}$$

$$\sum_i w_{i0}\frac{q_{it}}{q_{i0}}P^L_{0t} = P^L_{0t}Q^L_{0t}$$

$$w_{i0} = \frac{p_{i0}q_{i0}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}}$$

$$\sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\frac{q_{it}}{q_{i0}} = \sum_i \frac{p_{it}q_{it}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}} = V_{0t}$$

したがって

$$\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-P_{0t}^L\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-Q_{0t}^L\right)=V_{0t}-P_{0t}^LQ_{0t}^L=P_{0t}^PQ_{0t}^L-P_{0t}^LQ_{0t}^L$$
$$g=\frac{P_{0t}^PQ_{0t}^L-P_{0t}^LQ_{0t}^L}{P_{0t}^LQ_{0t}^L}=\frac{\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-P_{0t}^L\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-Q_{0t}^L\right)}{P_{0t}^LQ_{0t}^L}.$$

$\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-P_{0t}^L\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-Q_{0t}^L\right)$ は、価格変化率と数量変化率の、それぞれのラスパイレス指数からのかい離の共分散とみなすことができる。この値を Cov と表記すると、価格と数量の共分散が負の時、すなわち、価格が高いときに数量が減少する関係にあれば、Lasperyes-Paashce ギャップは負、すなわち、Paashce Price Index は Laspeyres Price Index よりも低い値になることがわかる。この関係は、最初に導出した Bortkiewicz (1923) に敬意を表し、Bortkiewicz Decomposition とも呼ばれる。また、

$$Cov=V_{0t}-P_{0t}^LQ_{0t}^L=P_{0t}^LQ_{0t}^P-P_{0t}^LQ_{0t}^L$$
$$=P_{0t}^L\left(Q_{0t}^P-Q_{0t}^L\right)$$

すなわち、共分散が負の時には、Paasche Quantity Index が Laspeyres Quantity Index よりも小さくなることがわかる。

6.1 注意事項

初級ミクロ経済学を勉強した段階では、この共分散は通常負になるので、g もまた負になると考えるかもしれない。数量と価格の間に、標準的な消費者理論を想定しよう。価格ベクトル $\mathbf{P}_0$、$\mathbf{P}_t$ の下での最適消費ベクトルをそれぞれ $\mathbf{Q}_0,\mathbf{Q}_1$ とする。効用関数を U とし、$U(\mathbf{Q}_0)=U_0$ とする。すると、支出関数 $E(P,U)$ を用いて、

$$\mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_0=E(\mathbf{P}_0,U_0)$$

$$\mathbf{P}_t'\mathbf{Q}_t=E(\mathbf{P}_t,U_t)$$

Paasche 指数は

$$P_{0t}^P=\frac{\sum_i p_{it}q_{it}}{\sum_i p_{i0}q_{it}}=\frac{\mathbf{P}_t'\mathbf{Q}_t}{\mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_t}=\frac{E(\mathbf{P}_t,U_t)}{\mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_t}$$

ところで、

$$E\left(\mathbf{P}_0, U_t\right) - \mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_t$$

は、$\mathbf{Q}_t$ の下で U_t の効用が実現されることに注意すると、常に非正の値になっているはずである。$E\left(\mathbf{P}_0, U_t\right)$ は $\mathbf{P}_0$ の下で U_t の効用を実現する最小費用なのだから、$\mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_t$ よりも大きな値になってはならない。したがって、

$$E\left(\mathbf{P}_0, U_t\right) \leq \mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_t$$

すなわち、

$$P_{0t}^P = \frac{E\left(\mathbf{P}_t, U_t\right)}{\mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_t} \leq \frac{E\left(\mathbf{P}_t, U_t\right)}{E\left(\mathbf{P}_0, U_t\right)}$$

一方、Laspeyres 指数は

$$P_{0t}^L = \frac{\sum_i p_{it} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} = \frac{\mathbf{P}_t'\mathbf{Q}_0}{\mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_0} = \frac{\mathbf{P}_t'\mathbf{Q}_0}{E\left(\mathbf{P}_0, U_0\right)}$$

ここで、Paasche 指数の時と同様に、

$$E\left(\mathbf{P}_t, U_0\right) < \mathbf{P}_t'\mathbf{Q}_0$$

したがって、

$$\frac{E\left(\mathbf{P}_t, U_0\right)}{E\left(\mathbf{P}_0, U_0\right)} \leq \frac{\mathbf{P}_t'\mathbf{Q}_0}{E\left(\mathbf{P}_0, U_0\right)} = P_{0t}^L$$

しかし、まだ、Laspeyres 指数と Paasche 指数の大小に関してはまだ何も言うことはできない。しかしながら、もしも効用関数化が一次同次、あるいはその単調増加変換のホモセティック関数であれば、支出関数は下記のような変換が可能である。

$$\begin{aligned}
E\left(\mathbf{P}_t, U_t\right) &= \min\left\{\sum_i p_{it} q_{it} : U\left(q_{1t}, q_{2t}, q_{3t}, \ldots q_{nt}\right) \geq \overline{U_t}\right\} \\
&= \min\left\{\sum_i p_{it} q_{it} : \frac{U\left(q_{1t}, q_{2t}, q_{3t}, \ldots q_{nt}\right)}{\overline{U_t}} \geq 1\right\} \\
&= \min\left\{\sum_i p_{it} q_{it} : U\left(\frac{q_{1t}}{\overline{U_t}}, \frac{q_{2t}}{\overline{U_t}}, \frac{q_{3t}}{\overline{U_t}}, \ldots \frac{q_{nt}}{\overline{U_t}}\right) \geq 1\right\} \\
&= \overline{U_t} \min\left\{\sum_i p_{it} \frac{q_{it}}{\overline{U_t}} : U\left(\frac{q_{1t}}{\overline{U_t}}, \frac{q_{2t}}{\overline{U_t}}, \frac{q_{3t}}{\overline{U_t}}, \ldots \frac{q_{nt}}{\overline{U_t}}\right) \geq 1\right\}
\end{aligned}$$

$z_{it} = \dfrac{q_{it}}{\overline{U_t}}$ とすると、

$$E\left(\mathbf{P}_t, U_t\right) = \overline{U_t} \min\left\{\sum_i p_{it} z_{it} : U\left(z_{1t}, z_{2t}, z_{3t}, \ldots z_{nt}\right) \geq 1\right\}$$

したがって、

$$E(\mathbf{P}_t, U_t) = \overline{U_t} \times E(\mathbf{P}_t, 1)$$

同様に、

$$E(\mathbf{P}_0, U_0) = \overline{U_0} \times E(\mathbf{P}_0, 1)$$

したがって、

$$\frac{E(\mathbf{P}_t, U_t)}{E(\mathbf{P}_0, U_t)} = \frac{U_t \times E(\mathbf{P}_t, 1)}{U_t \times E(\mathbf{P}_0, 1)} = \frac{E(\mathbf{P}_t, 1)}{E(\mathbf{P}_0, 1)} = \frac{U_0 \times E(\mathbf{P}_t, 1)}{U_0 \times E(\mathbf{P}_0, 1)} = \frac{E(\mathbf{P}_t, U_0)}{E(\mathbf{P}_0, U_0)}$$

したがって、

$$P_{0t}^P = \frac{E(\mathbf{P}_t, U_t)}{\mathbf{P}_0'\mathbf{Q}_t} \leq \frac{E(\mathbf{P}_t, U_t)}{E(\mathbf{P}_0, U_t)} = \frac{E(\mathbf{P}_t, U_0)}{E(\mathbf{P}_0, U_0)} \leq \frac{\mathbf{P}_t'\mathbf{Q}_0}{E(\mathbf{P}_0, U_0)} = P_{0t}^L$$

となり、

$$P_{0t}^P \leq P_{0t}^L$$

を得ることができる。

もしも、価格変化に伴う価格しかし、中級計量経済学を勉強した後であれば、価格と数量は市場均衡で決定されるので、変動が需要側要因によってもたらされている場合は、価格と数量は供給曲線上の動きを示している可能性もあることに気が付くだろう。そもそも、ここで集計されている財、i が同一の需要曲線上にあるとは限らず、例えば、卵と車のような、全く異質な財の価格と数量の変化を集計している可能性もあり、その場合、共分散 Cov がどうなるか、経済学的にはなんら制約を与えることができないことに注意せよ。

6.2 Gershenkron 効果

ハーバード大学において、第二次世界大戦後のソビエト経済の研究をしていた Alexander Gershenkron は、ソビエト経済の統計が過大に推計されていると指摘した。それは、基準年を変更することによって、成長率を操作することが可能になる、というものであり、Laspeyres 指数の性質を指摘したものでもある。これは二時点ではなく、先進国と途上国の比較でも問題になる。先進国、途上国どちらの消費パターンを Weight とするかで、物価は大きく変わってくる可能性があるのである。