

2009年度応用マクロ経済学講義ノート 家計消費と予備的貯蓄

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 21 年 12 月 27 日

1 恒常所得・ライフサイクルモデル

不確実性下のライフサイクルモデルでは、考察される不確実性、たとえば健康状態や就業確率、家族の数、マクロ経済の動向、等に関して、そのリスクを取引する市場というものを考えないのが通常である。前回の Arrow Securities の存在する経済と比較するとその違いは明確である。

Sequential Economy における予算制約は、 s^t の下で、来期の状態が s_{t+1} であるときの条件付き財に関して市場があるので、下記ようになる。

$$c_t^i(s^t) + \sum_{s^{t+1} \in S^t} q_t(s^t, s_{t+1}) a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) \leq y_t^i(s^t) + a_t^i(s^t)$$

一方、不確実性下のライフサイクルモデルでは、通常は下記のような予算制約式を仮定する。

$$c_t^i(s^t) + q_t(s^t) a_{t+1}^i(s^t) = y_t^i(s^t) + a_t^i(s^{t-1})$$

$q_t(s^t)$ は、 t 期において、状態が s^t であるときに $t+1$ 期に 1 単位の消費財を入手するための価格である。したがって、ライフサイクルモデルでは、様々な不確実性に対処するための資本市場へのアクセスが制限されている。なお、ここで、 $a_{t+1}^i(s^t)$ は $t+1$ 期における消費財の量を表すが、これは t 期において確定しており、この変数に関しては全く不確実性はない。

もちろん、このような経済における均衡はパレート効率的ではないし、そもそも一般均衡解が存在するかどうか怪しい。有限視野のライフサイクルモデルを世代重複モデルとして記述する時、その均衡の数理的特徴に関しては非常に多くの研究がある。不確実性が存在しない場合であっても、世代重複モデルの均衡を一般的に描写するのは極めて困難である。

にも関わらず、不確実性下のライフサイクルモデルを上記のように、不完備な資本市場で描写するのは、出発点が一般均衡ではなく、消費関数論争に

端を発しているためであると思われる。消費水準は所得にどう依存しているか? 利子課税は貯蓄を増加させるか否か? これらの問いは政策当局にとり極めて重要であり、なおかつマクロ経済学にとっても、消費関数をどう記述するかはケインズ経済学体系の根幹でもあった。単純なマクロ経済モデルがデータと一致せず、様々な家計消費のミクロ経済理論がデータとの整合性をもとめて展開されていったとき、一般均衡を数理的に美しく描写するモデルを出発点としなかったのは自然であり、より、実際の家計が直面する問題に近い形でモデル化が進められていき、動学モデルの構造推計につながっていったのである。

1.1 二期間モデル

$T=2$ で、かつ不確実性がない場合を考える。

$$\max U(c_1) + \beta U(c_2)$$

$$c_1 + qa_1 = y_1$$

$$c_2 = y_2 + a_1$$

$$c_1, c_2 \geq 0$$

または

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+r)} = y_1 + \frac{y_2}{(1+r)}, 1+r = \frac{1}{q}$$

一階条件は

$$U'(c_1) = \beta(1+r)U'(c_2)$$

この一階条件と予算制約より、二期間の消費水準を一意に決定することができる。

ここで、金利 r の役割を考えてみる。

(1) 金利の上昇は、二期目の消費をより安くするため、一期目の消費を下げ、二期目の消費を上昇させる代替効果がある。

(2) 金利の上昇は、二期目の消費をより安くするため、実質所得を高める所得効果がある。

(3) 二期目にも所得があると仮定すると、金利の上昇は生涯所得の割引現在価値を低下させる、人的資本効果がある。

効用関数の形状により、上記の効果の相対的強度は異なる。

効用関数が CRRA であるとき、すなわち

$$U = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

異時点間の代替の弾力性は

$$is(c_2, c_1) = - \frac{\left[\frac{d \frac{c_2}{c_1}}{\frac{c_2}{c_1}} \right]}{\left[\frac{d \frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r}} \right]} = - \left[\frac{d \frac{c_2}{c_1}}{d \frac{1}{1+r}} \right] \left[\frac{\frac{1}{1+r}}{\frac{c_2}{c_1}} \right]$$

ところで、一階条件より

$$\frac{\beta U'(c_2)}{U'(c_1)} = \frac{1}{1+r}$$

CRRA の場合

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{1}{\beta(1+r)} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

これを微分して、

$$\frac{d \frac{c_2}{c_1}}{d \frac{1}{1+r}} = - \frac{1}{\beta\sigma} \left(\frac{1}{\beta(1+r)} \right)^{-\frac{1}{\sigma}-1}$$

整理すると

$$is(c_2, c_1) = \frac{1}{\beta\sigma} \left(\frac{1}{\beta(1+r)} \right)^{-\frac{1}{\sigma}-1} * \left(\frac{1}{\beta(1+r)} \right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma}$$

したがって、異時点間の代替の弾力性は、Arrow-Pratt の相対的リスク回避度の逆数となり、一定値となる。

リスク回避的な家計は、同時に異時点間の代替の弾力性が小さいことになる。すなわちそのような家計の消費は金利にあまり反応せず、より Flat な消費経路を好むことになる。

しかし、そもそも、リスク態度と異時点間の選択がシンクロして動く必然性はないはずである。

Epstein and Zin (1989) は、両者のリンクを外した、下記のような効用関数を提唱している。

$$U(c_1, c_2(s)) = \left\{ [c_1]^{1-\frac{1}{\gamma}} + \beta \left[\sum_s \pi(s) [c_2]^{1-\sigma} \right]^{\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{1-\sigma}} \right\}^{\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

ここで、 $\sigma = \gamma$ と仮定すると、通常の CRRA と一致する。無限視野の場合は

$$V(c, s^t) = \left\{ [c_1]^{1-\frac{1}{\gamma}} + \beta \left[\sum_s \pi(s^{t+1}|s^t) [V(c, s^{t+1})]^{1-\sigma} \right]^{\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{1-\sigma}} \right\}^{\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

となる。このような効用関数の特徴の分析は、現在の数理経済学の中心トピックの一つである。

ところで、CRRA の場合は

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{1}{\beta(1+r)} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

と

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+r)} = y_1 + \frac{y_2}{(1+r)}$$

より

$$c_2 = \left(\frac{1}{\beta(1+r)} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} c_1$$

$$c_1 \left(1 + \left(\frac{1}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{1-\frac{1}{\sigma}} \right) = y_1 + \frac{y_2}{(1+r)}$$

$$c_1 = \left(1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1} \right)^{-1} \left(y_1 + \frac{y_2}{(1+r)} \right)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial (1+r)} &= -\frac{y_2}{(1+r)^2} \left(1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1} \right)^{-1} \\ &\quad - \left(y_1 + \frac{y_2}{(1+r)} \right) \left(1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1} \right)^{-2} \left(\beta^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-2} \right) \\ &= -\frac{y_2}{(1+r)^2} \left(1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1} \right)^{-1} - \left(1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1} \right)^{-1} c_1 \left(\beta^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-2} \right) \\ &= -\left(1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1} \right)^{-1} \left[\frac{y_2}{(1+r)^2} + c_1 \left(\beta^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-2} \right) \right] \end{aligned}$$

$\frac{y_2}{(1+r)^2} + c_1 \left(\beta^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1}{\sigma} - 1 \right) (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-2} \right)$ の第一項が人的資本効果、残りの項が代替効果と所得効果の合算である。

ここで、 $\sigma = 1$ のとき、すなわち対数効用関数のとき、第一項のみが残る、すなわち、代替効果と所得効果が打ち消しあう。さらに、第二期の所得が存在しないとき、金利は現在の消費に全く影響を与えないのである！

$0 < \sigma < 1$ のとき、すなわち、異時点間の代替の弾力性が高い時、第二項は正となり、代替効果が所得効果を上回る。このとき、第二期の消費がより強く選好されるようになり、一期目の消費は低下する。

$\sigma > 1$ のとき、すなわち異時点間の代替の弾力性が低い時、第二項は負となり、所得効果が代替効果を上回る。このとき、Total の影響は人的資本効果の大きさに依存するようになる。

1.2 不確実性下の多期間モデル

$$u^i(c^i) = \sum_{t=0}^T \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi_t(s^t) U^i(c_t^i(s^t), s^t) \quad (1)$$

を

$$c_t^i(s^t) + q_t(s^t) a_{t+1}^i(s^t) = y_t^i(s^t) + a_t^i(s^{t-1})$$

の下で最大化させることを考える。

ただし、 $q=1/(1+r)$ は期間によらず一定であるとする。

所得に不確実性がなく、かつ、選好のシフト項となる s にも不確実性はないものとする。さらに無限視野を仮定する。将来所得の現在割引価値の総和と現在の金融資産の和として

$$W_0 = a_{-1} + \sum_{t=0}^T \frac{y_t}{(1+r)^t} < \infty$$

とする。一階条件は

$$U_c(c_t, s^t) = \beta(1+r) U_c(c_{t+1}, s^{t+1})$$

したがって

$$U_c(c_t, s^t) = \left(\frac{1+\rho}{1+r} \right)^t U_c(c_0, s^0)$$

まず、 $\rho = r$ のときを考える。

(1) 選好 s^t が限界効用を高めるとき、消費は高くなる。なぜなら、限界効用は消費に関して逓減するためである。

(2) 選好 s^t が消費と分離可能な時、消費は常に一定となる。すなわち、 $c_{t+1} = c_t$

(3) 選好 s^t が家計人数を表しているとき、かつ Equivalent Scale を考えない場合、CRRA は

$$U = \frac{c s^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

となり、 s^t の増加は消費の限界効用を上昇させる。すなわち、家計人数が増加すると、家計消費の限界効用が増加し、消費水準も高まる。

(4) 選好 s^t が家計の労働供給を表しているとき、たとえば

$$U = \frac{(c^\gamma (1-s)^{1-\gamma})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

のとき、一階条件は

$$\frac{c_t}{c_0} = \left(\frac{1-s_t}{1-s_0} \right)^{\frac{(1-\gamma)(1-\sigma)}{1-\gamma+\gamma\sigma}}$$

すなわち、労働供給と消費は同じ方向に動くことになる。例えば、労働市場から引退すると、消費も低下することになる。

1.3 Quadratic Preferences

所得に不確実性があり、かつ No Ponzi Game Condition として

$$a_{t+1}(s^t) \geq - \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \sum_{s^{\tau+1}|s^{\tau}} \frac{\pi_{\tau+1}(s^{\tau+1})}{(1+r)^{\tau-(t+1)}} y_{\tau+1}(s^{\tau+1})$$

とする。

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi_t(s^t) U(c_t(s^t), s^t) + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^{t+1}|s^t} \lambda_t(s^t) (y_t(s^t) + a_t(s^{t-1}) - c_t(s^t) - qa_{t+1}(s^t))$$

一階条件は

$$\begin{aligned} \beta^t \pi_t(s^t) U_c(c_t(s^t), s^t) &= \lambda_t(s^t) \\ \beta^{t+1} \pi_{t+1}(s^{t+1}) U_c(c_{t+1}(s^{t+1}), s^{t+1}) &= \lambda_t(s^{t+1}) \end{aligned}$$

および

$$q \lambda_t(s^t) = \sum_{s^{t+1}|s^t} \lambda_{t+1}(s^{t+1})$$

したがって

$$\beta^t \pi_t(s^t) U_c(c_t(s^t), s^t) = \frac{1}{q} \sum_{s^{t+1}|s^t} \beta^{t+1} \pi_{t+1}(s^{t+1}) U_c(c_{t+1}(s^{t+1}), s^{t+1})$$

もしくは

$$\begin{aligned} U_c(c_t(s^t), s^t) &= \left(\frac{1+r}{1+\rho} \right) \sum_{s^{t+1}|s^t} \pi_{t+1}(s^{t+1}|s^t) U_c(c_{t+1}(s^{t+1}), s^{t+1}) \\ &= \left(\frac{1+r}{1+\rho} \right) E_t U_c(c_{t+1}(s^{t+1}), s^{t+1}) \end{aligned}$$

$\rho = r$ のとき限界効用はマルチンゲールになることがわかる。

ここで、完備資本市場下であると仮定すると、

$$q_t(s^{t+1}) = \frac{\pi_{t+1}(s^{t+1}|s^t)}{1+r}$$

となり、一階条件は

$$U_c(c_t(s^t), s^t) = \left(\frac{1+r}{1+\rho} \right) U_c(c_{t+1}(s^{t+1}), s^{t+1})$$

すなわち、不確実性は消滅する。一方、恒常所得・ライフサイクルモデルの下では、所得リスクをヘッジする条件付き財が存在しないので、期待値オペレーターが残るのである

ここで、さらに効用関数が選好ショックに関して分離可能で、かつ消費の二次関数であると仮定する。すなわち、

$$U(c_t(s^t), s^t) = -\frac{1}{2}(c_t(s^t) - \bar{c})^2 + v(s^t)$$

ただし、 \bar{c} は bliss point である。ここで、この bliss point が小さいと仮定すると、この効用関数はピークを越えてしまう可能性が生じてしまう。したがって、変動する所得過程の実現値にくらべて、bliss point は十分に大きく、bliss point を常に実現するような消費経路は Ponzi Game となってしまうようにすることが必要となる。

このとき、オイラー方程式は

$$E_t c_{t+1} = a_1 + a_2 c_t$$

$$a_1 = \bar{c} \left(1 - \frac{1+r}{1+\rho}\right), a_2 = a_2$$

したがって、 $\rho = r$ のときは、

$$E_t c_{t+1} = c_t \tag{2}$$

すなわち、消費水準がマルチンゲールとなる。

1.4 Permanent and Transitory Income Shocks and Consumption Response

予算制約を下記のように書く。

$$E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} = E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} + a_t \equiv W_t$$

いま、(2) が成立している経済を考える。

$$E_t E_{t+1} c_{t+2} = E_t c_{t+1} = c_t$$

したがって、有限視野 ($T < \infty$) においては、

$$c_t = \theta_t^{-1} \frac{rW_t}{1+r}, \theta_t = \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{T-t+1}}\right)$$

したがって、

$$\theta_t c_t = \frac{rW_t}{1+r}$$

$$\theta_{t-1} c_{t-1} = \frac{rW_{t-1}}{1+r}$$

予算制約より

$$a_t = (1+r)(a_{t-1} + y_{t-1} - c_{t-1})$$

したがって

$$\frac{W_t}{1+r} = (a_{t-1} + y_{t-1} - c_{t-1}) + \frac{1}{(1+r)} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s}$$

$$\theta_t c_t = r(a_{t-1} + y_{t-1} - c_{t-1}) + \frac{r}{(1+r)} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s}$$

$$\frac{\theta_t c_t + r c_{t-1}}{(1+r)} = \frac{r}{(1+r)} (a_{t-1} + y_{t-1}) + \frac{r}{(1+r)^2} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s}$$

ところで、

$$\begin{aligned} \frac{\theta_t c_t + r c_{t-1}}{(1+r)} - \theta_{t-1} c_{t-1} &= \frac{\theta_t c_t}{(1+r)} - \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{T-t+2}} - \frac{r}{(1+r)} \right) c_{t-1} \\ &= \frac{\theta_t c_t}{(1+r)} - \frac{1}{(1+r)} \left(1+r - \frac{1}{(1+r)^{T-t+1}} - r \right) c_{t-1} \\ &= \frac{\theta_t c_t}{(1+r)} - \frac{1}{(1+r)} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^{T-t+1}} \right) c_{t-1} \\ &= \frac{\theta_t \Delta c_t}{(1+r)} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\theta_t \Delta c_t}{(1+r)} &= \frac{r}{(1+r)} (a_{t-1} + y_{t-1}) + \frac{r}{(1+r)^2} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - \theta_{t-1} c_{t-1} \\ &= \frac{r}{(1+r)} (a_{t-1} + y_{t-1}) + \frac{r}{(1+r)^2} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - \frac{r W_{t-1}}{1+r} \\ &= \frac{r}{(1+r)} (a_{t-1} + y_{t-1}) + \frac{r}{(1+r)^2} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - \frac{r}{1+r} \left(E_{t-1} \sum_{s=0}^{T-t+1} \frac{y_{t+s-1}}{(1+r)^s} + a_{t-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_t \Delta c_t &= r y_{t-1} + \frac{r}{1+r} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - r E_{t-1} \sum_{s=0}^{T-t+1} \frac{y_{t+s-1}}{(1+r)^s} \\
&= \frac{r}{1+r} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - r E_{t-1} \sum_{s=1}^{T-t+1} \frac{y_{t+s-1}}{(1+r)^s} \\
&= \frac{r}{1+r} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - \frac{r}{1+r} E_{t-1} \sum_{s=1}^{T-t+1} \frac{y_{t+s-1}}{(1+r)^{s-1}} \\
&= \frac{r}{1+r} E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} - \frac{r}{1+r} E_{t-1} \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^{s-1}} \\
&= \frac{r}{1+r} \sum_{s=0}^{T-t} \frac{(E_t - E_{t-1}) y_{t+s}}{(1+r)^s}
\end{aligned}$$

最後の式は、生涯所得の割引現在価値が $t-1$ 期から t 期に変化した量である。
例えば、所得過程が下記で与えられているとする。

$$y_t = y_t^p + u_t$$

$$y_t^p = y_{t-1}^p + v_t$$

y_t^p は恒常的要素であり、 u_t は一時的要素、 v_t は恒常ショックである。また、 u_t 、 v_t はともに無相関であり、iid であり、なおかつ、すべての $s > 0$ に関して、

$$E_t u_{t+s} = E_t v_{t+s} = 0$$

が成立しているとする。したがって

$$\begin{aligned}
y_t &= y_{t-1} + u_t - u_{t-1} + v_t \\
y_{t+s} &= y_{t-1} + u_{t+s} - u_{t-1} + \sum_{\tau=t}^{t+s} v_\tau
\end{aligned}$$

ところで、

$$E_t y_{t+s} = y_{t-1} - u_{t-1} + v_t, \text{ if } s > 0$$

$$E_t y_{t+s} = y_{t-1} + u_t - u_{t-1} + v_t, \text{ if } s = 0$$

$$E_{t-1} y_{t+s} = y_{t-1} - u_{t-1}$$

したがって、

$$(E_t - E_{t-1}) y_{t+s} = u_t + v_t, \text{ if } s = 0$$

$$(E_t - E_{t-1})y_{t+s} = v_t, \text{ if } s > 0$$

したがって、

$$\begin{aligned} \theta_t \Delta c_t &= \frac{r}{1+r} \sum_{s=0}^{T-t} \frac{(E_t - E_{t-1})y_{t+s}}{(1+r)^s} \\ &= \frac{r}{1+r} (u_t + v_t) + \frac{rv_t}{1+r} \sum_{s=1}^{T-t} \frac{1}{(1+r)^s} \\ &= \frac{r}{1+r} u_t + \theta_t v_t \end{aligned}$$

$$\Delta c_t = v_t + \frac{r\theta_t^{-1}}{1+r} u_t$$

これは、一時ショックに対して、家計は $\frac{r\theta_t^{-1}}{1+r}$ で反応し、恒常ショックに対しては一対一で反応することを示している。

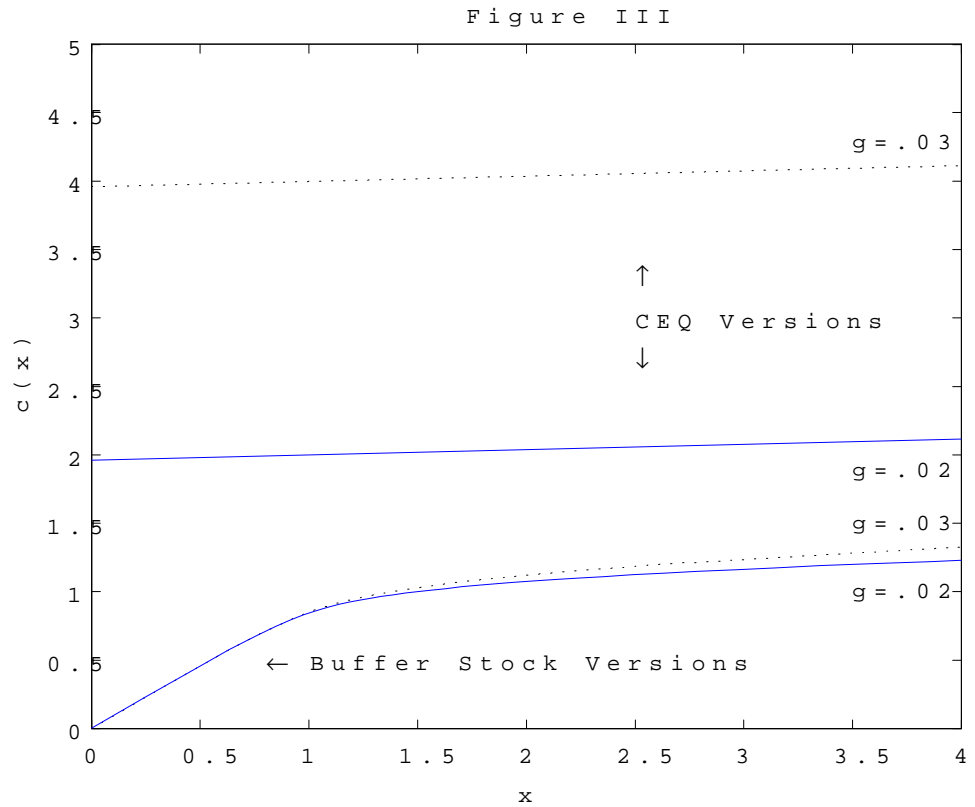
2 予備的貯蓄

効用関数が消費の二次関数のとき、消費は

$$\theta_t c_t = \frac{rW_t}{1+r}$$

で決定される。すなわち、消費は生涯所得の現在価値の平均値にのみ依存しており、その分散や高次の Moment には依存しない。すなわち、平均値が同じであれば、所得が大きく変動する家計も全く変動しない家計も、消費水準は同じである。無論、この性質は、効用関数が二次関数であるという仮定に全面的に依存している。

効用関数が二次関数でないとき、不確実性下の家計消費は資産の線形関数とはならなくなる。下記は Carroll (1997) の Figure III であり、不確実性下の CRRA 型効用関数を有する無限視野家計の消費と家計資産 (Cash on Hand) との関係を示している。縦軸が消費水準で横軸が Cash on Hand、 g は所得成長率であり、水平に近い直線が全く不確実性のないときである。不確実性がないとき、消費は Cash on Hand に依存しない。手持ち資産が低ければ、負債を発行し、多ければ貯蓄する。しかしながら、不確実性のあるとき、下記の Carroll の例だと流動性制約がなくとも、Natural Debt Limit により負債の発行ができず、消費は手持ち資金で頭打ちになり、かつ、平均所得成長率が上昇しても、消費はほとんど上昇しない。なぜなら、平均所得が上昇しても、その上昇は実現しておらず、不確実性が残るため、予備的貯蓄が発生し、消費を増加させないためである。



このように、予備的貯蓄が存在する場合の消費パターンは、確実性下の消費パターンと全く異なるものとなる。

2.1 二期間モデル

まず、極めて単純化された経済を仮定し、予備的貯蓄がどのように表れるかをみる。

0期と1期それぞれに所得を得、0期の所得は確実であり、1期の所得は確率変数であるような場合を考える。

単純化のため、 $\rho = r = 0$ としばらく仮定する。

$$Y_1 = \bar{y}_1 + \bar{Y}_1$$

$$\bar{y}_1 = E_0 Y_1$$

と書くことにする。すなわち、0期における1期所得の期待値が \bar{y}_1 である。したがって、 $E_0 \bar{Y}_1 = 0$ である。また、

$$w = y_0 + \bar{y}_1$$

金利がゼロのとき、 w は生涯所得の現在割引 (割り引いてないけど) 価値となる。予算制約から

$$c_1 = w - c_0 + \bar{Y}_1$$

貯蓄を

$$s = w - c_0$$

と定義すると、オイラー方程式は

$$U_c(c_0) = E_0 U_c(s + \bar{Y}_1) \quad (3)$$

上式では、 \bar{Y}_1 が確率変数となっている。

いま、単純化のために、 \bar{Y}_1 は二つの値、 $-\varepsilon, +\varepsilon$ をそれぞれ $1/2$ の確率でとる、と仮定する。ただし、 $0 < \varepsilon < \bar{y}_1$ である、すなわち、二期目の所得がマイナスになることはないと仮定する。なお、分散は

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \varepsilon^2$$

である。

オイラー方程式は

$$U_c(c_0) = \frac{1}{2}U_c(w - c_0 + \varepsilon) + \frac{1}{2}U_c(w - c_0 - \varepsilon)$$

全微分すると

$$U_{cc}(c_0) \frac{dc_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}U_{cc}(s + \varepsilon) \left[-\frac{dc_0}{d\varepsilon} + 1 \right] + \frac{1}{2}U_{cc}(s - \varepsilon) \left[-\frac{dc_0}{d\varepsilon} - 1 \right]$$

整理すると

$$2U_{cc}(c_0) \frac{dc_0}{d\varepsilon} = -\frac{dc_0}{d\varepsilon} [U_{cc}(s + \varepsilon) + U_{cc}(s - \varepsilon)] + [U_{cc}(s + \varepsilon) - U_{cc}(s - \varepsilon)]$$

$$\frac{dc_0}{d\varepsilon} = \frac{U_{cc}(s + \varepsilon) - U_{cc}(s - \varepsilon)}{2U_{cc}(c_0) + U_{cc}(s + \varepsilon) + U_{cc}(s - \varepsilon)}$$

ところで、 $U_{cc} < 0$ だから、上式の分母は負である。したがって、右辺の符号は

$$U_{cc}(s + \varepsilon) - U_{cc}(s - \varepsilon)$$

の符号の逆をとる。ところで、分子は U_{cc} が増加関数であれば、すなわち、 $U_{ccc} > 0$ のとき、常に正となる。

したがって、一期目の消費は、二期目の所得の不確実性が増加する時、 U_{cc} が増加関数である限り、減少する、すなわち、予備的貯蓄が増加するのである。

2.1.1 多期間モデル

下記のようなオイラー方程式を考える。

$$U_c(c_t, s^t) = \left(\frac{1+r}{1+\rho} \right) E_t U_c(c_{t+1}, s^{t+1})$$

選好ショックと消費が分離可能で、かつ、CRRAであれば

$$\left(\frac{1+r}{1+\rho} \right) E_t \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\sigma} \right] = 1$$

対数変換を行うと

$$E_t \left[\exp \left[\ln \left(\frac{1+r}{1+\rho} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\sigma} \right) \right] \right] = 1$$

$$E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1})) \exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho))] = 1$$

期待値オペレーターを移動して、

$$\exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho)) E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = 1$$

ここで、 $\ln(c_{t+1})$ が分散 σ_c^2 、期待値 $\mu = E_t \ln(c_{t+1})$ をとる正規分布に従うと仮定する。これは、所得のショックがすべて恒常的であり、かつ、所得の変分が対数正規分布に従うと仮定することに等しい。すると、

$$E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_c^2} \right]$$

ところで

$$\begin{aligned}
\exp(-\sigma x) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_c^2}\right] &= \exp\left[-\sigma x - \frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma_c^2}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2 + 2\sigma_c^2 \sigma x}{2\sigma_c^2}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{x^2 - 2x(\mu - \sigma_c^2 \sigma) + \mu^2}{2\sigma_c^2}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{x^2 - 2x(\mu - \sigma_c^2 \sigma) + (\mu - \sigma_c^2 \sigma)^2 - (\sigma_c^2 \sigma)^2 + 2\mu\sigma_c^2 \sigma}{2\sigma_c^2}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2 - (\sigma_c^2 \sigma)^2 + 2\mu\sigma_c^2 \sigma}{2\sigma_c^2}\right] \\
&= \exp\left[\frac{(\sigma_c^2 \sigma)^2 - 2\mu\sigma_c^2 \sigma}{2\sigma_c^2}\right] \exp\left[-\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2}{2\sigma_c^2}\right] \\
&= \exp\left[\frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \mu\sigma\right] \exp\left[-\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2}{2\sigma_c^2}\right]
\end{aligned}$$

積分すると

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \mu\sigma\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp\left[-\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2}{2\sigma_c^2}\right] dx \\
&= \exp\left[\frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \mu\sigma\right] \\
&= \exp\left[\frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t(\ln c_{t+1})\right]
\end{aligned}$$

したがって、

$$E_t[\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = \exp\left[\frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t(\ln c_{t+1})\right]$$

オイラー方程式は

$$\begin{aligned}
&\exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho)) E_t[\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = 1 \\
&\exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho)) \exp\left[\frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t(\ln c_{t+1})\right] = 1
\end{aligned}$$

対数をとると、

$$\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho) + \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t(\ln c_{t+1}) = 0$$

整理すると

$$\sigma \Delta \ln(c_{t+1}) = \ln(1+r) - \ln(1+\rho) + \sigma^2 \frac{\sigma_c^2}{2}$$

$$\Delta \ln(c_{t+1}) = \frac{1}{\sigma} [\ln(1+r) - \ln(1+\rho)] + \sigma \frac{\sigma_c^2}{2}$$

なお、不確実性が存在しない場合のオイラー方程式は

$$\left(\frac{1+r}{1+\rho}\right) \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\sigma}\right] = 1$$

だったから、期待値オペレーターを考えずに対数をとることが可能であり、

$$\Delta \ln(c_{t+1}) = \frac{1}{\sigma} [\ln(1+r) - \ln(1+\rho)]$$

したがって、不確実性が存在することにより、消費成長率は増加することになり、その増加分はリスク回避度に依存するのである。

なお、

$$\Delta \ln(c_{t+1}) = \frac{1}{\sigma} [\ln(1+r) - \ln(1+\rho)] + \sigma \frac{\sigma_c^2}{2} < g : \text{所得成長率の平均}$$

を満たす時、Policy Function は収束し、消費関数は一意に定まる。このためには、時間選好率が高いことが必要である。予備的貯蓄の分析では、時間選好率を高く設定し、

$$r < \rho$$

仮定することは珍しくない。Deaton (1991) に沿って、この意味を整理してみる。

$r = \rho$ のとき、かつ所得が iid のとき、消費は所得の平均値に収束する。このとき、資産は無限に増加する。この性質は流動性制約があろうがなかろうが変わらない。資産が無限に成長する結果、消費の変動はいずれ全くなくなる。しかしながら、このような消費関数は、実際のデータからはサポートされない。

$r > \rho$ のとき、家計は資産を無限に蓄積していく。そのうち、資産所得が所得に比べて極めて大きくなり、所得が消費に与える影響はほぼ皆無となる。無限視野の場合は、このようなことが生じてしまい、流動性制約も予備的貯蓄も意味のない状態となる。有限視野の場合は、若年期に貯蓄をすることになるが、金利が高い場合、若年期の貯蓄が急速に進み、やはり、予備的貯蓄や流動性制約が意味のないものとなるのである。

2.2 Recursive Formulation

所得の実現値が離散 $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$, $y_{i+1} > y_i, y_1 \geq 0$ であり、定常マルコフ過程にしたがうと仮定する。また、家計には負債の最大値があり、その水準を $a = -A$ とすると、負債が $-A$ であり、かつ最悪の所得が実現 y_1 , したとすると、そのとき、金利を支払った後の消費は

$$c = y_1 + A - \frac{A}{1+r}$$

消費がマイナスになってはならないという条件のもとでは

$$\bar{A} = \frac{1+r}{r} y_1$$

、すなわち、所得が常に最低値だったときの、生涯所得の現在価値額が負債の最大値となる。無論、効用関数が稲田条件を満たす限り、この条件がバインディングになることはない。

ベルマン方程式は

$$v_t(a, y) = \max_{-\bar{A} \leq a \leq (1+r)(a+y)} \left\{ U \left(y + a - \frac{a'}{1+r} \right) + \beta \sum_{y'} \pi(y'|y) v_{t+1}(a', y') \right\}$$

この一階条件は

$$\frac{1}{1+r} U' \left(y + a - \frac{a'}{1+r} \right) = \beta \sum_{y'} \pi(y'|y) v_{t+1,1}(a', y')$$

包絡線定理より

$$v_{t,1}(a, y) = U' \left(y + a - \frac{a'}{1+r} \right)$$

したがって、

$$U' \left(y + a - \frac{a'}{1+r} \right) = \beta(1+r) \sum_{y'} \pi(y'|y) U' \left(y' + a' - \frac{a''}{1+r} \right)$$

消費に関して整理すると、

$$U'(c_t) = \beta(1+r) \sum_{y'} \pi(y'|y) U'(c_{t+1})$$

となり、通常のオイラー方程式を得る。

もしも労働所得が iid であるとき、状態変数を一つに減らすことができる。

Cash on Hand を

$$x = a + y$$

で定義すると

$$c + \frac{a'}{1+r} = x$$

$$x' = a' + y'$$

したがって、ベルマン方程式は

$$v_t(x) = \max_{-\bar{A} \leq a \leq (1+r)x} \left\{ U \left(x - \frac{a'}{1+r} \right) + \beta \sum_{y'} \pi(y'|y) v_{t+1}(a' + y') \right\}$$

[1] Finite Time Horizon Value Function Iteration

$\{v_t(a, y)\}_{t=0}^T$ をみつける。任意の状態変数の値に関して、最終期では $v_{T+1}(a, y) = 0$ になるところからバックワードで解いていく。

[1] Finite Time Horizon Policy Function Iteration

$\{c_t(a, y), a'_t(a, y)\}_{t=0}^T$ を知りたい。T+1 期で死ぬことから、

$$c_T(a, y) = a + y$$

$$a'_T(a, y) = 0$$

である。t 期から t+1 期のオイラー方程式は

$$U' \left(y + a - \frac{a'_t(a, y)}{1+r} \right) = \beta(1+r) \sum_{y'} \pi(y'|y) U' \left(y' + a'_t(a, y) - \frac{a'_{t+1}(a, y)}{1+r} \right)$$

ところで、 $a'_{t+1}(a, y)$ の値を我々はすでに知っている。さらに、 y, a の値が所与のとき、定式は単なる $a'_t(a, y)$ に関する非線形一次方程式となる。

したがって、一変数に関する方程式の解法を適用することでオイラー方程式を解くことができる。

Deaton Trick 所得過程がランダムウォークなどの非定常過程であるとき、無限視野の問題を考えると、所得のベースは無限になり、動学モデルの解法は極めて困難になる。しかしながら、CRRA 型効用関数、かつ所得変化率が iid のときには、下記の trick を使うことができる。

$$z_{t+1} = \frac{y_{t+1}}{y_t}$$

が iid、すなわち

$$\ln y_{t+1} - \ln y_t$$

が iid であるとする。

$$\theta_t = \frac{c_t}{y_t}$$

$$w_t = \frac{x_t}{y_t} = \frac{a_t + y_t}{y_t}$$

と定義する。予算制約は

$$\begin{aligned}c_t + \frac{a_{t+1}}{1+r} &= y_t + a_t \\c_t + \frac{x_{t+1} - y_{t+1}}{1+r} &= x_t \\ \theta_t + \frac{w_{t+1} - 1}{1+r} &= w_t \\ w_{t+1} &= \frac{(1+r)(w_t - \theta_t)}{z_{t+1}} + 1\end{aligned}$$

CRRA のときのオイラー方程式は

$$c_t^{-\sigma} = \beta(1+r) \sum_{y'} \pi(y'|y) c_{t+1}^{-\sigma}$$

両辺を $y_t^{-\sigma}$ で割ると

$$\begin{aligned}\theta_t^{-\sigma} &= \max \left[w_t^{-\sigma}, \beta(1+r) \sum_{y'} \pi(y'|y) \left(\frac{c_{t+1}}{y_t} \right)^{-\sigma} \right] \\ \theta_t^{-\sigma} &= \max \left[w_t^{-\sigma}, \beta(1+r) \sum_{y'} \pi(y'|y) (\theta_{t+1} z_{t+1})^{-\sigma} \right]\end{aligned}$$

いま、我々が求めたいのは、定常な Policy Function であり、それは $\theta = \theta(w)$ という形をとる。したがって、

$$w' = \frac{(1+r)(w - \theta(w))}{z'} + 1$$

と書くと

$$\theta_t^{-\sigma} = \max \left[w_t^{-\sigma}, \beta(1+r) \sum_{z'} \pi(z') \left(\theta \left(\frac{(1+r)(w - \theta(w))}{z'} + 1 \right) z' \right)^{-\sigma} \right]$$

この不動点、すなわち

$$\theta(w)^{-\sigma} = \max \left[w^{-\sigma}, \beta(1+r) \sum_{z'} \pi(z') \left(\theta \left(\frac{(1+r)(w - \theta(w))}{z'} + 1 \right) z' \right)^{-\sigma} \right]$$

をみたく関数 $\theta(w)$ がもとめる Policy Function となる。

2.3 Buffer Stock Saving Model

Carroll (1996) による Buffer Stock Saving は、非常に扱いやすく、かつ Carroll 本人による Mathematica や Matlab Code が公開されており、予備的貯蓄分析の基本となっている。

モデルそのものは極めてシンプルである。

$$\max E_t \sum_{t=t}^T \beta^{i-t} u(C_i)$$

s.t.

$$W_{t+1} = R[W_t + Y_t - C_t]$$

$$Y_t = P_t V_t$$

$$P_t = G_t P_{t-1} N_t$$

ここで、Y が現在所得、P が恒常所得、V が一次所得、G は恒常所得の中の成長要因、N は恒常ショックのシフト要因である。金利は一定であると仮定されている。ここで

$$X_t = W_t + Y_t$$

をキャッシュ・オン・ハンド、と定義すると

$$X_{t+1} = R[X_t - C_t] + Y_{t+1}$$

となる。ここで、効用関数が CRRA であれば、Carroll Trick と呼ばれる下記の操作が可能である。

$$c_t = C_t/P_t$$

$$x_t = X_t/P_t$$

で定義すると

$$C_{t-1}^{-\rho} = E_{t-1} [C_t^{-\rho} R\beta]$$

$$\begin{aligned} 1 &= E_{t-1} [C_t^{-\rho} C_{t-1}^{\rho} R\beta] \\ &= R\beta E_{t-1} \left[\left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{-\rho} \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{\rho} \right] \\ &= R\beta E_{t-1} \left[\left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{-\rho} (G_t N_t)^{\rho} \right] \end{aligned}$$

また、予算制約は

$$\begin{aligned} x_t P_t / P_{t-1} &= R[x_{t-1} - c_{t-1}] + Y_t / P_{t-1} \\ &= R[x_{t-1} - c_{t-1}] + P_t V_t / P_{t-1} \\ x_t G_t N_t &= R[x_{t-1} - c_{t-1}] + G_t N_t V_t \\ x_t &= R[x_{t-1} - c_{t-1}] / G_t N_t + V_t \end{aligned}$$

と書くことができる。

消費の意思決定は、Cash on Hands と恒常ショックの二つを状態変数とするが、このような変換を行うことで、実質的に、状態変数を x の一つに減らすことができるのである。状態変数を減らすことのできるメリットは非常に大きく、Carroll の Buffer Stock モデルが多くの実証分析で使われる最大の理由となっている。もう一つの理由は、次回の講義で触れるが、流動性制約を用いる Deaton や Zeldes のモデルでは、流動性制約がバインドするとき、オイラー方程式が成立せず、微分不可能となるが、Carroll のモデルだと、オイラー方程式は常に満たされており、計算が楽になっているのである。

所得に関する確率変数として

$$\begin{aligned} V &= 0 \quad \text{with Probability } p=0.05 \\ &= Z \quad \text{with Probability } 1-p \end{aligned}$$

$$\ln Z \sim TN(\mu_z, \sigma_{\ln Z}^2) : \text{Nomral Truncated at } \pm 3\sigma_{\ln Z} + \mu_z$$

$$\ln N \sim TN(\mu_N, \sigma_{\ln N}^2) : \text{Nomral Truncated at } \pm 3\sigma_{\ln N} + \mu_N$$

$$E_t N_{t+1} = 1$$

と仮定する。所得がゼロになる確率が年に 5% と仮定されている。このため、Natural Debt Limit により、発行可能な負債はゼロとなる。実際に所得がゼロになることは、社会保障や様々な Transfer があるため考えにくいだが、そのような最低所得がある場合は、Natural Debt Limit が零ではなく、一定の負債発行が可能になると考え、そのぶんだけ原点からシフトさせれば後の形状は同一となる。

その他のパラメーターとして、Carroll(1997) は先行研究を用いたカリブレーションを行っているが、このモデルの定性的性質はかなり明らかになっており、決定的な仮定は $r < \rho$ 、すなわち、時間選好率が十分に高いことであることが知られている。

下記の図は、Carroll が公開しているコードをそのまま実行したものであり、Carroll (1997) の Figure 1 を再現している。縦軸は平均消費成長率、横軸は Cash on Hand である。

Figure 1a では、 x^* は Target Level であり、

$$E_t x_{t+1} = x_t$$

を満たす水準として定義される。Cash on Hand が x^* よりも多ければ資産を減らし、それよりも小さければ資産の蓄積を行う。すなわち、 x^* よりも左側では消費は低下し、右側では消費は増加する。このモデルが Buffer Stock Model と呼ばれるのは、消費の増減、すなわち貯蓄率は現在の Cash on Hand が Target Level からどれだけ離れているかにより決まっており、その Target

Level の資産こそ、不確実性に対処するための Buffer だからである。貯蓄が行われるのは不確実性に対処するためであり、十分な蓄積が進めば、所得の実現値が低くても消費は増加する。貯蓄率という概念は意味のないものとなっている。なお、通常のエイラー方程式に従うと、消費変化率は一定であり、 $\rho^{-1}(r - \delta)$ となることに注意せよ。

Figure 1b は、平均所得成長率を低めた ($g_1 \rightarrow g'_2, g_1 > g'_2$) ときの図である。分散に関しては同じパラメーターを仮定しているため、この家計は、不確実性に関しては同じだが、平均所得が低下する厳しい状況に置かれたことになる。このとき、Target Level は増加する。これは、不確実性に対処するためには、より少ない平均所得のため、Buffer の水準を高めねばならないためである。

