

2017年度上級マクロ経済学講義ノート： 代表的個人の仮定と不確実性下における完備市場

阿部修人
一橋大学

平成 29 年 6 月 15 日

1 マクロ経済学と代表的個人

マクロ経済学では、家計消費行動を描写するため「代表的個人」の仮定をおくのが伝統となっている。また、世代重複モデルのような「異質な」個人を導入しても、Barro によるモデルにより、代表的個人と同様の扱いを正当化することが可能である。代表的個人をもとに描写される、中央集権的経済における資源配分と、多様な個人の存在する一般均衡による配分は当然ながら一般には一致しないが、我々は厚生経済学の第二基本定理を利用することができる。第二基本定理の下では、政府が最大化する社会厚生関数が多様な各個人の効用関数の加重和で定義されていれば、各個人に適当なパレートウェイトを与えることで、市場経済の均衡としてサポートされる。しかしながら、中央政府による計画経済の配分が市場均衡としてサポートされ得る、と言うことと、世の中に一人しかいない、あるいは一人の意思決定が全員の意思決定と同一となる、という仮定の間には非常に大きな距離があるように見える。代表的個人で描写可能な経済問題には限界があり、格差の問題や合成の誤謬のような問題を代表的個人の問題として定式化することにはかなりの無理がある。実際、近年のマクロ経済理論のフロンティアでは代表的個人の仮定を廃し、異質な家計を取り込むようになってきている。しかしながら、21 世紀に入った今でもなお、多くのマクロ経済分析では代表的個人の仮定をおいている。ケインジアン的な DSGE モデルも RBC モデルも、ほとんどの場合は代表的個人という仮定に依拠している。

マクロ経済学におけるこの伝統に対しては、二種類の考え方がある。第一は、代表的個人モデルに対して極めて批判的なものであり、一般に Debreu-Sonnenschein-Mantel の定理と呼ばれるものをその根拠とする（そういう立場をとる人はマクロ経済学に対し極めて批判的になる）。第二は、効用関数の

形状と市場の機能にある種の仮定をおけば、代表的個人の仮定はそれほど制約的ではなく、現実経済の近似として十分機能すると考える。

本講義ノートで取り扱う内容は、厳密にはミクロ経済学で扱われる範疇にあり、厳密な展開は行わない。しかしながら、ここで紹介する二つの定理はマクロ経済学において極めて重要なインプリケーションを有し、無視することはできない。厳密な証明は Mas-Colrell 達による教科書を参照してもらうことにし、定理の説明とそのマクロ経済学における含意を中心に議論する。

2 Debreu-Sonnenschein-Mantel の定理

本節では、異時点間の問題をしばらく忘れ、複数の財が存在する静学経済を考えてみる。無論、複数財を今期と来期の消費と考えれば異時点間の問題として考えることが可能である。ミクロ経済学の初歩で、ある財への需要関数を考えた時、需要が価格に関して右下がりか、右上がりかでギッフェン財、あるいは所得との関係で上級財や下級財等が定義されていた。こうした価格や所得と財の需要の関係、すなわち需要関数およびそのシステムを推計する際には、家計単位で計測するのは非現実的であり、市場全体の需要関数、すなわち市場需要関数の推計が行われることが多い。実際、企業や店舗にとり重要なのは各個人の需要水準ではなく市場全体の需要の動向であり、マーケット全体の動向が少数のパラメータで記述可能であれば、それは極めて便利である。また、政府にとり、個別消費税の最適税率は各財に対する価格弾力性や余暇との補完性に依存しており（ラムゼイ課税）、税の帰着を考える上でも財の需要システムを把握することは重要なことである。家計単位のマイクロデータではなく、市場全体の、あるいはあるグループに関する需要、所得および価格データしか存在しない時、我々は、個々の個人の選好パラメータを推計することは可能なのであろうか？また背後の選好パラメータを推計可能であると考え、各家計はどのような効用関数を有していると仮定すればよいだろうか？これに対する回答はすでに知られており、ゴーマン型と呼ばれる効用関数のクラスに限定されることが知られている。これは講義ノートの最後で簡単に触れる

集計の第二の問題は、集計量と経済理論の関係である。家計単位、あるいは個人単位の需要関数に関しては、選好の凸性や連続性、推移性等を仮定することにより、スルツキー行列が導かれる。また、交差代替効果の対称性や顕示選好の弱公準、需要関数の価格と所得に関する一次同次性等、需要関数には非常に多くの特徴が生じることも、ミクロ経済学の教科書で説明されている。では、そのような特徴は、異なる家計の集計である市場需要関数に適用可能であらうか？すなわち、データが生成される過程において、各主体が最適化を行うような、ミクロ的基礎を有する、ということは、マクロの集計量に対してどのような制約を与えるのだろうか？残念ながら、下記の、(マクロ

経済学にとり) 不愉快な定理が存在する。

l 次元の価格 simplex ($l-1$ 次の多様体、四次元の simplex であれば四面体、三次元なら三角形を考えよ)、 Δ 、から、 R^l への写像で、かつワルラス法則をみたす任意の関数を考える。ワルラス法則をみたす、ということは、次元を一つ落とすことに等しいため、ここでの関数は

$$\Delta \rightarrow R^{l-1}$$

の写像と考えることできる。

いま、 Δ の内点の集合、すなわち Δ の境界を除いたものの集合を Δ_ε と定義する (より正確には、境界から ε だけ離れている集合) と、下記の定理を導くことが可能である¹。

定理 1 (Debreu – Sonnenschein – Mantel) $f(p)$ を、 $\Delta \rightarrow R^{l-1}$ であるような連続関数であり、 $p \cdot f(p) = 0$ をみたすとする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に関し、 l 財の消費者交換経済で、超過需要関数が $f(p)$ であるようなものが Δ_ε で存在する。

なお、個人 i の n 財への需要関数を $x_i^n(p)$ 、初期賦存量を ω_i^n とすると、超過需要関数は

$$f_n(p) = \sum_i (x_i^n(p) - \omega_i^n),$$
$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n, \dots).$$

である。市場均衡では

$$\sum_i p_n (x_i^n(p) - \omega_i^n) = 0$$

であるから、

$$p \cdot f = 0$$

でなければならない。

上記の定理は、ワルラス法則をみたす「任意」の連続関数は、適当な (しかし、強凸性、単調性、ホモセティックである) 選好関係をもつ家計から構成される市場均衡となりうることを意味する。どのような連続関数を考えても、それは市場均衡となりうる、ということは、市場需要関数の形状に関しては、選好関係に通常の新古典派的な仮定よりも強い仮定を置かない限り、連続性以外のことは課すことができないことを意味する。

¹市場均衡は異なる個人行動の集計で定義される。集計された市場需要は、個人の需要関数とは全く異なる性質をもちうる。個人需要の連続性は選好の凸性から生じるが、集計することにより非凸選好からでも連続性を有する総需要関数が生じる。詳細は Hildenbrand による一連の研究を参照せよ。

この定理はマクロ経済学にとりどのような意味があるだろうか?この定理は、市場全体を考える場合、背後の選好関係に強い仮定を設けることが必要であること、そして、その仮定が極めて重要な役割を果たすことを意味する。マクロ経済学でよく使用される CRRA 型で、一定の時間選好率を有する効用関数を考えてとしても、その時間選好率が家計により異なったり、リスク回避度が異なる場合、市場均衡は通常とは全く違ったものになることが知られている。そして、選好関係に関してロバストな性質を探することは、ある程度を超えては不可能であることを上記の定理が伝えている。マクロ経済学者の多くが効用関数の選好パラメーターに対し強い関心を示し、無数の研究があること背景には、そうした仮定がマクロ経済学にとり極めて重要なものであることがある。

しかしながら、人々の選好関係に合理性以外の「いかなる」仮定も課さない場合、およそ意味のある経済分析、特に実証的な分析は不可能であろう。果たして、どの程度の一般性および制約が現実経済を描写する上で許容されるか、を追及することが、現在のマクロ経済学における主要課題の一つとなっている。

3 不確実性下の完備資本市場モデル

家計の選好が全て同一であったとしても、家計の所得や資産は家計間で明らかに異なっている。高額所得者もいれば低所得者もいるし、親から莫大な資産を継いだ者もいれば、一代で資産を蓄積をしているものもいる。また、家計の所得や資産は変動しており、十年後の所得がいくらであるかを正確に予測することは、現在の世の中では公務員でも不可能であろう。しかしながら、自由に貸し借りができる経済においては、家計間で所得が異なっても、選好が同一である限り、消費の動きは同一となり、代表的個人モデルで描写することが可能となる。これは、次の講義でカバーする予定の Real Business Cycle 理論の背景にあるものであり、不確実性下の異質な家計で構成される経済を、一つの代表的家計で扱うことを正当化する。

3.1 モデルの設定

$N\{i \in I = \{1, 2, 3, \dots, N\}\}$ 家計で構成される経済を考える。各家計は $T(\infty)$ も許容) 期間存続する。各家計は保存不可能な一種類の消費財を各期に受け取る (例えばリンゴ)。各家計がうけとる消費財の量には不確実性が存在し、その流れは $\{y_t^i\}$ で与えられるとする。 $y^{i,t} = (y_0^i, y_1^i, y_2^i, y_3^i, \dots, y_t^i)$ を、家計 i が $t+1$ 期間にわたりうけとる消費財 (例えば、各期のリンゴの収穫量) の流れとする。また、リンゴの収穫量に限らず、この経済には非常に多くの不確実性が存在すると仮定しよう。この経済に存在する、ありとあらゆるすべて

の確率変数の t 期における実現値を s_t とする。例えば、天候や、ある主体がひきあてたクジの値、その日のある人の体調、事故にあうか否か、など、ありとあらゆるものの実現値を考える。そして、その実現値の歴史的な推移、 $s^t = (s_0, s_1, \dots, s_t)$ をこの経済全体の history、すなわち経済全体に存在する全ての確率変数の実現値の記録 (厳密な定義は Mas-Colell 等を参照せよ) であるとする。

$\pi_t(y^{i,t})$ を $y^{i,t}$ が生じると家計が考える主観的確率、 $\pi_t(s^t)$ を s^t が生じる確率であるとする。ここで、合理的期待を仮定し、各主体の主観的確率は経済全体の history の確率と整合的であるとする。また、単純化のため $y_t^i \in Y$ は離散の値をとり、集合 Y の濃度 (要素の数) は有限で M であるとする。また、同様に、 $s_t \in S$ であり、集合 S の濃度は有限で K であるとする。なお、通常、 K は人類が直面してきたありとあらゆる確率変数の実現値の記録であるため、非常に大きな数値になるだろう。

$S^t = S \times S \times S \times \dots \times S$, $Y^t = Y \times Y \times Y \times \dots \times Y$ をそれぞれ $t+1$ の直積 (0 期を含むので、 t 期までには $t+1$ 期間が経過している)、すなわち、集合が並んでいるものとする。このとき、 $s^t \in S^t, y^{i,t} \in Y^t$ となる。

我々が興味があるのは、経済の history (現在も含む) からどのように消費が決定されるか、であり、そのような、 s^t から消費空間への写像として実現される消費財の配分を $\left\{ (c_t^i(s^t))_{i \in I} \right\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ と書くことにする。ここで、 $c_t^i(s^t)$ と書いているが、これは、経済の歴史により消費量が異なり得ることを意味する。例えば家計に取り、晴れの日と雨の日の遊園地の価値は異なるものであるし、雨が 30 日続いた後の晴れの日とずっと晴天続きの時の遊園地では異なるものであろう。経済の状態に依存して異なる商品になるもの、すなわち条件付き財になっているのである。上記の消費財の配分は、過去から遠い将来までのすべての確率変数の実現値の歴史に依存して各消費財が定義されており、非常に巨大なベクトルとなっている。

消費決定の描写には効用関数が必要である。この経済には不確実性があるため、家計は期待効用を最大化させると仮定する。具体的には、各家計は下記のような期待効用関数を持つと仮定しよう。

$$u^i(c^i) = \sum_{t \in T, s^t \in S^t} \pi_t(s^t) U_t^i(c^i, s^t)$$

単純化のため、各家計の効用関数は同一であり、各期に関して加法に分離可能であり、一定値をとる主観的割引因子 $\beta \in (0, 1)$ をもつとする。すなわち、

$$u^i(c^i) = \sum_{t=0}^T \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi_t(s^t) U^i(c_t^i(s^t), s^t) \quad (1)$$

定義 2 下記の条件をみたすとき、消費 $\left\{ (c_t^i(s^t))_{i \in I} \right\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ は実現可能であるという。

$$c_t^i(s^t) \geq 0 \text{ for all } i, t, \text{ and } s^t \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N c_t^i(s^t) = \sum_{i=1}^N y_t^i(s^t) \text{ for all } t, s^t. \quad (3)$$

ここで、 $y_t^i(s^t)$ と書いているが、これは t 期において家計が受け取る消費財の量は経済の歴史に依存しており、さらに、消費配分がパレート効率的であるのは、消費配分が実現可能であり、かつ、下記の条件をみたす他の実現可能な消費配分 $\left\{ (\tilde{c}_t^i(s^t))_{i \in I} \right\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ がないときである。

$$u^i(\tilde{c}^i) \geq u^i(c^i) \text{ for all } i \in I$$

$$u^i(\tilde{c}^i) > u^i(c^i) \text{ for some } i \in I$$

資本市場が完備な場合、すなわち、全ての条件付き財を取引する市場が存在する時、ゼロ期において、家計は、ありとあらゆる不確実性、すなわち、 s^t の実現値に依存した条件付き消費財を、 s^t が実現する前に取引することができる。 $p_t(s^t)$ をゼロ期に発行される、 s^t が実現した時に一財の消費を行うときの価格であるとする。すると、各家計の Arrow Debrue 型の予算制約式は

$$\sum_{t=0}^T \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^T \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) y_t^i(s^t) \quad (4)$$

定義 3 Arrow Debrue 均衡

Arrow Debrue 均衡とは、消費財と価格の集合、すなわち、 $\left\{ (c_t^i(s^t))_{i \in I} \right\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ および $\{p_t(s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ であり、下記の条件をみたすものをいう。

(1) $\{p_t(s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ を所与としたとき、各家計 i は、(1) を (4) と (2) の下で最大化している。

(2) $\left\{ (c_t^i(s^t))_{i \in I} \right\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ は、すべての t, s^t に関して、(3) を満たしている。

簡単化のため、常に正の消費が行われるように、下記の仮定をおく。

仮定 4 瞬時効用関数 U^i は二回連続微分可能かつ、第一要素に関して強く増加関数、かつ強く凹であり、かつ、下記の稲田条件を満たす。

$$\lim_{c \rightarrow 0} U_c^i(c, s^t) = \infty$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} U_c^i(c, s^t) = 0$$

効用関数の凹性より、厚生経済学の第二基本定理を適用可能であり、任意の競争均衡は、適当な Pareto Weight $(\alpha_i)_{i=1}^N$ を用い、下記の社会厚生関数最大化問題の解として記述することができる。

$$\text{Max}_A \sum_{i=1}^N \alpha_i u^i(c^i)$$

s.t. (2) and (3)

$$A : \left\{ (c_t^i(s^t))_{i \in I} \right\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$$

稲田条件を課しているので、(2) を無視し、(3) に対し、ラグランジュ乗数 $\lambda(s^t)$ をつけると、

$$L = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{t=0}^T \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi_t(s^t) U^i(c_t^i(s^t), s^t) + \lambda(s^t) \left(\sum_{i=1}^N y_t^i(s^t) - \sum_{i=1}^N c_t^i(s^t) \right)$$

一階条件は

$$\alpha_i \beta^t \pi_t(s^t) U_c^i(c_t^i(s^t), s^t) = \lambda(s^t) \text{ for all } i \in I$$

異なる家計間の限界代替率を計算すると

$$\frac{U_c^i(c_t^i(s^t), s^t)}{U_c^j(c_t^j(s^t), s^t)} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \text{ for all } t \text{ and } s^t \quad (5)$$

したがって、異なる家計間の消費の異時点間代替率は、経済の状態や時間によらず一定となる。

定義 5 異なる家計間の消費の限界代替率が時間や経済の状態によらず一定であるとき、そのような消費配分 $\left\{ (c_t^i(s^t))_{i \in I} \right\}_{t=0, s^t \in S^t}^T$ は完全な消費保険を満たすという。

すなわち、完備市場モデルは、完全な消費保険が成立している。さらに、効用関数が下記の性質をみたすとする。

仮定 6 (分離可能性) すべての家計が *CRRA* 型の効用関数を有し、選好ショックが存在しない、またはショックが消費と加法に分離可能、すなわち

$$U^i(c_t^i(s^t), s^t) = \frac{c_t^i(s^t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + v(s^t)$$

であるとする ($\sigma \geq 0$)

この仮定のもとでは、

$$U_c^i(c_t^i(s^t), s^t) = c_t^i(s^t)^{-\sigma}$$

したがって、

$$\frac{c_t^i(s^t)}{c_t^j(s^t)} = \left(\frac{\alpha^i}{\alpha^j}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \quad (6)$$

すなわち、異なる家計間の消費の割合は、経済の状態や時間によらず一定となる。このことからただちに、

$$c_t^i(s^t) = \theta^i c_t(s^t) \quad (7)$$

$$\text{ただし、 } c_t(s^t) = \sum_{i=1}^N c_t^i(s^t)$$

すなわち、各家計消費支出は、マクロの消費に比例し、その比例定数は時間や history の実現値に依存しないことがわかる。

CRRA 型の効用関数を使用する限り、所得の実現値に家計間で差があっても、全ての家計の消費の変化割合は同じ値となる。この経済学的理由は簡単である。この経済には資本市場が完備であるため、ありとあらゆる不確実性の実現値に対応した条件付き財が事前に取引されている。したがって、家計は、所得の受取額を一定にするような保険に加入することが可能となっている。消費の変動は、資本市場でヘッジできないマクロ的なショックのみが残り、各家計間で独立したショックに関しては全て保険市場がカバーしてしまい、家計にとり、事実上、マクロショック以外の不確実性は存在しなくなっているのである。

3.2 Sequential Equilibrium

初期時点ですべての条件付き財が取引されるという前節の仮定は非現実的である。そこで、初期時点に全ての期の条件付き財が取引されるのではなく、各期には、一期先の消費財に関する条件付き財のみが取引されるとする。

$q_t(s^t, s_{t+1} = \eta^j)$ は、 t 期に交わされる契約であり、 $t+1$ 期の Event の実現値が η^j であるとき、一単位の消費財を $t+1$ 期にうけとる Claim の価格

であるとする。これは Arrow 債権と呼ばれるものである。t 期に購入された Arrow 債権の量を $a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1})$ とすると。予算制約は

$$c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} q_t(s^t, s_{t+1}) a_{t+1}^i(s^t, s_{t+1}) \leq y_t^i(s^t) + a_t^i(s^t)$$

となる。各個人は、t+1 期に生じるあらゆる Event の実現に対応する Arrow 債券を購入することが可能であるが、t+1 期になると、そのなかの、実現した Event に対応したもののみが消費財と交換されることになる。

適切な No Ponzi Game Condition(Natural Debt Limit) の下で、Arrow Debreu の完全保険均衡は Sequential Equilibrium の均衡でもあることが知られている。証明は Mas-Colell 達による教科書を参照されたい。Arrow 債権をめぐる証明は煩雑であるが、一般均衡理論の一つの到達点であり、また、現代のマクロ経済学にとっては出発点でもある。

4 完備市場下のマクロモデル

これまでの議論では生産活動が含まれていなかったが、上記のモデルに企業部門を導入し、要素市場と財市場を含む一般均衡を定式化することが可能である。とはいえ、厳密に展開すると、数回分の講義が必要となるため、興味のある者は L-S の Chap 12 を参照してほしい。

本講義の中心的な命題は (5) であり、将来のあらゆる状態に対応する財の市場が存在すれば、全ての家計の異時点間の限界代替率は一致し、CRRA の場合は、全ての家計の消費水準は平均的な消費水準、あるいはマクロの消費水準とに比例する。この性質は生産活動が含まれても変化はない。したがって、家計に関しては、代表的個人を仮定しようが、異なる個人を仮定しようが、その効用関数の形状が同一であり、市場が完備であれば、出てくる市場均衡に違いはなくなってしまう。Barro の等価定理と合わせると、この経済に異なる世代が存在し、所得水準が家計間で異なっているとしても、この経済の市場均衡は無限に生きる代表的個人の効用関数最大化により描写可能となる。この結果は、次の講義内容となる実物景気循環理論 (RBC) の前提となっている。

5 おまけ

市場需要関数になんらかの意味を与えるためには、個人の選好に対して強い仮定をおかねばならない。実証分析においてよく使用される代表的な効用関数が、Gorman 型である。

Gorman 型効用関数は、下記のような間接効用関数として定義される。

$$v(p, y_i) = a_i(p) + b(p) y_i.$$

ここで重要なのは、 $a_i(p)$ は家計により異なりうるが、 $b(p)$ は各家計で共通である、ということである。

ロワの恒等式より、消費者 i の j 財への需要関数は、間接効用の偏微分で計算可能であり、

$$\begin{aligned} x_i^j(p, y_i) &= \frac{-\frac{\partial v(p, y_i)}{\partial p_j}}{\frac{\partial v(p, y_i)}{\partial y_i}} \\ &= \frac{-\frac{\partial a_i(p)}{\partial p_j} - \frac{\partial b(p)}{\partial p_j} y_i}{b(p)} y_i \end{aligned}$$

$$A_i^j(p) = \left[\frac{\partial a_i(p)}{\partial p_j} \right] / b(p)$$

$$B_i^j(p) = \left[\frac{\partial b(p)}{\partial p_j} \right] / b(p)$$

とおくと

$$x_i^j(p, y_i) = -A_i^j(p) - B_i^j(p) y_i$$

すなわち、財への所得弾力性は、財の間では異なるが、家計間では同一となる。したがって、総需要関数は

$$\sum_{i=1}^N x_i^j(p, y_i) = -\sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial a_i(p)}{\partial p_j} \right] / b(p) - \left[\frac{\partial b(p)}{\partial p_j} \right] / b(p) \sum_{i=1}^N y_i$$

この総需要関数は、下記のような、間接効用をもつ代表的な個人の効用最大化問題の解としても導出可能である。

$$V(p, Y) = \sum_{i=1}^N a_i(p) + b(p) Y, \quad Y = \sum_{i=1}^N y_i$$

また、逆に、Gorman 型効用関数は代表的消費者モデルで総需要を描写することのできる最も一般的な間接効用関数であることも知られている。