2021年度応用マクロ経済学

(2)　Almost Ideal Demand System の解説*

阿部修人†
一橋大学経済研究所

2021年6月

1　導入

前回の講義ノートでは、静学モデルにおける需要関数として、下記を導出した。

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln\left(\frac{y}{P}\right) + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^*_{ki} \ln p_k + e_i.$$

この式では、補償需要の代替効果を推計可能であるため、パラメターの経済学的解釈が容易であり、かつ推計もたやすい。しかしながら、上式の推計する際には、いくつもの大きな問題に直ちに直面する。。

家計レベルの消費データでは、通常は数量の情報は存在しない。ミカンに対していくら支出したかの情報があっても、そこにいくつのミカンが含まれて以下は通常、わからない。また、たとえわかっても、どのくらいの大きさのミカンなのかも多くの場合不明である。これは家計調査に基づいて Weight が作成される物価指数においても同様であり、数量情報を得るには、支出総額をなんらかの価格で割り、実質化することで数量情報とみなす必要がある。効用関数や物価指数に対してある種の仮定をおくと、デフレートにより得られた「実質」消費を数量指数とみなすことが可能になるが、そのような変換をせずに済む式のほうが推計上では有利である。物価指数計測においては、通常は数量ではなく支出シェアを用いる公式が用いられている。需要関数においても、一般に利用不可能な数量ではなく、支出シェアに関する関数として表記可能であれば便利であろう。支出シェアを用いる第二の利点は、家計や企業レベルデータで一般に観察される、規模による異質性の影響を緩和できることにある。年収 5000 万円の家計と 500 万円の家計をサンプルに含む

*本講義ノートの作成に際しては原千秋氏から多くの貴重なコメントを頂いた。
†nabe@ier.hit-u.ac.jp

と、家計の規模により需要量の違いがほとんど説明できてしまうが、シェアにすると、そうした一次の規模効果は消えることになる。

より根源的な問題は、上記の式は、価格弾力性と所得弾力性が一定であると仮定していることにある。これは非常に強い仮定であり、往々にして棄却されてしまう。たとえば、ミカンやリンゴの所得弾力性が 1 であると仮定しよう。この場合、年収 500 万の家計と比較して、年収 2000 万の家計のみかん消費量は 4 倍、年収 1 億の家計の場合は 20 倍になるが、これは非現実的であろう。次に、経済理論に従うと、所得と価格に関して需要はゼロ次同次でなければならず、パラメータ間で制約が必要になる。また、対数を用いることで、数量や価格、所得がゼロになることを排除している点が挙げられる。これは、対数を用いるモデルは、非常に細かい商品レベルの高頻度データの描写には適さないことを意味している。

価格弾力性や所得弾力性が一定でない場合、上記の推計式より柔軟な需要関数を考える必要があるが、需要が効用最大化行動から導かれていると考える場合、仮定している需要関数が効用最適化と整合的である必要があり、勝手な関数形を仮定すると、経済理論に反したものなる危険性がある。上記の式に様々な変数を追加していく際、各変数およびその係数の背後にどのような効用関数を想定しているのか、最適化行動の諸条件と整合的であるかを常に意識する必要があるのである。ミクロ理論との整合性を確保する一つの確実な手法は、効用関数を単純なコブ・ダグラス型や CES から開始し、それらを徐々に一般化していき、そこから需要関数を導出することであろう。効用関数による定式化が複雑であれば、双対性を用い、支出 (費用) 関数を用いて需要関数を導出することも可能であろう。取り扱い可能な限界まで一般化された支出関数を用い、そこから導かれる需要関数の推計を行うことは確かに可能である。しかしながら、支出関数や効用関数が Closed form で描写できるとは限らないし、たとえ可能であっても、そこから Closed form で需要関数を解き切ることができるとは限らない。解析的に需要関数を導き出す作業は、少しでも支出関数を一般化させようとすると、すぐに前に進めなくなる。

ミクロの家計理論と整合的な形で、より「柔軟」かつ“Tractable”な需要関数として、これまで多くの提案がなされてきたが、今日最も広く用いられているのは、Deaton and Muellbauer (1980) による Almost Ideal Demand System (AIDS) およびその拡張である Quadratic Almost Ideal Demand System (QUAIDS) である[1]。これは、特定の支出関数を仮定するのではなく、「任意」の支出関数に対する需要関数を考えるものである。観察不可能な真の支出関数は、凹性や一次同次性のような理論的要請の他に、二回連続微分可能であるという制約はつくものの、原則、どのような形状であっても構わない。その真の支出関数を、ある点において二階の近似を与える関数で近似し、それに対応する需要関数を考えるのである。近似する関数は、十分に沢山のパラメター

[1] Deaton, A.S. and J.Muellbauer, (1980),“An Almost Ideal Demand System,” *American Economic Review*, Vol.70, 312-326.

を有する、柔軟 (Flexible) である必要がある。どんな支出関数 (二階連続微分可能に限定されるが) にも対応する需要関数が Almost Ideal Demand System なのである。無論、AIDS がよい近似になるのはあくまで局所的なものであり、大域的 (Global) な近似にはならないことには留意する必要がる。しかし、二階の近似というのは経済学的には強い意味がある。支出関数の一階微分は補償需要関数であり、その微分は補償需要の傾きになる。すなわち、AIDS の需要関数は、需要関数の水準と傾きの二点において、(連続微分可能であれば) どんな支出関数にも対応する一般的なものとなっているのである。AIDS の局所性という限界の一部については、Banks et al. (2009) により拡張され、所得の二次項が含まれる QUAIDS が提案されている[2]。便利な STATA code が提供されていることもあり、QUAIDS は、今日ではオリジナルの AIDS よりも活用される機会が増えている。本講義ノートでは、ミクロ経済理論の基本を振り返りながら、AIDS および QUAIDS について解説する。

2 ミクロ経済理論の復習

下記の効用最大化問題を考える。

$$\max_{q} u(q)$$

$$s.t. \sum p_i q_i \leq y$$

単純化のため、ここでは常に内点解があることにしよう。この仮定により、シェファード・マッケンジーの補題など、双対性に伴う様々な性質が使えることになる。POS データのように、取引のない、すなわち数量がゼロになるような観察値を含むデータには使うことができなくなるが、商品単位ではなく、カテゴリー単位の支出データであればそれほど強い制約にはならないだろう。ミクロ経済理論に基づく方程式をカテゴリー単位で扱うことに抵抗を感じるかもしれないが、前回の講義ノートで議論したように、効用関数が弱分離可能でカテゴリー単位で効用がまとまっており、かつそのカテゴリー単位の効用関数がホモセティックである場合は、カテゴリー単位の数量指数を効用関数とみなすことが可能になり、カテゴリー単位での支出金額と価格指数からカテゴリー需要を導くことが可能になる。さて、効用最大化問題をラグランジュ関数を用いて描写すると、

$$\max_{q,\lambda} L(q,\lambda) = u(q) + \lambda\left(y - \sum p_i q_i\right)$$

[2] Banks, J., Blundell, R. W. and Lewbel, A.(1997) "Quadratic Engel Curves and Consumer Demand," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 79, pp.527–539.

一階条件は

$$\frac{\partial u(q)}{\partial q_i} = p_i \lambda,$$
$$y = \sum p_i q_i$$

求められた需要関数を $q_i(p, y)$ とすると、

$$\sum p_i q_i(p, y) = y.$$

上式は p, y に関する恒等式であり、p_j と y で微分すると、次の方程式が常に成立する。

$$q_j(p, y) + \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial p_j} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\partial q_i(p, y)}{\partial y} = 1.$$

双対問題を考えると、支出 (費用) 関数は

$$E(u, p) = \min_q \sum p_i q_i$$
$$s.t. u(q) \geq u$$

ラグランジュ関数を考えると、

$$\min_{q,\omega} L = \sum p_i q_i - \omega(u(q) - u)$$

一階条件は

$$p_j = \omega \frac{\partial u(q)}{\partial q_j},$$
$$u(q) = u$$

この階は補償需要であり、

$$q_i = h_i(u, p)$$

定義より、

$$E(u, p) = \sum p_i h_i(u, p)$$

p_j で微分すると、

$$\frac{\partial E(u, p)}{\partial p_j} = h_j(u, p) + \sum_i p_i \frac{\partial h_i(u, p)}{\partial p_j}$$

ところで、定義より、

$$u(h(u, p)) = u$$

これは u, p に関する恒等式だから、価格に関して微分しても等式が成立せねばならない。

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u\left(q\right)}{\partial q_i} \frac{\partial h_i\left(u, p\right)}{\partial p_j} = 0$$

支出最小化の一階条件より、

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\omega} \frac{\partial h_i\left(u, p\right)}{\partial p_j} = 0$$

したがって、

$$\sum p_i \frac{\partial h_i\left(u, p\right)}{\partial p_j} = 0$$

これは、シェファード・マッケンジーの補題、すなわち、

$$\frac{\partial E\left(u, p\right)}{\partial p_j} = h_j\left(u, p\right)$$

を意味する。

次に、間接効用を

$$V\left(p, y\right) = u\left(q\left(p, y\right)\right)$$

と定義すると、所得で微分することで、下記を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V\left(p, y\right)}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u\left(q\right)}{\partial q_i} \frac{\partial q_i\left(p, y\right)}{\partial y} \\
&= \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda \frac{\partial q_i\left(p, y\right)}{\partial y} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

この結果のため、効用最大化問題のラグランジュ乗数は所得の限界効用とも呼ばれる。一方、間接効用関数を価格に関して微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V\left(p, y\right)}{\partial p_j} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u\left(q\right)}{\partial q_i} \frac{\partial q_i\left(p, y\right)}{\partial p_j} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\partial q_i\left(p, y\right)}{\partial p_j} \\
&= \lambda\left(-q_j\right)
\end{aligned}$$

これから、ロワの恒等式と呼ばれる、

$$\frac{-\frac{\partial V\left(p, y\right)}{\partial p_j}}{\frac{\partial V\left(p, y\right)}{\partial y}} = q_j\left(p, y\right)$$

を得ることができる。

次に、支出関数の対数微分を考えよう。すなわち、

$$\frac{\partial \ln E(u,p)}{\partial \ln p_j}$$

を考える。一般に、$f(x)$ の対数微分は、$\ln x = z$ とすると、$x = \exp(z)$ であり、

$$\frac{d \ln f(x)}{d \ln x} = \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

と、f の x に関する弾力性となる、したがって、支出関数の対数微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln E(u,p)}{\partial \ln p_j} &= \frac{p_j}{E(u,p)} \frac{\partial E(u,p)}{\partial p_j} \\ &= \frac{p_j h_j(u,p)}{E(u,p)} \end{aligned}$$

となる。これは、総支出に占める j 財の支出シェアである。これは、支出関数があるとき、その対数微分により支出シェアを求めることが可能であることを意味する。

3 柔軟な関数

AIDS の特徴は、どんな支出関数に対しても二階の近似になるような、柔軟な関数を用いることであった。ここでは関数の柔軟性、Flexibility について議論する。

二つの関数 f と $f^* : \mathbf{R}_{++}^n \to \mathbf{R}_{++}$ を考える。どちらも二回連続微分可能性を仮定する。われわれは、任意の関数 f^* の近似として、$x^* \in \mathbf{R}_{++}^n$ における局所的な二階の近似を与える関数 f を知りたい。f が f^* の二階の近似を与えるためには、

$$f(x^*) = f^*(x^*) \tag{1}$$

$$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*) \tag{2}$$

$$\nabla^2 f(x^*) = \nabla^2 f^*(x^*) \tag{3}$$

が成立せねばならない。各条件で課される方程式の数は、(1) は 1 つ。(2) は n 次元なので n 個。(3) は $n \times n$ なので n^2 である。ここで、さらに f と f^* のいずれも二階の連続微分可能性を仮定すると Young の定理が成立するため、$\nabla^2 f(x^*)$ は対称行列になる。したがって、$n \times n$ 行列であることを考慮すると、(3) の制約の数は、$n(n+1)/2$ である。したがって、制約の数は全部で $1 + n + n(n+1)/2$ である。

例えば、実対称行列 A を用い、

$$f(x) = a_0 + a'x + \frac{1}{2}x'Ax \tag{4}$$

という関数 $f(x)$ を考えれば、自由なパラメターの数は $1+n+n(n+1)/2$ となる。具体的な対応は、(1)-(3) を実際に計算することにより、

$$\begin{aligned} a_0 + a'x^* + \frac{1}{2}x^{*\prime}Ax^* &= f^*(x^*) \\ a + Ax^* &= \nabla f^*(x^*) \\ A &= \nabla^2 f^*(x^*) \end{aligned}$$

とすれば、パラメターの数と同数の連立方程式となり、A, a, a_0 を得ることが可能である。すなわち、任意の二階連続微分可能な関数 $f^*(x)$ は、(4) で定義された関数 $f(x)$ により、二階まで近似可能となっている。

経済学では、$f^*(x)$ は任意ではなく、一次同次性を仮定することがある。選好関係のホモセティックは特殊な状況であったが、支出関数や費用関数は、価格に関する一次同次性を特殊な仮定なしに満たすとされている。価格がすべて二倍になれば、同一の効用水準を得るには二倍の所得が必要になるのは自明であろう。すなわち、支出関数を用いる場合、全ての二階連続微分可能な関数を考える必要はなく、あくまで二階連続可能な一次同次関数の中に限定することができる。すなわち、関数 $f(x)$ が近似せねばならない関数の範囲を狭くすることが可能である。ところが、一次同次性をみたす関数を二階まで近似する関数 $f(x)$ を見つけることはそれほど自明ではない。例えば、(4) の関数形のままで一次同次性を課すと

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, A = 0 \\ f(x) &= a'x \end{aligned}$$

となってしまうが、これだと (3) も (1) も満たさなくなる。すなわち、(4) の形では経済学上意味のある近似にはならないのである。

関数 $f^*(x)$ が一次同次であるとき、一階、および二階の微係数については、下記の制約を課すことができる。すなわち、任意の $x \in \mathbf{R}^n_{++}$ に関して、

$$x'\nabla f(x) = f(x) \tag{5}$$

$$\nabla^2 f(x)\, x = 0 \tag{6}$$

$$\nabla^2 f(x) = \left[\nabla^2 f(x)\right]' \tag{7}$$

なお、上の制約の導出には、オイラーの公式より、n 次同次関数を一階微分は $n-1$ 次同次になる性質を利用している。制約の数は、それぞれ $1, n, n(n-1)/2$ である

さて、二階の連続微分可能な一次同次関数、f　と　$f^* : \mathbf{R}^n_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ を考えよう。すると、両関数とも (5) – (7) を満たす。さらに、f　が　f^*　の二階の近似になるためには、

$$\nabla f\left(x^*\right) = \nabla f^*\left(x^*\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x^*\right)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f^*\left(x^*\right)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq n \tag{9}$$

を満たさねばならない。必要な制約の数は、それぞれ n と $n(n-1)/2$、すなわち、$n+n(n-1)/2 = n\,(n+1)\,/2$ である。なお、$\nabla f\left(x^*\right) = \nabla f^*\left(x^*\right)$ であれば、両関数とも一次同次であるため、$\nabla f\left(x^*\right) x^* = \nabla f^*\left(x^*\right) x^* = f\left(x^*\right) = f^*\left(x^*\right)$ となっていることに注意されたい。また、(9) は対角成分を除外している。これは、非対角成分が定まり、かつ、$\nabla^2 f\left(x^*\right) x^* = \nabla^2 f\left(x^*\right) x^* = 0$ が成立していれば、そこから対角成分もまた決定されるためである。したがって、(5) – (7) を満たす関数 f が、(8) と、(9) を満たすとき、f^* の x^* における二階の近似となる。

4　Translog

柔軟な関数としてよく用いられるのは Translog 型関数である。具体的は、一次同次性を保証する下記のパラメター制約が課されている Translog 型関数を考えよう。

$$\ln E\left(p,u\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln p_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik} \ln p_i \ln p_k + b_0 \ln u + \sum_{i=1}^n b_i \ln p_i \ln u + \frac{1}{2} b_{00}\left(\ln u\right)^2$$
$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0, \sum_{i=1}^n b_i = 0$$

ここで、観察不能な効用水準 u を含む項を捨象し、変数名を p から x に変えると、

$$\ln f\left(x\right) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \ln x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik} \ln x_i \ln x_k$$
$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0,$$

これが任意の関数 $f^*\left(x\right)$ の二階の近似になることを示すには[3]、グラディエ

[3] 今回は、一次同次性の制約は課しているが、制約を課さずに二階の近似になることを示すことも、もちろん可能である。これは、物価指数理論において重要な役割を果たす。

ントとヘシアンを並べて両者を一致させるように a_{ik}, a_i, a_0 を選択することが可能であることを示す必要がある。この証明は、Christensen, et al. (1971)[4]で与えられている。なお、パラメターの数は、a_i 及び a_0 が $1+n$ 個。a_{ik} が n^2 個であるが、総和に関する制約より、a_i 及び a_0 は n 個となる。また、対称性の仮定より $n\left(n-1\right)/2$ 個、及び n 個がなくなり、$n^2-n\left(n-1\right)/2-n$ となる。両者の和は $n^2-n\left(n-1\right)/2=\left(n^2+n\right)/2=n\left(n+1\right)/2$ であり、一次同次関数に関する二階の近似のために必要かつ十分な数のパラメターが存在している。

Flexible 関数は、このほかにも Quadratic Mean of Order r が知られており、

$$\begin{aligned} f\left(p\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2}\right)^{1/r} \\ a_{ij} &= a_{ji}, r \neq 0 \end{aligned}$$

Walsh 指数の経済学的解釈の際に用いられる。なお、Quadratic Mean of Order r で $r=1$ のとき、すなわち、

$$\begin{aligned} f\left(p\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i^{1/2} \ln p_k^{1/2} \\ a_{ik} &= a_{ki} \end{aligned}$$

のケースは Generalized Leontief Cost Function と呼ばれる有名なものであり[5]、Diewert (1974) はこの支出関数をもとに需要関数を導出している。[6]

5 Almost Ideal Demand System (AIDS)

Deaton and Muellbauer (1980) による AIDS は下記の支出関数 (対数) を仮定する。

$$\begin{aligned} \ln E\left(u,p\right) &= u \ln b\left(p\right) + \left(1-u\right)\ln a\left(p\right) \\ \ln a\left(p\right) &= a_0 + \sum \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2}\sum_k\sum_m \gamma_{km}^{*} \ln p_k \ln p_m \\ \ln b\left(p\right) &= \ln a\left(p\right) + \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

[4]Christensen, L.R., D.W. Jorgenson and L.J. Lau, (1971) "Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function," *Econometrica* 39,255-256.

[5]Diewert, W.E. (1971) "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function," *Journal of Political Economy* 79, pp. 481-507.

[6]Diewert, E.W. (1974) "Applications of duality theory," in M. Intrigator and D.Kendrick Eds., *Forntiers in quatitative economics, Vol. 2.* North-Holland, Amsterdam.

なお、(対数) 間接効用は自明であるが、

$$\ln V(p,y) = \frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)}$$

AIDS が想定する支出関数と間接効用関数の形状は単純であるが、直接効用関数の形状を導き出すのは容易ではなく、少なくとも筆者はみたことがない。すぐにわかるように、$\ln a(p)$ は Trasnlog 型であり、価格ベクトル p に関して Flexible になっている。そのため、任意の支出関数の形状に対する二階の近似となるので、特に支出関数の形状にこだわる必要はない。

効用水準が 0 のときの支出は $\ln a(p)$ であり、1 の時の支出が $\ln b(p)$ となる。支出関数における効用の値そのものには意味はなく、相対的な大きさのみが問題になる。なぜなら、効用水準そのもは単調増加変換によって、需要関数を不変に保ちつつどんな値にもなりうるためである。効用のとりうる最小値を 0、最大値を 1 としても、実質的には強い制約にはならない。Deaton 達は効用水準 0 を極めて低い水準の効用と仮定し、$\ln a(p)$ を生存水準支出と解釈している。

前にみたように、(対数) 支出関数を対数微分すると、支出シェア w_i になるはずである。すなわち、

$$\begin{aligned}\ln E(u,p) &= \ln a(p) + u(\ln b(p) - \ln a(p)) \\ &= a_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2}\sum_k\sum_m \gamma^*_{km}\ln p_k \ln p_m + u\beta_0\prod_k p_k^{\beta_k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{\partial \ln E(u,p)}{\partial \ln p_i} \\ &= \alpha_i + \frac{1}{2}\sum_k \gamma^*_{ki}\ln p_k + \frac{1}{2}\sum_k \gamma^*_{ik}\ln p_k + \beta_i u\beta_0\prod_k p_k^{\beta_k} \\ &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki}\ln p_k + \beta_i u\beta_0\prod_k p_k^{\beta_k}\end{aligned}$$

$$\gamma_{ki} = \frac{1}{2}\left(\gamma^*_{ki} + \gamma^*_{ik}\right)$$

ところで、

$$u\beta_0\prod_k p_k^{\beta_k} = \ln E(u,p) - \left(a_0 + \sum \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2}\sum_k\sum_m \gamma^*_{km}\ln p_k \ln p_m\right)$$

したがって、物価指数 P を

$$\ln P = a_0 + \sum_k \alpha_k \ln p_k + \frac{1}{2}\sum_k\sum_m \gamma^*_{km}\ln p_k \ln p_m$$

と定義すると、

$$u\beta_0\prod_k p_k^{\beta_k} = \ln E\left(u,p\right) - \ln P$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln E\left(u,p\right) - \ln P\right) \\
&= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln y - \ln P\right) \\
&= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln \frac{y}{P}\right)
\end{aligned}$$

これが、AIDS による支出シェアの需要関数である。支出シェアの形にすることにより、数量の情報が必要なくなること、名目所得を物価指数 P で割っていることから、実質所得の関数となっていること、さらにその物価指数が Translog で与えられ、柔軟になっていること、等が直ちにわかる。支出関数が価格に関して一次同次関数であること、および二階連続微分可能の仮定から、パラメターには下記の制約がかかる。

$$\begin{aligned}
&\sum_i \alpha_i = 1, \sum_k \gamma_{ki} = 0, \sum_i \beta_i = 0 \\
&\sum_i \gamma_{ki} = 0, \gamma_{ki} = \gamma_{ik}
\end{aligned}$$

AIDS は Flexible 関数から導出されているものの、あくまで、ある一点における二階の近似である。支出シェアの所得弾力性は一定であり、代替効果も一定の値となっていることに注意する必要がある。

6　推計

AIDS の推計の際、物価指数をシェア方程式に代入し、各財 i に関して、

$$\omega_i = \alpha_i - \beta_i\alpha_0 + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln y - \sum \alpha_k \ln p_k - \frac{1}{2}\sum_k\sum_m \gamma_{km}^{*} \ln p_k \ln p_m\right)$$

で、パラメターを残差が正規分布に従うと仮定し最尤法、あるいは非線形最小二乗 (NLSUR) で解くことになる。各財に関して上記の方程式があるので、通常は、価格が地域間で異なることを利用した地域間、あるいは異なる時点間、あるいは両者とも利用した価格と支出シェアのデータを用いて推計される。

上記の方程式は複雑な非線形連立方程式であるが、Deaton and Muellbauer (1980) は、より簡素な物価指数を用いることで推計を単純にできることを指摘しており、今日でも、それら単純化された式が用いられることがあるが、今日の PC であれば、この最適化に伴う非線形計算量が深刻な問題になるケースは少なく、ほとんどの場合、上記の非線形式を直接推計することが可能で

ある。ただし、α_0 は定数項の一部となっており、多くの場合は識別不可能である。α_0 は、価格が 1 の時に必要な最小限の支出、いわゆる生存支出である。そこで、通常は、観察される所得の最小値よりも若干小さい値を仮定し、最適化の際には外生とみなす。AIDS の推計を行う際には、今では便利な STATA のコードが利用可能である[7]。

なお、現在でも、たまに、物価指数を下記の Stone index と呼ばれる単純化されたもので計算されることがある。

$$\ln P = \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln p_k$$

すなわち、価格指数は、その支出シェアの加重算術平均で定義されている。この場合、推計式は、定数項を単純化させた場合は、

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln y - \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln p_k \right)$$

と、価格に関する線形方程式となり、推計は線形連立方程式という、とても簡単な式となる。ただ、この場合、AIDS モデルは、価格の計測単位、measurement に依存してしまう、という大きな問題を有している。Moschini (1995) に即して、少し説明しよう[8]。いま、数量がすべてアメリカ式のポンドとガロンで測られている、すなわち、牛乳は一ガロンの価格、牛肉や豚肉は 1 ポンドの価格で表示されているしよう。いま、単位を 1 リットルと 100 グラムに変化させたとする。データは共通であり、支出シェアは不変であるが、価格の単位のみが変化し、新たな価格を $\overline{p}_k = \theta_k p_k$ で表すとする。すると、

$$\omega_i = \overline{\alpha}_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln \overline{p_k} + \beta_i \left(\ln y - \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln \overline{p}_k \right)$$

$$\overline{\alpha}_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln \theta_k - \beta_i \sum_{k=1}^{N} \omega_k \ln \theta_k$$

となる。このとき、$\overline{\alpha}_i$ は支出シェアの関数となり、定数項ではなくなってしまう。そのため、線形 AIDS モデルで推計を行う場合、その需要システムの推計結果は、価格の単位に依存してしまう、という非常にこまった性質を有してしまうのである。なお、非線形の物価指数を用いる場合は

$$\ln P = a_0 + \sum_k \alpha_k \ln \overline{p_k} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma^*_{km} \ln \overline{p_k} \ln \overline{p_m}$$

[7] Poi のコードは、後で触れる QUAIDS に対応し、システム推計も可能な便利なものである。Poi,B. P. (2012) “Easy demand-system estimation with QUAIDS.” *Stata Journal*,12(3):433-446

[8] Moschini, Giancarlo. (1995). Units of Measurement and the Stone Index in Demand System Estimation. American Journal of Agricultural Economics, 77(1), 63-68. doi:10.2307/1243889

となり、新たに

$$\overline{a}_0 = \alpha_0 + \sum \alpha_k \ln \theta_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma_{km}^* \ln \theta_k \ln \theta_m$$

$$\overline{\alpha}_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln \theta_k$$

となり、今度は、$\overline{a}_0$ も $\overline{\alpha}_i$ も支出シェアに依存せず、定数項のままである。したがって、定数項を推計する場合は、計測単位の変更は弾力性の推計結果に影響を与えない。もっとも、前述のように、α_0 を、価格が 1 の時に必要な最小限の支出、いわゆる生存支出とみなし、観察される所得の最小値よりも若干小さい値を仮定した場合は、非線形推計を行う場合でも、やはり計測単位に依存してしまう。これがどの程度深刻な問題を作るか否かは、今後検証していかねばならないものである。

実際に AIDS モデルを推計する際には、名目所得として家計所得ではなく、総支出額を利用することが多い。これは、支出シェアを足し合わせると 1 になり、所得に一致するという予算制約式の情報を利用しているためであり、理論的には貯蓄という動学的側面を無視しているために生じるものである。動学モデルが背後にあると考えると、総支出額は内生変数であり、誤差項と相関を有し、推定結果にバイアスをもたらす可能性がある。コンピューターの計算力が向上している現在では、対数所得、対数所得の二乗、住宅の有無と対数所得の交差項等を操作変数として、巨大な非線形の連立方程式による GMM を推計することが多い。具体的なアルゴリズムに興味のあるものは、Blundell and Robin (1999) は、Repeated Cross Section を用い、比較的大きな需要システムの、総支出の内生性を考慮した非線形解法を提唱しており、一読の価値がある[9]。

7　集計問題

AIDS や需要関数の初期の文献では、集計問題に多くのスペースを割いている。そこでは、家計レベルではなく、産業レベル、市場レベルの情報しかない場合、それら集計量の分析から家計レベルの構造パラメターを推計可能であるか否かが問題なっている。家計間の異質性が所得水準のみであれば、ホモセティック関数、あるいはその拡張である quasi-homothetic である場合は家計レベルの効用は集計可能であることが知られている。しかしながら、家計レベルの個票データ利用が一般化した現在では、集計量を用いて分析するメリットは計算量以外は存在せず、家計レベルのデータを用いた AIDS 分析では集計問題を意識する必要はない。ただし、家計間の異質性をどのように

[9]Blundell, R. & Robin, J. M. (1999) "Estimation in large and disaggregated demand systems: an estimator for conditionally linear systems." *Journal of Applied Econometrics* 14, pp. 209-232.

モデル化するべきかは常に意識する必要がある。単に誤差項にすべて押し込むのか、なんらかの観察可能な属性をコントロールするのか、価格や所得との交差項を考えるか否か、データサイズと残差の動きを見ながら適切なモデルを選択する必要がある。

8　動学化

AIDS を動学モデルに応用する試みには二種類あり、Blundell (1998)[10]のように、異時点間に関して分離可能な効用関数を考え、AIDS は各期における静学モデルとして推計し、その推計結果をもとに一財モデルの Euler 方程式の推計に移行する二段階推計と、Karagiannis et al. (2000)[11]のように、特に動学理論を考えず、シェア方程式の時間階差をとる手法である。Blundell の手法は標準的なミクロ経済理論に即したものであるが、Karagiannis の手法はマクロ時系列モデルに即し、シェアの時間階差のラグ項が被説明変数に加えられており、AIDS にあるミクロ経済学的な構造があいまいになっている印象をうける。シェア方程式の ad hoc な動学化はたまにみかけるものの、主流になっているとはいいがたい。

動学モデルにはせずに、単純に時間階差をとることも考えられる。Deaton and Muellbauer (1980) に従い、下記のようなシェア方程式の階差を考えてみよう。

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_{kt} + \beta_i \left(\ln \frac{y_t}{P_t} \right) + u_{it}$$

$$\Delta\omega_{it} = \sum_k \gamma_{ki} \Delta \ln p_{kt} + \beta_i \Delta \left(\ln \frac{y_t}{P_t} \right) + u_{it} - u_{it-1}$$

$$\Delta \ln P_t = \sum \alpha_k \Delta \ln p_{kt} + \Delta \left(\frac{1}{2} \sum_k \sum_m \gamma^*_{km} \ln p_k \ln p_m \right)$$

物価方程式の階差は複雑となるので、Deaton and Muellbauer (1980) による単純化を仮定すると、

$$\ln P_t = \sum_k \omega_k \ln p_{kt}$$

[10]Blundell, R., (1998) “Consumer Demand and Intertemporal Allocations: Engel, Slutsky and Frisch,” in *Steinar Strom eds., Econometrics and Economic Theory in the 20th Century: The Ragnar Frisch Centennial Symposium* (Cambridge, UK: Cambridge University Press)

[11]Karagiannis, G., Katranidis S., and Velentzas, K. (2000) “An error correction almost ideal demand system for meat in Greece.” *Agricultural Economics,* 22, 29-35.

となる。ω_k がサンプル期間において一定と仮定すると、推計式は、

$$
\begin{aligned}
\Delta\omega_{it} &= \sum_k \gamma_{ki}\Delta\ln p_{kt} + \beta_i\left(\Delta\ln y_t - \Delta\ln P_t\right) + \Delta u_{it} \\
&= \sum_k \gamma_{ki}\Delta\ln p_{kt} + \beta_i\left(\Delta\ln y_t - \sum_k w_k\Delta\ln p_{kt}\right) + \Delta u_{it}
\end{aligned}
$$

となり、パラメター制約を加えても線形回帰で推計可能である。時間階差をとることができれば、必要な情報は水準ではなく変化率となるので、価格データ収集において非常に大きなアドバンテージとなる。多くの場合、価格データは水準ではなく、前期からの変化率で与えられている。また、前述のような、価格の計測単位への依存、という問題もなくなる。なお、パネルデータが存在する場合、Banks et al. (1997) のように、様々なバイアスを除去するために GMM を行うことも可能である。

AIDS モデルをパネル、あるいは時系列データで分析することで、物価水準の情報が不要になり、物価変化率のデータを用いることができるのは大きなメリットである (物価指数の定義を簡素化する必要があるが)。しかし、AIDS の大きな利点である、人々の選好関係、あるいは支出関数から出発する、というメリットが小さくなってしまう点には注意が必要である。AIDS の基になる支出関数は静学モデルであり、そこには将来や過去の消費は考慮されていない。もしも支出される財の一部が耐久消費財、あるいは保存可能であるなら、現在の支出は将来の価格や過去の購入行動に依存してくる。また、旅行や美容院、医療・健康関連の支出、さらには高級外食などは、たとえ保存は不可能なサービスであっても、過去や将来の予定から現在の支出が独立であるとは考えにくい。AIDS を本格的に動学を導入するためには、時点間分離可能性の仮定を廃する必要があるが、それは非常に複雑なってしまう。どれだけの消費財が時点間分離可能という仮定を満たすのか、をまず推計する必要があるが、多くの財は時点間で分離可能になっていないことを示唆する研究は多い。これは第四回の講義ノート (習慣形成仮説と家計内在庫モデル、で触れる予定である。

9　経済厚生の計測

時系列、あるいはパネルデータがあり、そのサンプル期間中に税制変化や大きな相対価格の変化が生じたとしよう。そのような変化が経済厚生にどのような影響を与えたかを AIDS では計測可能である。異なる二つの価格ベクトルの経済厚生の違いは、両者の効用水準を一定に保つ場合の最小支出水準

の違い、すなわち Cost of Living Index により計測可能である。具体的には、

$$\begin{aligned}COLI &= \ln E\left(u_0, p_1\right) - \ln E\left(u_0, p_0\right) \\ &= \sum \alpha_k \Delta \ln p_k + \frac{\Delta}{2} \sum_k \sum_m \gamma^*_{km} \ln p_k \ln p_m + u_0 \beta_0 \Delta \prod_k p_k^{\beta_k}\end{aligned}$$

を計算すればよい。固定する効用水準を 0 期とするか 1 期とするかで値は若干異なる。

なお、ミクロ理論によく出てくる補償変分 CV と等価 EV は

$$CV = \ln E\left(u_1, p_1\right) - \ln E\left(u_0, p_1\right)$$

$$EV = \ln E\left(u_1, p_0\right) - \ln E\left(u_0, p_0\right)$$

であり、生計費指数とよく似ているが異なる概念であることに注意されたい。

効用の水準そのものは

$$\begin{aligned}u_0 &= \frac{\ln E\left(u, p\right) - \ln P}{\beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k}} \\ &= \frac{\ln y_0 - \ln P}{\ln b\left(p\right) - \ln a\left(p\right)}.\end{aligned}$$

で求めることができる。この厚生評価の利点の一つは、家計属性、具体的には所得水準により、家計間で厚生がどう変化したかを分析可能なことである。例えば、食料品の相対価格が急激に変化したとき、家計の需要関数の構造を考慮しながら、その変化が異なる家計にどのように帰着したのか、金銭によりその大きさを表現できるのである。

10　QUAIDS

Trasnlog 型の支出関数は Flexible 関数であり、なだらかな「任意」の支出関数の近似となる。これは確かに魅力的な特徴であるが、あくまで近似、それもある一点における近似にすぎないため、近似点から大きく乖離すると、精度が低くなってしまう。例えば、AIDS における支出シェアの (実質) 所得弾力性は一定であるが、低所得者と超高所得者の弾力性が同じであると仮定することは非現実的である。局所的な近似ではなく、大域的な近似が必要な場合が出てくる。コブ・ダグラス型や CES 型は、非常に制約が強いが、大域的に成立するものであった。AIDS はあくまで局所的な成立するものにすぎず、大域的には成立するとは限らないのである。Banks et al. (1997) は、イギリスの家計調査を用い、食料全体の場合はシェアの所得弾力性は一定であるが、酒や衣類のシェアは山形になる、すなわち、中所得者のシェアが高額所得者や低額所得者よりも高くなっていることを指摘した。AIDS ではこの

シェアと所得の関係を描写できないのである。そこで、彼らは、AIDS を拡張し、下記のように、AIDS の間接効用と新たな価格関数 $\lambda(p)$ の調和平均として新たな間接効用関数を仮定した。

$$\ln V(p,y) = \left[\left(\frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)}\right)^{-1} + \lambda(p)\right]^{-1}$$

整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln V(p,y)} - \lambda(p) &= \left(\frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)}\right)^{-1} \\ &= \frac{1 - \ln V(p,y)\lambda(p)}{\ln V(p,y)}\end{aligned}$$

$$\frac{\ln y - \ln a(p)}{\ln b(p) - \ln a(p)} = \frac{\ln V(p,y)}{1 - \ln V(p,y)\lambda(p)}$$

$$\ln y = \frac{\ln V(p,y)(\ln b(p) - \ln a(p))}{1 - \ln V(p,y)\lambda(p)} + \ln a(p)$$

$$\begin{aligned}\ln E(u,p) &= \frac{u(\ln b(p) - \ln a(p))}{1 - u\lambda(p)} + \ln a(p) \\ &= \frac{u(\ln b(p) - \ln a(p)) + \ln a(p) - u\lambda(p)\ln a(p)}{1 - u\lambda(p)} \\ &= \frac{u\ln b(p) + (1-u)\ln a(p) - u\lambda(p)\ln a(p)}{1 - u\lambda(p)}\end{aligned}$$

したがって、QUAIDS の支出関数は

$$\begin{aligned}\ln E(u,p) &= \frac{u\ln b(p) + (1-u)\ln a(p) - u\lambda(p)\ln a(p)}{1 - u\lambda(p)} \\ &= \frac{u\beta_0\prod_k p_k^{\beta_k} + a_0 + \sum\alpha_k\ln p_k + \frac{1}{2}\sum_k\sum_m\gamma^*_{km}\ln p_k\ln p_m - u\lambda(p)\ln a(p)}{1 - u\lambda(p)}\end{aligned}$$

無論、$\lambda(p) = 0$ であれば、この支出関数は AIDS と一致する。$u\lambda(p)$ が分母にも来ていることから、対数微分により得られる支出シェアには二次項が生じる。導出は Banks et al. (1997) を参照してもらいたいが、この対数微分により、下記の QUAIDS を導出可能である。ただし、$\lambda(p)$ は対数価格の線形関数と仮定している。すなわち、

$$\omega_i = \alpha_i + \sum_k\gamma_{ki}\ln p_k + \beta_i\left(\ln\frac{y}{P}\right) + \frac{\lambda_i}{\ln b(p) - \ln a(p)}\left(\ln\frac{y}{a(p)}\right)^2$$

$$\lambda(p) = \sum_i\lambda_i\ln p_i, \sum_i\lambda_i = 0$$

AIDSと比較すると、対数実質所得の二次の項が生じていることがわかる。その分、パラメター λ_i が増えている。このQUAIDSも便利なSTATA codeが利用可能であり、簡単に推計可能である。なお、AIDS同様にQUAIDSは α_0 の識別ができず、外生的に値を入れねばならない。QUAIDSを用いた分析にはそれこそ無数に存在するが、Banks et al (1997) は経済厚生評価も含めた非常にわかりやすい論文であり、熟読を勧める。

11 集計について (PIGLとPIGLOG)

現在では家計・個人レベルの消費・所得データが多くの国で利用可能であるが、数十年前までは各国の消費分析のほとんどは集計データで行われており、日本において家計レベル、あるいは個人レベルの個票データが研究者にも広く利用可能になったのはここ20年くらい、大学院生による利用可能性関してはここ10年程度の歴史しかない。ミクロの消費理論は個人レベル、家計レベルで構築されている。たとえ家計の効用関数がすべて同一であっても、所得水準が異なる場合、集計した消費水準と所得、価格の関係の間には個人レベルの消費関数とは異なる関係になってしまう。消費に限らず、マクロの集計量を分析するものにとり、集計問題は非常に重要な問題のはずである。現在ではマクロ経済学者はミクロデータから積み上げていく研究者とマクロデータをそのまま使う研究者に完全に分化しており、集計問題がマクロ経済学上の深刻な問題と認識されることは少ない。また、消費分析を専門にする多くの研究者はミクロデータを使うことが多くなり、集計問題を意識する必要はなくなっている。しかしながら、70年代においては集計問題は深刻な問題と多くのマクロ経済学者の間で認識されていた。当時は、集計された消費量、所得及び価格に関して、ミクロの消費理論がどのような時に適用可能なのか、多くの研究がなされた。その一つの成果がPIGL(Price Independent Generalized Linear) およびPIGLOGと呼ばれるものであり、AIDSはPIGLOGの一種でもある。

家計 h の i 財への需要関数と支出シェアが

$$q_i^h = q_i^h\left(p, y^h\right), \omega_i^h = \frac{p_i^h q_i^h}{y^h}$$

その集計量が

$$Q_i = \sum_h q_i^h\left(p, y^h\right), \overline{\omega}_i = \sum_h \omega_i^h$$

で与えられたとする。また、家計 h の費用・支出関数が

$$E^h = E^h\left(p, u_h\right)$$

だとすると、今までみたように、

$$\frac{\partial \ln E^h}{\partial \ln p_i} = \omega_i^h$$

集計問題を解決するには、集計量である総費用・支出関数 E^A があり、通常の支出関数の性質 (一次同次性、凹性等) をみたしながら、

$$\frac{\partial \ln E^A}{\partial \ln p_i} = \overline{\omega}_i$$

というシェファード・マッケンジーの補題をみたすものがあってほしい。一つの解決法は、需要関数が所得に関して線形であると仮定することである。例えば、個々の需要関数が

$$q_i^h = \alpha_i^h (p) + \beta_i (p) y^h$$

の形状をとっていれば、家計間の異質性は右辺第一項と第二項における所得水準の違いで反映されている。所得に関しては線形なので、集計は容易である。このような需要関数は、下記の支出関数の時に生じる。

$$E^h = a^h (p) + u^h b (p)$$

対応する総支出関数は

$$E^A = \sum_h a^h (p) + b (p) u$$

となる。この線形性により、単純集計された総支出と価格の関係が個々の需要関数のアナロジーで用いることが可能になり便利ではあるが、線形性は非常に強い制約である。総支出として、単純集計よりも複雑な集計を許すのであれば、この線形性を少し緩めることが可能になる。そうした、一般化線形性をみたす、Generalized Linear (GL) な支出関数が Muellbauer (1976) により提案されている[12]。それは、個々の支出関数を

$$\begin{aligned} E^h &= \theta^h \left(u^h, a (p), b (p)\right) + \phi^h (p), \\ \sum_h \phi^h (p) &= 0, \\ \theta^h &: a (p) \text{ と } b (p) \text{ に関して一次同次} \\ a (p), b (p), \phi^h (p) &: \text{価格に関して一次同次} \end{aligned}$$

と仮定する。ここでは、家計間異質性は家計間で集計するとゼロになる右辺第二項と効用水準のみでとらえられている。一次同次性と家計間異質性の項が集計すると消えるため、GL の下では、集計された支出シェアは

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_i &= (1-\lambda) \frac{\partial \log a}{\partial \log p_i} + \lambda \frac{\partial \log b}{\partial \log p_i}, \\ &= \overline{\omega}_i \left(y^0, p\right) \\ \lambda &= \frac{\partial \log \theta}{\partial \log b} = \lambda \left(y^0, p\right) \end{aligned}$$

[12] Muellbauer, J. (1976). "Community Preferences and the Representative Consumer," *Econometrica*, 44(5), 979-999.

ここで、y^0 は総支出シェアに対応する総所得であるが、これは単に家計所得の総和にはならず、所得の分布や価格にも依存してくる、複雑な関数となってしまう。この総所得をより容易に導出可能にしたのが PIGL であり、個々の支出関数を下記のような CES 型に仮定する。

$$E^h = k^h \times \left(a\left(p\right)^{\alpha}\left(1-u^h\right)+b\left(p\right)^{a}u^h\right)^{1/\alpha}$$

対応する総支出関数は

$$E^A = \left(a\left(p\right)^{\alpha}\left(1-u^0\right)+b\left(p\right)^{a}u^0\right)^{1/\alpha}$$

α は支出関数の凹性、すなわちエンゲルカーブの曲率を規定するパラメターである。PIGL の下で、Muellbauer (1976) は下記の式を導出している。

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_i &= \gamma_i\left(p\right)+\eta_i\left(p\right)\left(y^0\right)^{-\alpha} \quad \text{if } \alpha \neq 0 \\
\overline{\omega}_i &= \gamma_i\left(p\right)+\eta_i\left(p\right)\ln\left(y^0\right) \quad \text{if } \alpha = 0 \\
y^0 &= \left(\frac{\sum_h k^{\alpha}y^{h1-\alpha}}{\sum_h y^h}\right)^{-1/\alpha}
\end{aligned}$$

総支出シェアに対応する総支出は、平均支出と異なり、家計間の支出総額のばらつきに依存するようになる。

PIGL の特殊ケースは、α がゼロの時 (PIGLOG) であり、このときの個々の支出関数は

$$E^h = a\left(p\right)\left(1-u^h\right)+b\left(p\right)u^h$$

支出関数の形状からわかるように、AIDS は PIGLOG の一種であり、集計問題をクリアーしていることがわかる。集計問題に関しては、Blundell and Stoker (2005) によるサーベイがよくまとまっている[13]。

12 まとめ:マーシャルの需要関数と補償需要

AIDS の需要関数をもう一度見てみよう。支出関数の形状を具体的に仮定し、

$$\begin{aligned}
\ln E\left(u,p\right) &= \ln a\left(p\right)+u\left(\ln b\left(p\right)-\ln a\left(p\right)\right) \\
&= a_0+\sum\alpha_k\ln p_k+\frac{1}{2}\sum_k\sum_m\gamma^*_{km}\ln p_k\ln p_m+u\beta_0\prod_k p_k^{\beta_k}
\end{aligned}$$

そこに、シェファード・マッケンジーの補題を用い、補償需要 (正確には対数線形微分) を得ている。

[13] Blundell, Richard, and Thomas M. Stoker. (2005) "Heterogeneity and Aggregation." *Journal of Economic Literature*, 43(2): 347-391.

$$
\begin{aligned}
\omega_i &= \frac{\partial \ln E\left(u,p\right)}{\partial \ln p_j} \\
&= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_k u \beta_0 \prod_k p_k^{\beta_k} \\
&= \alpha_i + \sum_k \gamma_{ki} \ln p_k + \beta_i \left(\ln \frac{y}{P}\right) \\
\gamma_{ki} &= \frac{1}{2}\left(\gamma_{ki}^{*} + \gamma_{ik}^{*}\right)
\end{aligned}
$$

我々が市場やサーベイで観察可能なのは、所与の所得と価格の下での購買行動であり、マーシャルの需要関数に基づくものである。支出関数から導出される補償需要はマーシャルの需要ではないが、物価水準を用いることで、実質所得が、補償需要関数において効用水準が果たすのと同様の役割を果たしている。物価水準に対して強い意味合いを持たせるのがこの AIDS の非常に大きな特徴になっている。私たちは、一般に、関数形に強い仮定をおかずに、補償需要関数を推定することはできない。AIDS もまた、関数形に強い仮定を置いているが、AIDS は Flexible な関数であり、任意の二階連続微分可能な関数の局所的な二階の近似になっている。その点において、あくまで局所的には、AIDS は非常に一般的な形状ということができる。そして、AIDS を用いることでマーシャルの需要関数から補償需要に変換することが可能になり、間接効用と支出関数を求めることができる。そのため、AIDS から生計費指数を求めることが可能になっている。