

# 家計消費の経済分析

(9) 予備的貯蓄モデルと緩衝在庫モデル

阿部修人

一橋大学経済研究所

平成 30 年 10 月 16 日

## 1 導入

恒常所得・ライフサイクルモデルにおいて、各期の効用関数が消費の二次関数のとき、 $t$  期の消費は、その時点での生涯所得および資産の和である  $W_t$  と年齢、および金利に依存し、

$$\theta_t c_t = \frac{rW_t}{1+r}, \quad (1)$$

と書くことができた。すなわち、消費水準を資産水準の関数として解き切ることができた。 $\theta_t$  は期間、年齢および金利水準に依存する、家計にとり外生的な変数である。このとき、各期の消費は生涯所得の現在価値の平均値のみ依存しており、生涯所得の分散や高次の Moment には依存しない。これは、所得の変動に家計は関心はなく、その平均値のみが重要となっていることを意味する。無論、この性質は、効用関数が消費の二次関数であるという確実性等価の仮定に全面的に依存している。確実性等価のモデルは非常に扱いやすいというメリットがあるものの、所得の不確実性が消費水準に与える影響を無視することになってしまい、不確実性下の行動を分析する時には大きな制約となる。将来の不確実性のための備えとしての貯蓄は予備的貯蓄 (Precautionary Savings) と呼ばれ、非常に古くから貨幣等の流動性保有動機の一つとして重視されているが、確実性等価モデルでは予備的貯蓄が発生しないのである<sup>1</sup>。予備的貯蓄の重要性は、古くは Friedman (1957) による有名な恒常所得仮説に関する著作においても、家計の資産保有動機として定義されている等、家計消費分析において、重要な貯蓄動機の一つとみなされてきており、その点で、確実性等価モデルは消費・貯蓄選択のモデルとしては不完全なものであ

<sup>1</sup>予備的動機は、Kyenes の「一般理論」において、流動性保有動機の一つとして定義されている。また、Keynes (1936) の前に、Hayek (1934) や Fisher (1930) が不確実性と貯蓄の関係について議論している。さらに古くは Thonton (1802) が、予備的、という言葉は使っていないものの、将来の不確実性への対処のため、銀行が流動性を保持する必要性を述べている。

る<sup>2</sup>。

消費・貯蓄選択において、将来の不確実性に対処する動機が重要であることは19世紀から指摘されていたが、実際に動学モデルの定式化が進み、その重要性に関する定量的分析が進んだのは1990年以降のことである。Deaton (1992) による消費に関する優れた教科書が書かれてから今日までの間には多くの分析の進展があったが、予備的貯蓄の定量的評価が可能になり、その重要性が認識されていることは、1990年代前半と今日における消費分析の大きな違いの一つである。

前章まで頻繁に登場してきた線形のオイラー方程式では予備的動機の貯蓄は発生しない。予備的貯蓄を分析するためには、非線形のオイラー方程式を取り扱わねばならないが、このとき、消費のマルチンゲール性が成立せず、したがって、予算制約、

$$E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{c_{t+s}}{(1+r)^s} = E_t \sum_{s=0}^{T-t} \frac{y_{t+s}}{(1+r)^s} + a_t \equiv W_t, \quad (2)$$

に含まれる消費の期待値を簡単に消去できなくなることを意味する。各期の効用関数としてCRRA、あるいは対数という強い仮定を課しても、消費の最適動学経路、すなわち消費水準を各期の資産総額の関数としてClosed Formで解き切るとは原則不可能であり、数値的に解くことが必要になる。もっとも、その基本的な特徴を見るためだけであれば、コンピューターを駆使しなくともある程度は可能である。

## 2 予備的貯蓄の基本理論

### 2.1 二期間モデル

まず、Leland(1968)に従い、最も基本的な予備的貯蓄の発生を二期間モデルで考察する。家計が0期と1期に所得を得るとする。0期の所得には不確実性はないが、1期の所得は確率変数であると仮定する。

単純化のため、金利と時間選好率はともにゼロとする。0期の所得が $y_0$ 、1期の所得が $Y_1$ であり、

$$Y_1 = \bar{y}_1 + q_1, \quad E_0 q_1 = 0, \quad (3)$$

と書くことにする。すなわち、0期における1期所得の期待値は $\bar{y}_1$ である。また、金利ゼロの下でのゼロ期における期待総資産は

$$Ew = y_0 + EY_1.$$

---

<sup>2</sup>“This new motive is the availability of a reserve for emergencies - for unexpectedly low receipts, on the other hand, or unexpectedly high levels of consumption on the other hand.” (Friedman (1957) P.16.)

予算制約は

$$c_0 + Ec_1 = y_0 + EY_1, \quad (4)$$

あるいは

$$c_1 = w - c_0 + Y_1. \quad (5)$$

貯蓄を

$$s = w - c_0, \quad (6)$$

と定義すると、オイラー方程式は、

$$u_c(c_0) = E_0 u_c(s + q_1). \quad (7)$$

上式では、 $q_1$  が確率変数となっている。

いま、単純化のために、 $q_1$  は2つの値、 $-\varepsilon$  と  $+\varepsilon$  をそれぞれ  $1/2$  の確率でとる、と仮定する。ただし、2期目の所得がマイナスになることを避けるため、 $0 < \varepsilon < \bar{y}_1$  とする。このとき、2期目の所得の分散は、

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \varepsilon^2, \quad (8)$$

である。

オイラー方程式は、

$$u_c(c_0) = \frac{1}{2}u_c(w - c_0 + \varepsilon) + \frac{1}{2}u_c(w - c_0 - \varepsilon), \quad (9)$$

全微分すると、

$$u_{cc}(c_0) \frac{dc_0}{d\varepsilon} = \frac{1}{2}u_{cc}(s + \varepsilon) \left[ -\frac{dc_0}{d\varepsilon} + 1 \right] + \frac{1}{2}u_{cc}(s - \varepsilon) \left[ -\frac{dc_0}{d\varepsilon} - 1 \right]. \quad (10)$$

整理すると、

$$2u_{cc}(c_0) \frac{dc_0}{d\varepsilon} = -\frac{dc_0}{d\varepsilon} [u_{cc}(s + \varepsilon) + u_{cc}(s - \varepsilon)] + [u_{cc}(s + \varepsilon) - u_{cc}(s - \varepsilon)], \quad (11)$$

$$\frac{dc_0}{d\varepsilon} = \frac{u_{cc}(s + \varepsilon) - u_{cc}(s - \varepsilon)}{2u_{cc}(c_0) + u_{cc}(s + \varepsilon) + u_{cc}(s - \varepsilon)}. \quad (12)$$

$u_{cc} < 0$  より、上式の分母は常に負である。したがって、右辺の符号は分子の符号の逆になる。(12) 式の分子は、 $u_{cc}$  が消費の増加関数であれば、すなわち、 $u_{ccc} > 0$  のとき、常に正となる。したがって、1期目の消費は、2期目の所得の不確実性が増加する時、 $u_{cc}$  が増加関数である限り減少する、すなわち、貯蓄が増加するのである。この貯蓄の増分は、所得の期待値が一定のまま分散が大きくなるために生じる貯蓄であり、不確実性に対処するために生じる貯蓄であり、予備的貯蓄とみなすことができる。

上記の結果は、二期間であることや、金利がゼロであること等には依存しない。各期の効用関数の三回微分が正であると、予備的動機による貯蓄が発生するのである。CRRA の場合は  $\sigma > 0$  である限り、

$$u = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad (13)$$

$$u_{ccc} = \sigma(1+\sigma)c^{-\sigma-2} > 0. \quad (14)$$

となり、予備的動機による貯蓄が生じる。Constant Absolute Risk Aversion (CARA) の場合も、

$$u = -e^{-\sigma c}, \quad (15)$$

$$u_{ccc} = (\sigma c)^3 e^{-\sigma c} > 0. \quad (16)$$

となり、やはり、 $\sigma > 0$  である限り、予備的貯蓄が発生する。リスク回避度の強度の指標として、相対的リスク回避度があるように、予備的貯蓄の強度を、下記のような、相対的慎重度係数で表わすことも可能である。

$$\text{Relative Prudenc} = \frac{-cu_{ccc}}{u_{cc}}. \quad (17)$$

この、相対的慎重度が正であれば、消費の限界効用に対するイェンセンの不等号に起因する予備的貯蓄が発生する。しかしながら、後述するように、たとえこの係数がゼロであっても、予備的貯蓄が生じるケースがあることに注意すべきである。各期の効用関数が二次関数であれば慎重度係数はゼロとなり、イェンセンの負等号に起因する予備的貯蓄は発生しない。しかし、流動性制約が存在し、自由な借入れが出来ない場合、不確実性の存在による貯蓄の増加、すなわち、予備的貯蓄が発生する。なぜなら、流動性制約に陥ると消費のオイラー方程式が等号で成立しなくなるため、流動性制約に陥らないように、正の資産を保有するインセンティブが生じるためである。このことは、第 1 章 4 節で紹介したモデルの各期効用関数を CRRA ではなく二次関数にし、不確実性のあるケースとないケースの資産プロファイルを比較することで簡単に確認可能である。

## 2.2 多期間モデル

本節では、前節の二期間モデルを拡張し、多期間における予備的貯蓄とオイラー方程式の関係を導出する<sup>3</sup>。

<sup>3</sup>予備的貯蓄を一般的な家計のライフサイクルモデルにより明確に描写したのは、おそらく Nagatani (1972) である。Nagatani (1972) は連続時間モデルを用い、現在の予備的貯蓄モデルにおいて極めて重要な特徴と認識されている様々な現象を 40 年近く前に既にシミュレーションで明らかにしている。しかしながら、予備的貯蓄モデルが一般的に認知され、広く利用されるようになったのは Zeldes (1989a) 以降のようである。

下記のような消費に関するオイラー方程式を考える。

$$u_c(c_t, s^t) = \left( \frac{1+r}{1+\rho} \right) E_t u_c(c_{t+1}, s^{t+1}). \quad (18)$$

選好ショックと消費が分離可能で、かつ、効用関数が CRRA であれば、

$$\left( \frac{1+r}{1+\rho} \right) E_t \left[ \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\sigma} \right] = 1. \quad (19)$$

対数変換を行うと

$$E_t \left[ \exp \left[ \ln \left( \frac{1+r}{1+\rho} \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\sigma} \right) \right] \right] = 1$$

$$E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1})) \exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho))] = 1$$

期待値オペレーターを移動して、

$$\exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho)) E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = 1$$

ここで、 $\ln(c_{t+1})$  が分散  $\sigma_c^2$ 、期待値  $\mu = E_t \ln(c_{t+1})$  をとる正規分布に従うと仮定する。これは、所得のショックがすべて恒常的であり、かつ、所得の変分が対数正規分布に従うと仮定することに等しい。すると、

$$E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \exp \left[ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_c^2} \right]$$

ところで

$$\begin{aligned} \exp(-\sigma x) \exp \left[ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_c^2} \right] &= \exp \left[ -\sigma x - \frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\sigma_c^2} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{x^2 - 2\mu x + \mu^2 + 2\sigma_c^2 \sigma x}{2\sigma_c^2} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{x^2 - 2x(\mu - \sigma_c^2 \sigma) + \mu^2}{2\sigma_c^2} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{x^2 - 2x(\mu - \sigma_c^2 \sigma) + (\mu - \sigma_c^2 \sigma)^2 - (\sigma_c^2 \sigma)^2 + 2\mu \sigma_c^2 \sigma}{2\sigma_c^2} \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2 - (\sigma_c^2 \sigma)^2 + 2\mu \sigma_c^2 \sigma}{2\sigma_c^2} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{(\sigma_c^2 \sigma)^2 - 2\mu \sigma_c^2 \sigma}{2\sigma_c^2} \right] \exp \left[ -\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2}{2\sigma_c^2} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \mu \sigma \right] \exp \left[ -\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2}{2\sigma_c^2} \right] \end{aligned}$$

積分すると

$$\begin{aligned} & \exp \left[ \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \mu \sigma \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \left[ -\frac{(x - (\mu - \sigma_c^2 \sigma))^2}{2\sigma_c^2} \right] dx \\ &= \exp \left[ \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \mu \sigma \right] \\ &= \exp \left[ \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t (\ln c_{t+1}) \right] \end{aligned}$$

したがって、

$$E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = \exp \left[ \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t (\ln c_{t+1}) \right]$$

オイラー方程式は

$$\begin{aligned} & \exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho)) E_t [\exp(-\sigma \ln(c_{t+1}))] = 1 \\ & \exp(\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho)) \exp \left[ \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t (\ln c_{t+1}) \right] = 1 \end{aligned}$$

対数をとると、

$$\sigma \ln(c_t) + \ln(1+r) - \ln(1+\rho) + \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{2} - \sigma E_t (\ln c_{t+1}) = 0$$

整理すると

$$\begin{aligned} \sigma \Delta \ln(c_{t+1}) &= \ln(1+r) - \ln(1+\rho) + \sigma^2 \frac{\sigma_c^2}{2} \\ \Delta \ln(c_{t+1}) &= \frac{1}{\sigma} [\ln(1+r) - \ln(1+\rho)] + \sigma \frac{\sigma_c^2}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

と書くことができる。不確実性のない時は、

$$\left( \frac{1+r}{1+\rho} \right) \left[ \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\sigma} \right] = 1. \quad (21)$$

であったから、期待値オペレーターを考えずに対数をとることが可能であり、

$$\Delta \ln(c_{t+1}) = \frac{1}{\sigma} [\ln(1+r) - \ln(1+\rho)]. \quad (22)$$

したがって、不確実性が存在することにより、(20)における右辺第二項の分散項の分だけ消費成長率は増加することになる。これは、各期において、不確実性が存在するために貯蓄し、将来の消費を増加させる、すなわち、予備的貯蓄が発生していることを意味している。

なお、

$$\Delta \ln(c_{t+1}) = \frac{1}{\sigma} [\ln(1+r) - \ln(1+\rho)] + \sigma \frac{\sigma_c^2}{2} < g : \text{所得成長率の平均} \quad (23)$$

を満たす時、無限視野モデルにおけるベルマン方程式は収束し、消費関数が一意に定まることが知られている。上記の条件を満たすには、時間選好率が高いことが必要である。予備的貯蓄の分析では、時間選好率を高く設定し、

$$r < \rho, \quad (24)$$

を仮定することは珍しくない。Deaton (1991) に沿って、この意味を整理してみよう。

$r = \rho$  のとき、かつ所得が *i.i.d.* のとき、消費は所得の平均値に収束する。このとき、資産は無限に増加する。この性質は流動性制約があろうがなかろうが変わらない。資産が無限に成長する結果、消費の変動はいずれ全くなくなる。しかしながら、このような消費関数は、実際のデータからはサポートされない。

$r > \rho$  のとき、家計は資産を無限に蓄積していき、そのうち、資産所得が所得に比べて極めて大きくなり、所得が消費に与える影響はほぼ皆無となる。無限視野の場合は、流動性制約も予備的貯蓄も意味のない状態となり、定常状態がなくなってしまう。有限視野の場合は、若年期に貯蓄をすることになるが、金利が高い場合、若年期の貯蓄が急速に進み、やはり、予備的貯蓄や流動性制約が意味のないものとなるのである。

無限視野における収束を保証する条件は、所得過程の定式化にも依存しており、特定の所得過程に従う場合は、必ずしも、金利が時間選好率よりも低い必要はない。Carroll (1997) は、所得が恒常的変動と一時的変動の両方の変動を含む場合の、収束条件を導いている。

### 3 オイラー方程式に基づく予備的貯蓄の実証分析

(20) 式は、所得過程に関し厳しい仮定を課した上で成立しているものであり、より一般的な状況の下では、そのような綺麗な式を得ることはできない。そこで、CRRA 型効用関数にオイラー方程式、

$$\left( \frac{1+r}{1+\rho} \right) E_t \left[ \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\sigma} \right] = 1, \quad (25)$$

に戻り、二階のテイラー展開を行うと、

$$\Delta \ln(c_{t+1}) = \frac{1}{\sigma} (r - \rho) + \frac{1+\sigma}{2} E \left( \Delta \ln(c_{t+1})^2 \right) + v_t, \quad (26)$$

となる<sup>4</sup>。この式の推計は、Dynan (1993) を嚆矢とし、多くの推計が試みられている。なお、(26) 式は (20) 式と違い、右辺にテイラー展開の剰余項  $v_t$

<sup>4</sup>この式の導出の際、金利に不確実性はないと仮定していることに注意せよ。金利に不確実性がある場合、消費と金利の共分散項が生じる。

が存在することに注意する必要がある。この剰余項は対数消費に関する三次以上の高次式となっており、右辺第二項の消費分散項と相関を持ってしまう。したがって、この式を回帰分析で推計する際には、誤差項が説明変数と相関を持ってしまうため、操作変数が必要となる。Dynan (1993) は 1985 年のアメリカ合衆国における CEX のデータを用い、操作変数として教育歴、職業および産業等を用いている。第 3 章で紹介したように、CEX のインタビューサンプルでは、各家計に関し、四半期に一度、五回にわたり消費額を調査しており、家計毎に消費変化率の分散を求めることが可能となっている。第一項の金利と時間選好率の差に関しては、時間選好率を 0.05 で固定した上で、金利を全家計共通と仮定する場合（この場合は単なる定数項となる）、および家計毎の課税後金利収入を用い、家計間で金利が異なる二種類の推計を行っている。Dynan (1993) の推計結果によると、消費分散項の係数は非常に小さい値となり、有意とならない。また、スペシフィケーションによっては負の値となり、モデルと矛盾する結果となっている。このことから、Dynan は予備的貯蓄の重要性は確認されない、と結論づけている。

Kuehlwein (1991) は PSID で四年以上の観察値がある家計に限定し、まず線形のオイラー方程式を推計し、その予測値と実現値の乖離の分散を消費分散項とみなす二段階推計を試みた。その結果もまた、Dynan (1993) と同様に、分散項の係数が負となり、予備的貯蓄モデルと矛盾する結果となっている。Guiso, et al. (1992) はイタリアの家計パネルデータを用い、所得変化の分散と消費の関係を分析したが、所得変化の分散と消費変化率の間に正の有意な関係は確認できないとしている。

一方、Merrigan and Normandin (1996) はイギリスの FES を用い、予備的貯蓄モデルと整合的な結果を得ている。FES は家計パネルになっておらず、そのため、家計属性を用い、疑似的な家計毎の消費変化率を計算する必要がある。Merrigan and Normandin (1996) は、そのようなコホートパネルを用い、オイラー方程式 (26) 式を推計している。その結果、消費分散項の係数は正で有意となり、予備的貯蓄の存在を示すものになっている。日本ではオイラー方程式ベースの推定で、マイクロデータを用いた予備的貯蓄の研究は少ない<sup>5</sup>。Hori and Shimizutani (2006) は家計調査の個票データを用い Dynan (1993) に近い推定を行い、1995-1998 年のうち、1998 年以外は予備的貯蓄の重要性を確認できないと報告している<sup>6</sup>。

<sup>5</sup> マクロデータを用いたものは数多く存在する。代表的なものとしては、小川 (1991) や土居 (2001) が、家計貯蓄率が所得の不安定性に依存するか否かを検証している。小川 (1991) は所得リスクの増大は貯蓄を増加させるという結果を得ているが、土居 (2001) はその結果はサンプル期間に依存しておりロバストではなく、その代わりに有効求人倍率等の情報を用い、雇用リスクを利用することを提唱している。

<sup>6</sup> オイラー方程式から導かれる誘導形に基づく分析としては、Zhou (2003)、村田 (2003) 等がある。Zhou (2003) はモデルの誘導系を用い、消費と所得の分散の相関を用い勤労世帯の予備的貯蓄を計算し、資産の 6% 以下と推定している。村田 (2003) は家計経済研究所のパネルデータを用い、家計の将来不安のインデックスの金融資産との相関を調べ、将来不安の大きい家計ほど金融資産の保有割合が大きいことを明らかにしている。その他にも中川 (1999)、齋藤・白塚 (2003) 等がある。日本家計の高齢化と共に貯蓄動機への関心が高まっていることもあり、貯蓄



オイラー方程式の二次近似を用いた研究の結果は、予備的貯蓄の存在を肯定するものと否定するもの等、様々なものが報告されている。一方、オイラー方程式を用いずに、不確実性指標と貯蓄高の関係を用いた Carroll and Samwick (1997, 1998) は、不確実性指標と資産高の間に明確な正の相関があることを報告している。

予備的貯蓄の存在を検証する際に、オイラー方程式の二次近似式、(26)式を用いる多くの分析は、予備的貯蓄の存在を否定する結果を報告している。この理由として、Carroll (2001) および Ludvigson and Paxson (2001) はテイラー展開の二次項と残差に含まれている三次項の間に存在する相関がオイラー方程式の推計における障害になっていると指摘し、モンテカルロシミュレーションにより、実際に無視できないバイアスが生じることを示している。Dynan (1993) は、二次項と残差の間の相関に対処するために操作変数を用いているが、第一段階における決定係数は 0.1 を遥かに下回っており、操作変数として強力とは言えず、その推計に説得力があるとは言い難い。一方、Attanasio and Low (2004) は、オイラー方程式の近似として、三次はおろか、二次近似の必要もなく、一次の単純な対数線形近似で十分な精度に達するというモンテカルロシミュレーションの結果を報告している。Attanasio and Low (2004) は、彼らの結果が Carroll (2001) と正反対である理由を、両者のシミュレーション手法の違いに求めている。Carroll (2001) によるシミュレーションは、所得と消費のエルゴード性を利用し、消費変化とその分散の、クロスセクション方向の情報を利用した回帰分析を行っている一方、Attanasio and Low (2004) は同一家計の消費変化分散の情報を用いて推計している。はたして、両者の結果のどちらが、オイラー方程式のテイラー展開を用いた分析にとり適切かは、彼らの論文を比較して読んでも明らかではなく、今後も論争は続くものと思われる。

オイラー方程式の二次近似を用いる場合の第二の問題は、適切な消費データが存在しないことである。Dynan (1993) は CEX を用いているため、彼女が用いた消費分散は四半期単位で一年間に発生した変化のみを反映している。四半期の間に生じる消費変化分散は、予備的貯蓄モデルが捉えるべき最適消費決定の結果、というよりは、モデルが想定していないような一時的な支出、あるいは十分にコントロールできない季節性変動によるものである可能性が高い。また、Kuehlwein (1991) が用いた PSID は長期のデータであるが、その消費データは、食料支出に限定されており、家計消費全体に占める割合は少ない。また、PSID は家計に過去の支出を思い出してもらうことで作成されており、計測誤差が極めて大きく、得られた消費分散のほとんどが計測誤差によるものである可能性がある。消費を被説明変数として利用する場合は、計測誤差が他の変数と直交している限り、決定係数を引き下げるだけで、回帰係数にはバイアスを与えない。しかしながら、消費を説明変数として利用

---

率を様々なリスク指標に回帰する分析は増加傾向にある。

する場合は、特にその二乗を利用する場合は、消費データに含まれる計測誤差は極めて大きな下方バイアスを引き起こしかねない<sup>7</sup>。

予備的貯蓄の重要性を計測する際にオイラー方程式のテイラー展開を利用するアプローチは、非線形の動学問題を解く必要がないため、パネルデータと簡単な統計ソフトがあれば容易に実行可能である。しかしながら、誤差の少ない、そして長期にわたる消費データがPSIDやCEXに存在しないということは極めて深刻な問題であり、これまで非常に多くの分析がなされてきたにも関わらず、一致した結果は得られていない。予備的貯蓄分析が1990年以降、急速に発展した一つの理由は、動学最適化問題の数値解析が進み、オイラー方程式を推計せずに、構造パラメータの推計が可能になったことがある。

## 4 予備的貯蓄モデルの動的計画法による解法

予備的貯蓄は、第1章4節で紹介した単純な不確実性下のライフサイクルモデルでも発生するが、実際の分析でよく使用されるのは、Carroll (1996) による緩衝在庫モデル (Buffer Stock Saving Model) である。このモデルはCarroll本人によるMathematicaやMatlab Codeが公開されており、Gourinchas and Parker (2002) 等、多くの実証分析で応用されている。そのモデルの構造は極めてシンプルである。

$T$  期間 (無限期間であっても構わない) 生きる家計が、下記の最大化問題に直面していると仮定する。

$$\max E_t \sum_{s=0}^T \beta^{t-s} u(C_s), \quad (27)$$

s.t.

$$W_{t+1} = R[W_t + Y_t - C_t], \quad (28)$$

$$Y_t = P_t V_t, \quad (29)$$

$$P_t = G_t P_{t-1} N_t. \quad (30)$$

ここで、 $Y$  は現在所得、 $P$  は恒常所得、 $V$  は一次所得、 $G$  は恒常所得の中の成長要因、 $N$  は恒常ショックのシフト要因であり、金利は一定と仮定する<sup>8</sup>。(30) 式の両辺の対数をとると、

$$\ln P_t = \ln G_t + \ln P_{t-1} + \ln N_t. \quad (31)$$

となる。 $G_t$  は確率変数ではなく、年功賃金のように、その実現値が事前に分かっているものである。したがって、 $N_t$  が i.i.d. であれば、上の式は、対数

<sup>7</sup>消費データに含まれる計測誤差に関しては第10章で詳しく議論する。

<sup>8</sup>また、式としては明示しないが、No Ponzi Game Condition が課されている。

をとった恒常ショックがマルチンゲールであることを意味している。ここで、 $t$  期首の資産と所得の和、

$$X_t = W_t + Y_t, \quad (32)$$

を手元現金 (Cash on Hand)、と定義すると、

$$X_{t+1} = R[X_t - C_t] + Y_{t+1}, \quad (33)$$

となる。ベルマン方程式で定式化すると、 $t$  期首の状態変数は Cash on Hand と、恒常ショックの水準であり、

$$V_t(X_t, P_t) = \max_{C_t} \left\{ \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta E_t V_{t+1}(X_{t+1}, P_{t+1}) \right\}, \quad (34)$$

となる。 $X_t$  と  $P_t$  はどちらも連続の値をとる状態変数であり、このままでは 2 変数の状態変数を有する動的計画法を解かねばならない。しかしながら、各期の効用関数が CRRA であれば、Carroll Trick と呼ばれる下記の操作が可能である。各変数を恒常所得  $P_t$  で割ったものを小文字で定義する。すなわち、

$$c_t = C_t/P_t,$$

$$x_t = X_t/P_t,$$

とすると、消費のオイラー方程式を変形することが可能であり、

$$C_{t-1}^{-\sigma} = E_{t-1} [C_t^{-\sigma} R\beta], \quad (35)$$

$$1 = E_{t-1} [C_t^{-\sigma} C_{t-1}^{\sigma} R\beta] \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &= R\beta E_{t-1} \left[ \left( \frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{-\sigma} \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{\sigma} \right] \\ &= R\beta E_{t-1} \left[ \left( \frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{-\sigma} (G_t N_t)^{-\sigma} \right]. \\ c_{t-1}^{-\sigma} &= R\beta E_{t-1} [(c_t)^{-\sigma} (G_t N_t)^{-\sigma}] \end{aligned} \quad (37)$$

また、予算制約は、

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= X_{t+1}/P_{t+1} \\ &= R[X_t - C_t]/P_{t+1} + Y_{t+1}/P_{t+1} \\ &= R[x_t - c_t] P_t/P_{t+1} + P_{t+1}V_{t+1}/P_{t+1} \\ &= R[x_t - c_t] / (G_{t+1}N_{t+1}) + V_{t+1} \end{aligned} \quad (38)$$

と書くことができる。オリジナルのベルマン方程式は Cash on Hand と恒常ショックの二つを状態変数とするが、このような変換を行うことで、状態変

数を  $x$  の一つに減らすことが可能であり、最適消費水準を恒常ショックで基準化された Cash on Hand の関数として、 $c_t(x)$  と表わすことができる。

基準化されたベルマン方程式は下記のようになる。

$$v_t(x_t) = \max_{c_t} \left\{ \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta E_t \Lambda_{t+1}^{1-\sigma} v_{t+1}(x_{t+1}) \right\}, \quad (39)$$

$$\text{where} \quad \Lambda_{t+1} \equiv G_{t+1} N_{t+1}. \quad (40)$$

このとき、 $V_t = P_t^{1-\sigma} v_t$  とおくことにより、(34) と (39) は同じ Policy Function をもたらしことが Carroll (2006) により示されている。

この問題を数値的に解く手法としては様々なものがあるが、第 1 章で用いた Backward Induction に基づき、しかし、今回は価値関数ではなくオイラー方程式を用いる手法を以下で紹介する。

予算制約式を用いオイラー方程式を整理すると、

$$\begin{aligned} c_t^{-\sigma} &= R\beta E_t \left[ (c_{t+1})^{-\sigma} (G_{t+1} N_{t+1})^{-\sigma} \right] \\ &= R\beta E_t \left[ c_{t+1} (R[x_t - c_t] / (G_{t+1} N_{t+1}) + V_{t+1})^{-\sigma} (G_{t+1} N_{t+1})^{-\sigma} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

まず、最終期の  $T$  期では全ての Cash on Hand が消費に用いられるため、 $c_T(x_T) = x_T$  となる。したがって、

$$c_{T-1}^{-\sigma} = R\beta E_{T-1} \left[ (R[x_{T-1} - c_{T-1}] / (G_T N_T) + V_T)^{-\sigma} (G_T N_T)^{-\sigma} \right] \quad (42)$$

次に、 $x_{T-1}$  をグリッドに分割し、各グリッドに対し、(42) の右辺を計算する。その際、確率変数  $V_T$  と  $N_T$  および時間の関数である  $G_T$  の影響を考え、期待値を計算する必要がある。そこで、一時的所得ショックおよび恒常的所得ショックに関する確率過程として、

$$\begin{aligned} V &= 0 \quad \text{with Probability } p = 0.005, \\ &= Z \quad \text{with Probability } 1 - p. \end{aligned}$$

$$\ln Z \sim TN(\mu_Z, \sigma_{\ln Z}^2) : \text{Normal Truncated at } \pm 3\sigma_{\ln Z} + \mu_Z.$$

$$\ln N \sim TN(\mu_N, \sigma_{\ln N}^2) : \text{Normal Truncated at } \pm 3\sigma_{\ln N} + \mu_N.$$

$$E_t N_{t+1} = E_t V_{t+1} = 1.$$

と仮定する。一時的所得ショックにより、今期の所得がゼロになる確率が年に 0.5% あると仮定されているが、わずかの確率であっても、全ての期の所得がゼロになる可能性があるため、No Ponzi Game Condition より、家計は一切の借入れが不可能になる。すなわち、明示的に流動性制約を導入しなくと

も、負債を発行する家計、あるいは資産がゼロとなる家計は発生しなくなってしまう。ゼロ所得の可能性が与える影響は大きく、各期効用関数の三回微分と無関係に、全家計に予備的貯蓄を持たせることになるのである。実際の経済において所得がゼロになることは、社会保障等の様々な移転支出があるため考えにくい、生きていくには最低限度の支出が必要であることを考えると、効用関数の生存レベル近辺の所得水準に低下する可能性は、それほど非現実的なものではないであろう。この場合は、Natural Debt Limit がゼロ以上となり、予備的貯蓄が全家計で発生する。以上の準備の下で、(42) 式の右辺を計算し、左辺と右辺の両方に含まれる  $c_t$  を得ることができる。この作業を  $x_{T-1}$  の各グリッドに行くと、各グリッドに対し最適な消費水準  $c_{T-1}$  を求めることが可能になる。

第二に、グリッドは離散で取られているが、状態変数である Cash on Hand は連続の値をとるものであるため、各グリッドにおける消費と Cash on Hand の対応の点を、Cubic Spline でつなげ、連続関数として  $c_{T-1}(x_{T-1})$  を得る。同じ作業を繰り返していけば、初期の  $t = 1$  まで遡ることが可能である。

上記の手法はオイラー方程式を用いたバックワードによる解法でありアルゴリズムとしては単純である。しかしながら、各期の各グリッドに対し、(41) 式を数値的に解かねばならず、時間がかかるという欠点がある。例えば、(42) をみると、 $c_{T-1}$  が左右両辺に登場するので、期待値操作、すなわち積分を含む複雑な非線形方程式を各グリッドで計算する必要が生じる。グリッドの数を増やし精度を上げると、この非線形解法の計算負荷は非常に大きくなってしまふ。この点を改善したアルゴリズムとして、Carroll (2006) による Endogenous Gridpoints Solution Method と呼ばれるものがある。

#### 4.1 Endogeneous Gridpoints Solution Method

Endogeneous Gridpoints 手法では  $x_{T-1}$  の代わりに、 $T - 1$  期の期末資産  $w_{T-1} (= W_{T-1}/P_{T-1})$  についてグリッドをとる<sup>9</sup>。期末資産は、手元現金の中で、消費されなかった部分である。すなわち、

$$\begin{aligned} W_{T-1} &= X_{T-1} - C_{T-1}, \\ w_{T-1} &= x_{T-1} - c. \end{aligned}$$

すると、 $c_t$  と  $c_{T-1}$  を (41) と (42) から消去することが可能であり、

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= R\beta E_t \left[ c_{t+1} (R[w_t] / (G_{t+1}N_{t+1}) + V_{t+1})^{-\gamma} (G_{t+1}N_{t+1})^{-\gamma} \right], \\ c_{T-1}^{-\gamma} &= R\beta E_{T-1} \left[ (R[w_{T-1}] / (G_T N_T) + V_T)^{-\gamma} (G_T N_T)^{-\gamma} \right]. \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Endogenous grid method have been applied in many applied research. See Barillas and Fernandez-Villaverde (2007) and Hintermaier and Winfried (2010) for more discussion on the endogenous grid method.

$t$  期においてこの方程式を解く時には、後ろ向きの帰納法により  $t+1$  期における Policy Function  $c_{t+1}(x_{t+1})$  は既知である。したがって、上記の二式を計算する際には (36) と (42) に関して、非線形方程式を解く必要はなくなっている。

各  $w_{T-1}^i$  に対応する  $c_{T-1}^i$  を求めた次に、消費と手許現金の関係を求める必要がある。しかし、定義から、手許現金は、期末資産と消費の和、すなわち、

$$x_{T-1}^i = w_{T-1}^i + c_{T-1}^i,$$

で得ることができる。ここから、容易に、policy function,  $c_{T-1}(x_{T-1})$  を得ることが可能になる。Endogenous Gridpoints Solution Method の効果は非常に大きく、計算にはほとんど時間がかからない。本節で議論したモデルは、下記のようにまとめることができる。

$$V_t(X_t, P_t) = \max_{C_t} \left\{ \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta E_t V_{t+1}(X_{t+1}, P_{t+1}) \right\}, \quad (43)$$

$$s.t. \quad X_{t+1} = R[X_t - C_t] + Y_{t+1},$$

$$W_t = X_t - C_t,$$

$$Y_t = P_t V_t,$$

$$P_t = G_t P_{t-1} N_t$$

$$P_t = G_t P_{t-1} N_t.$$

## 4.2 数値例

数値解を求める際の構造パラメーターとして、 $\sigma = 2, r = 0.04, \beta = 0.96, \sigma_{\ln Z} = \sigma_{\ln N} = 0.1, g = 0.02$  と設定する。なお、 $\mu_z$  と  $\mu_N$  は  $E_t V_{t+1} = E_t N_{t+1} = 1$  となるような値として決定される。ここで、金利と時間選好率が同じ値としたのは、不確実性のないケースと比較するためであり、所得過程が i.i.d. でないため、このケースでは予備的貯蓄モデルは無限期間でも収束することが Carroll (1997) により示されている。

図 1 は消費関数 (Policy Function) の形状と、年齢の関係を表している。最終期では、持っている Cash on Hand の全てを消費するため、45 度線が消費関数となる。その一期前 ( $T=1$ ) では、45 度線に近いが、消費関数はその下にあり、資産の一部を来期のために残していることがわかる。2 期前ではかなりの屈折が発生し、資産が増えても消費量はそれほど増加しないことがわかる。このカーブは 10 期間くらいでほぼ収束する。50 期前は、事実上、無限視野の場合と同じカーブとなる。この、消費関数の凹性は、予備的貯蓄モデルの特徴である。

図 2 は、消費関数の収束先と、不確実性がない場合の消費関数をそれぞれ、

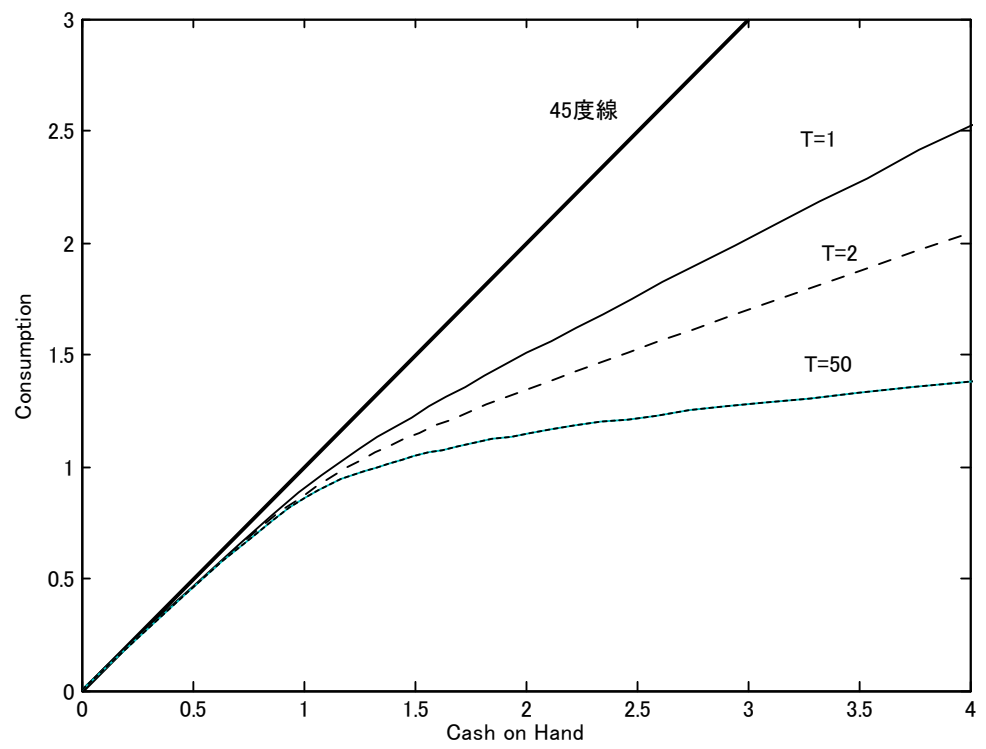


図 1: 図 1 緩衝在庫モデルにおける Policy Function の形状

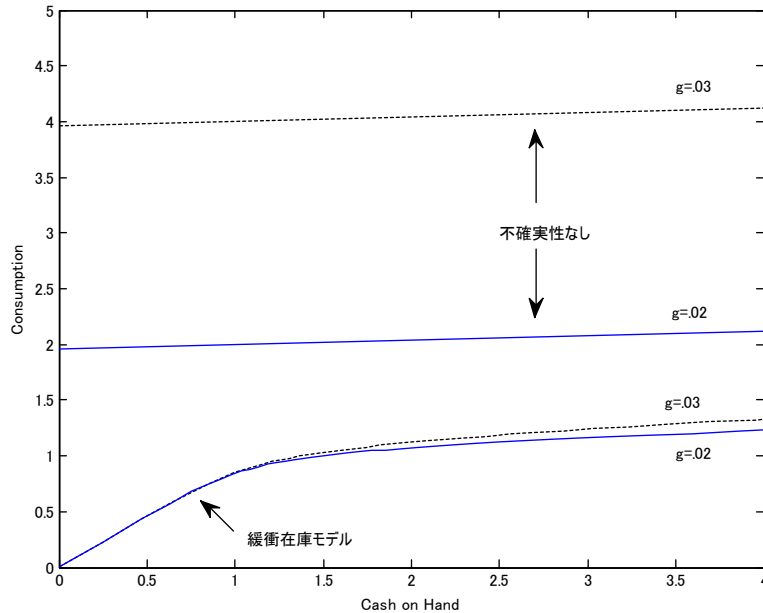


図 2: 図 2 確実性等価モデルとの比較

所得成長率が 2% と 3% の下で描いたものである<sup>10</sup>。不確実性のない場合の消費は Hall (1978) のケースとほぼ同じになり、消費水準は恒常所得とほぼ一致し、資産が増加すると、それに応じてわずかに消費水準が増加する。したがって、不確実性のない場合の消費関数はほぼ横軸に平行の直線となる。また、所得成長率が増加すると、恒常所得が増加するため、消費の水準は大幅に増加する。一方、予備的貯蓄モデルの場合は、所得成長率が増加しても、消費の水準そのものはほとんど増加しない。将来の所得増加が見込まれる場合でも、その所得の実現は不確実であるため、借金をし消費を増加させても、その借金を返済できない可能性がある。そのため、たとえ将来高い所得成長が期待されていても、現在の消費水準を高めないのである。

Carroll (1997) による予備的貯蓄モデルが緩衝在庫モデル (Buffer Stock Model) と呼ばれる理由は、図 3 から知ることが出来る。

図 3 は、縦軸に消費変化率、横軸に Cash on Hand をとったものである。 $\phi(x)$  が消費成長率である。水平線  $\sigma^{-1}(r - \delta)$  は、通常の、不確実性のない場合の消費変化率であり、 $\delta$  は時間選好率である。通常のオイラー方程式には Cash on Hand が出てこないため、消費変化率は Cash on Hand に依存せず、金利と時間選好率の差に比例する。しかしながら、予備的貯蓄モデルに

<sup>10</sup>Carroll (1997) の Figure III を再現している。



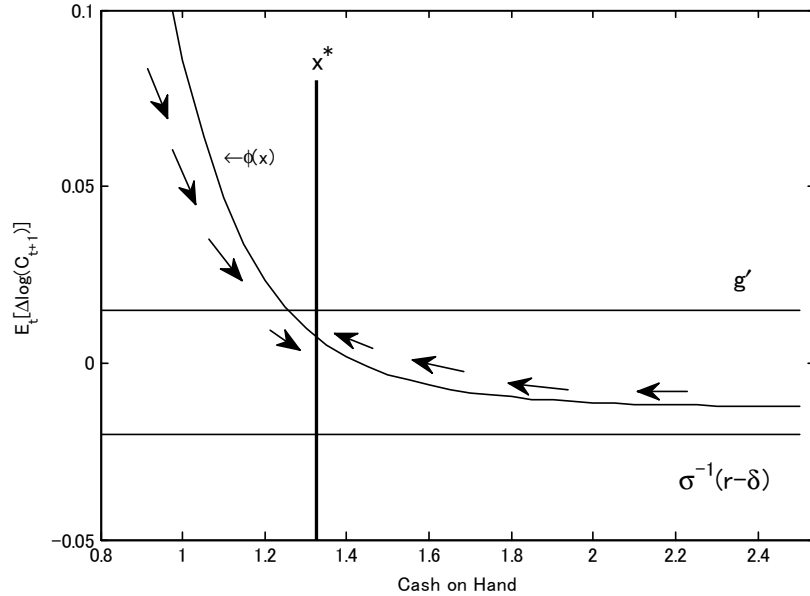


図 3: 図 3 緩衝在庫モデルにおける位相図

において、もしも Cash on Hand の水準が低い場合、家計は現在の消費水準を低くし、資産の蓄積を行う。資産蓄積には最適水準があり、

$$E_t x_{t+1} = x_t,$$

を満たす水準  $x^*$  が、目標資産水準 (Target Wealth)、として定義される。Cash on Hand が  $x^*$  よりも多ければ資産を減らし、それよりも小さければ資産の蓄積を行う。すなわち、 $x^*$  よりも左側では資産は増加し、右側では資産は減少する。また、目標資産額の下では、消費の変化率はほぼ  $g'$ 、すなわち所得の成長率に一致する<sup>11</sup>。貯蓄率は現在の Cash on Hand が Target Level からどれだけ離れているかにより決まっており、その Target Level の資産こそ、不確実性に対処するための緩衝 (Buffer) となっているのである。貯蓄が行われるのは不確実性に対処するためであり、十分な蓄積が進めば、所得の実現値が低くても消費は増加する。貯蓄率という概念は意味のないものとなっている。消費変化率が金利と時間選好率の差ではなく、現在の Cash on Hand に決定的に依存する、というこの理論モデルの予測は、非常に強い実証的インプリケーションを有する。緩衝在庫モデルに従うと、資産蓄積が十分に進めば、消費変化率は所得変化率とほぼ一致することになる。すなわち、消費経路と所得成長経路とほぼ平行になることを意味する。

<sup>11</sup> 正確な値に関しては Carroll (1997) を参照せよ。

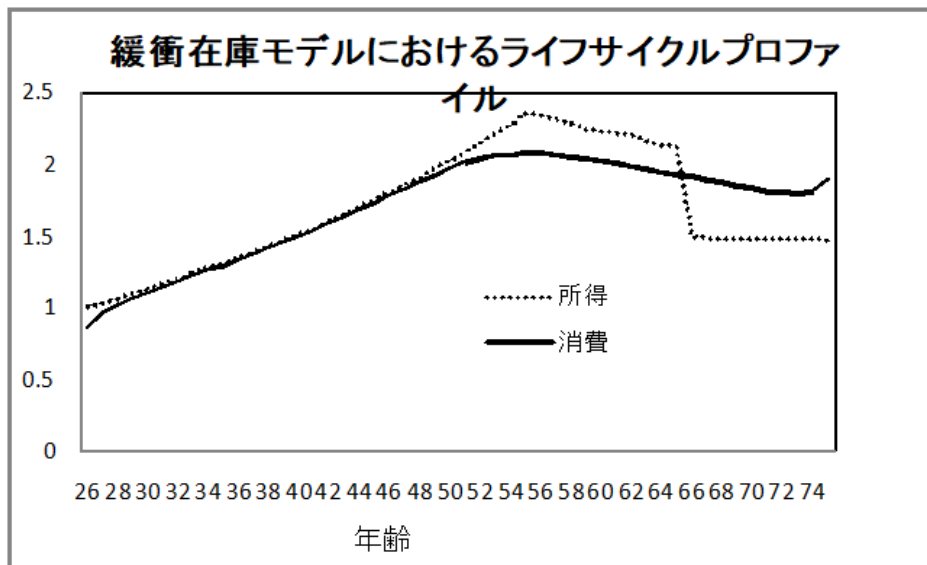


図4は、Carroll (1997)と同様に、アメリカの経営者の所得経路を所与とし、その所得経路の下で、予備的貯蓄モデルにおける消費・年齢プロファイルを描いたものである。まず、人生の初期において、消費は所得よりも低く、資産蓄積を行っている。その資産蓄積は、目標資産額に達するまで続くが、その期間はわずか数年であり、50歳くらいまで消費はほぼ所得と並行して増加していく。50歳を過ぎると、消費は所得よりも少ない額となり、人生の残りの期間の消費水準を平滑化させるように動いていく。すなわち、50歳くらいまでの消費決定行動は、資産額を Target Level に留めるように、平均的には所得額をそのまま消費しており、50歳を過ぎて、引退後の消費を考慮した消費・資産蓄積が始まる、すなわち、ライフサイクル動機による貯蓄が行われるのである。Friedman (1957) や Hall (1978) 等の恒常所得仮説では、消費水準は恒常所得に依存して決まり、現在の所得水準に直接依存しないが、予備的貯蓄モデルでは、目標資産額の蓄積を達成した段階で、消費と所得はほぼ平行に動くようになり、消費は恒常所得水準と一致しなくなるのである。これは、前章で議論した消費の過剰反応が、予備的貯蓄モデルではパズルではないことを意味する。

Carroll (1997) による予備的貯蓄・緩衝在庫モデルは、そのモデルの単純さにかかわらず、緩衝在庫水準への回帰や、所得と消費のライフサイクルプロファイルが若年期においてほぼ一致するなど、モデルが生み出す消費の挙動が標準的な恒常所得モデルと大きく乖離しており、より現実に近いものになる。そのため、現在の予備的貯蓄モデルにおける標準となっている、一方、批判が多いのもまた事実である。緩衝在庫モデルに基づき、構造パラメータを推計した研究に Gourinchas and Parker (2001,2002)、批判する立場の研究

では Attanasio (1999) がある。

## 5 Further Topics

After Carroll's seminal work, endogenous grid methods combined with backward induction have been extended and applied to many fields, including labor supply (Barillas, Francisco & Fernandez-Villaverde, Jesus, (2007) "A generalization of the endogenous grid method," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, vol. 31(8), pages 2698-2712, August.), (2) aggregate shock and change in wealth distribution in incomplete capital market (Reiter, Michael, (2009) "Solving heterogeneous-agent models by projection and perturbation," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, vol. 33(3), pages 649-665, March.).

## 6 Matlab Code of Endogeneous Grid Method

The following matlab program solves the standard buffer stock saving model based on parameters calibrated for Japanese young households. To implement the code, we need two additional codes, (1) compecon tool box (by Miranda and Fackler, available in there web-site) and (2) spline\_linear\_val.m (under the GNU LPGL Lincense). See my paper in Keizaikenkyu in 2013 for the detail of calibration.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% A simple buffer stock saving model
%
% Solving a finite time model by backward induction
%  $u = (c^{1-\gamma}) / (1-\gamma)$ 
%  $x(t+1) = R(x(t) - c(t)) / (G(t+1) * N(t+1)) + V(t+1)$ 
%
% Needs (1) Compecon toolbox for quadrature, and
% (2) spline_linear_val.m for piecewise linear spline
%
% May, 2017
% Naohito Abe
%
clear all
tic
%
```

```

%% Set Parameter Values
alpha=0.1;
gamma=3; % risk aversion
Beta=0.90; % Discount Factor
maxage=70; % the maximum age after age 20 (maxage + 20 =year)
retire_age=40; % Retirement at age 60
gridpoint=100; % the number of spline grid for cash on hands, COH.
Rate=1.02; % The rate of return on non risk assets
%% Deterministic Wage Schedules
agelist=linspace(20,90,71);
% Taken from 平成 23 年版厚生労働白書図 3-3-14
Dataforwage=[
20    1199.40    ;
25    1417.00    ;
30    1646.70    ;
35    1877.60    ;
40    2132.70    ;
45    2313.90    ;
50    2355.20    ;
55    2251.50    ;
60    1723.40    ;
65 1723.40/2    ;
70 1723.40/2    ;
75 1723.40/2    ;
80 1723.40/2    ;
85 1723.40/2    ;
90 1723.40/2    ];
% Use cubic spline to interpolate the wage-age profile
gspline=spline( Dataforwage(:,1), Dataforwage(:,2));
Growth1=ppval(gspline,agelist);
%
for i=1:70
    Growth1(i)=spline_linear_val(length( Dataforwage(:,1)), Dataforwage(:,1)
, Dataforwage(:,2) ,agelist(i));
end
Growth=ones(70,1);
% Growth Rate
for i=2:70
    Growth(i-1)=Growth1(i)/Growth1(i-1);

```

```

end
%% Permanent and Transitory Shock
% Permanent Shock
numgridforinteg = 10; % the number for integration
pvariance=0.023; % from 21 世紀縦断調査 (阿部 (2013))
pnun=numgridforinteg; % number of cdf points for integration
% transitory shock
tvvariance=0.0116;% from 21 世紀縦断調査 (阿部 (2013))
tnum=numgridforinteg; % number of cdf points for integration
%% For Integration (CDF Points)
minshock=0.00000001;
maxshock=2;
[xpoint,weightquad]=qnwlege(tnum,minshock,maxshock);% quadrature point
and weight
meantshock=sum(weightquad(:).*xpoint(:).*lognpdf(xpoint(:),0,sqrt(tvvariance)));
meanpshock=sum(weightquad(:).*xpoint(:).*lognpdf(xpoint(:),0,sqrt(pvariance)));
%
%% Euler Equation at the Last Period %%%%%%%%%%
%  $c(T-1)^{-\gamma} = E[RB ( R(aGNV)^{-\gamma} ) (GN)^{-\gamma}]$ 
% Note  $cT=xT$ ,  $aT=0$ 
% Given grid of  $a(T-1)$ , obtaining the RHS by integration.
% using  $\exp(\exp(\log(\log)))$  gives more grids for smaller values (near zero)
% than  $\text{endperiasse}=(\text{linspace}(0.001, 500, \text{gridpoint}))$ 
endperiasse= exp(exp(linspace(0,log(log(50+1))+1),gridpoint))-1-1;
endperiasse= endperiasse';
forsum=zeros(gridpoint,1);
COH=zeros(gridpoint,1);
prevcons=zeros(gridpoint,1);
for i=1:gridpoint
COH(i)=(Rate*endperiasse(i)/(Growth(maxage)) )+1;
forsum(i)=(COH(i))^{(-gamma)};
prevcons(i)= (Rate*Beta*forsum(i))^{(-1/gamma)};
end
%% Backward Induction
COHtable=zeros(gridpoint,maxage);
prevconstable =zeros(gridpoint,maxage);
COHtable(:,maxage)=COH;
prevconstable(:,maxage)=COH;
%% Current Cash on Hands

```

```

COH=endperiasset+prevcons;
%% Policy Function at one period before the last
consumptionfull=zeros(gridpoint,1);
% Linear Spline is doing good job than cubic when extraporating
for i=1:gridpoint
consumptionfull(i) = spline_linear_val(length(COH(:,1)),COH(:,1), prev-
vcons(:,1) ,COH(i));
end
COHtable(:,maxage-1)=COH;
prevconstable(:,maxage-1)=prevcons;
for t=2:maxage-1
invretire=maxage-retire_age;
forsumF=zeros(gridpoint,1);
forsum1=zeros(gridpoint,1);
prevcons1=zeros(gridpoint, 1);
if t<=invretire %after retireme
for i=1:gridpoint
xifull=(Rate*endperiasset(i)/(Growth(maxage-t+1)))+1;
cifull=spline_linear_val(length(COH(:,1)),COH(:,1), prevcons(:,1),xifull);
cifull=min(cifull,xifull);
forsum(i)=((cifull)^(-gamma)) *((Growth(maxage-t+1))^(-gamma));
prevcons1(i)= (Rate*Beta*forsum(i))^(-1/gamma);
prevcons1(i)=max(prevcons1(i),0);
end
% update
for i=1:gridpoint
prevcons(i)= prevcons1(i);
end
COH=endperiasset+prevcons;
COHtable(:,maxage-t)=COH;
prevconstable(:,maxage-t)= prevcons;
end
if t>invretire %before the retirnent
%xpoint,weightquad;
% expected marginal utility
for i=1:gridpoint
forsumF(i)=0;
for j=1:pnum
for l=1: tnum

```

```

% transform at to xt, and ct
xifull=((Rate*endperiassest(i)/(Growth(maxage-t+1)*xpoint(j)))+xpoint(1));
cifull= spline_linear_val(length(COH(:,1)),COH(:,1), prevcons(:,1) ,xifull);
cifull=min(cifull,xifull);
forsumfullmid=weightquad(1)*weightquad(j)*((cifull)^(-gamma)) *((Growth(maxage-
t+1)*xpoint(j))^(-gamma))*lognpdf(xpoint(j),0,sqrt(pvariance))*lognpdf(xpoint(1),0,sqrt(tvariance));
forsumF(i)=forsumfullmid+forsumF(i);
end
end
%consumption for each grid
forsum1(i)=forsumF(i);
prevcons1(i)= (Rate*Beta*forsum1(i)) ^(-1/gamma);
prevcons1(i)=max(prevcons1(i),0);
end
% update
for i=1:gridpoint
prevcons(i)= prevcons1(i);
end
COH=endperiassest+prevcons;
prevconstable(:,maxage-t)= prevcons;
COHtable(:,maxage-t)=COH;
end
end
%% Plotting the policy function
gridforplot=(linspace(0,2, 200))';
consumption_plot=zeros(200, maxage);
%
for t=0:maxage-1
for i=1:200
consumption_plot(i,maxage-t)=spline_linear_val(length(COHtable(:,maxage-
t)), COHtable(:,maxage-t),prevconstable(:,maxage-t) ,gridforplot(i));
consumption_plot(i,maxage-t)=min(consumption_plot(i,maxage-t),gridforplot(i));
end
end
figure
plot( gridforplot, consumption_plot(:,1),'k', 'LineWidth',1 );
hold on
plot( gridforplot, consumption_plot(:,30),'kx', 'LineWidth',1 );
plot( gridforplot, consumption_plot(:,60),'o', 'LineWidth',1 );

```

```

title('Consumption');xlabel('Cash on Hand');
hold off
%% Life Cycle Simulation %%%%%%%%%%%
%
simnum=5000;% the number of households
sigma=0.1;% standard deviation of the initial wealth distribution
%mhmu =0;% mean of the initial wealth distribution
mhmu =1;% mean of the initial wealth distribution
cons_sim=zeros(simnum, maxage);% Simulated Consumption Path
wealth1=zeros(simnum,1);% Simulated Wealth Path
iniwealth=zeros(simnum,1);% Create the initial distribution of the wealth
for i=1:simnum
iniwealth(i)=lognrnd(mhmu, sigma);
end
% setting very small initial wealth level
iniwealth=0.001*ones(simnum,1);
consumption=zeros(simnum, maxage);
currentincome=zeros(simnum,maxage);
currentincome2=zeros(simnum,maxage);
endofasset=zeros(simnum, maxage);
Perm=zeros(simnum,1);
Perm1=zeros(simnum,1);
gappershock=1/meanpshock;
gaptshock=1/meantshock;
for i=1:simnum
wealth1(i)=iniwealth(i);% initial wealth
Perm(i)=1;
t=1;
permshock=lognrnd(0,sqrt(pvariance))*gappershock;
tempshock=lognrnd(0,sqrt(tvariance))*gaptshock;
Perm1(i)=Perm(i)*Growth(t)*permshock;
xtilda=Rate*wealth1(i)*(1/(Growth(t)*permshock))+tempshock;
cons=spline_linear_val(length(COHtable(:,t)), COHtable(:,t),prevconstable(:,t)
,xtilda);
cons=min(cons, xtilda);
capx=xtilda*Perm1(i);
capcons=cons*Perm1(i);
income=xtilda*Perm1(i)- Rate*wealth1(i)*Perm(i)+(Rate-1)*wealth1(i)*Perm(i);
%update

```



```

Perm(i)=Perm1(i);
wealth1(i)=xtilda-cons;
consumption(i,t)=capcons;
currentincome(i,t)=income;
endofasset(i,t)=wealth1(i)*Perm(i);
for t=2:maxage
if t<=retire_age
permshock=lognrnd(0,sqrt(pvariance))*gappershock;
tempshock=lognrnd(0,sqrt(tvariance))*gaptshock;
Perm1(i)=Perm(i)*Growth(t)*permshock;
xtilda=Rate*wealth1(i)/(Growth(t)*permshock)+1*tempshock;
cons=spline_linear_val(length(COHtable(:,t)), COHtable(:,t),prevconstable(:,t)
,xtilda);
cons=min(cons, xtilda);
capx=xtilda*Perm1(i);
capcons=cons*Perm1(i);
income=xtilda*Perm1(i)- Rate*wealth1(i)*Perm(i)+(Rate-1)*wealth1(i)*Perm(i);
Perm(i)=Perm1(i);
wealth1(i)=xtilda-cons;
consumption(i,t)=capcons;
currentincome(i,t)=income;
endofasset(i,t)=wealth1(i)*Perm(i);
end
if t>retire_age
Perm1(i)=Perm(i)*Growth(t);
xtilda=Rate*wealth1(i)/Growth(t)+1;
cons=spline_linear_val(length(COHtable(:,t)), COHtable(:,t),prevconstable(:,t)
,xtilda);
cons=min(cons, xtilda);
capx=xtilda*Perm1(i);
capcons=cons*Perm1(i);
income=xtilda*Perm1(i)- Rate*wealth1(i)*Perm(i)+(Rate-1)*wealth1(i)*Perm(i);
Perm(i)=Perm1(i);
wealth1(i)=xtilda-cons;
consumption(i,t)=capcons;
currentincome(i,t)=income;
endofasset(i,t)=wealth1(i)*Perm(i);
end
end
end

```

```

end
%% Plotting the life cycle profiles
consumption_life=zeros(maxage, 1);
income_life=zeros(maxage, 1);
wealth_life=zeros(maxage, 1);
for t=1:maxage
consumption_life(t)=mean(consumption(:,t));
income_life(t)=mean(currentincome(:,t));
wealth_life(t)=mean(endofasset(:,t));
end
figure
plot(consumption_life,'k');
hold on
plot(income_life,'kx');
plot(wealth_life,'ko');
legend('Consumption ', 'Income', 2, 'Asset', 3);
toc

```