家計消費の経済分析

(8)　動的計画法と数値解法

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 30 年 10 月 16 日

1　確実性下の最大化問題

家計は T 期間存在し、T 期末に死亡すると仮定する。単純化のため、時間選好率および金利は共にゼロと仮定し、その代わりに毎期変動する所得 Y_t を得る、と仮定しよう。さらに、所得は変動するが、その値は事前にわかっている、すなわち、不確実性は存在しないと仮定する。効用関数は異時点間で分離可能であり、各期の効用関数を $u\left(c_t\right), u' > 0, u'' < 0$ とする。初期における資産額を A_0 とし、家計は自由に借り入れ、貯金が可能であると仮定する。すると、この家計の効用関数と予算制約は下記のように書くことができる。

$$U = \sum_{t=1}^{T} u\left(c_t\right), u' > 0, u'' < 0, \tag{1}$$

$$\sum_{t=1}^{T} c_t \leq A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t. \tag{2}$$

この動学最適化問題の解をラグランジュアンを用いて解くと、ラグランジュアンは

$$L = \sum_{t=1}^{T} u\left(c_t\right) + \lambda\left(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t - \sum_{t=1}^{T} c_t\right), \tag{3}$$

であり、一階条件は

$$u'\left(c_t\right) = \lambda. \tag{4}$$

すなわち、すべての期において、消費の限界効用は一定になる。限界効用は単調減少関数であるから、消費水準も一定となり、

$$c_t = \overline{c} \text{ for all t.} \tag{5}$$

予算制約に代入すると

$$c_t = \frac{1}{T}\left(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t\right). \tag{6}$$

すなわち、生涯所得と初期資産を各期に均等に配分することになる。上式の右辺は恒常所得と呼ばれるものであり、生涯所得の平均値と、初期時点で保有している資産を生存期間に均等に分割したものの和である。ここで重要な性質は、「家計消費は、所得の当期の実現値には依存しないこと」である。たとえば、若年期にほとんど所得がなく、後になってようやく所得が得られる場合、若年期には借金をし、将来の所得で借金を返済することになる。

1.1 不確実性下の最大化問題

次に、もう少し一般化させ、正の割引率を導入し、家計は無限に存在し、所得に不確実性が存在し、Y_t が確率変数であると仮定しよう。家計が期待効用を最大化させるとし、β を $0 < \beta < 1$ を満たす時間割引とすると、家計の効用最大化問題は下記のようになる。

$$\max\ E[U] = E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \beta^t u\left(c_t\right) \right]. \tag{7}$$

家計は、各期に下記のような予算制約に直面しているとする。ただし、金利は r で一定であるとるする。

$$\text{s.t.} \quad A_{t+1} \leq \left(1+r\right) A_t + Y_t - c_t. \tag{8}$$

なお、資産の値 A_t は正の値を取る場合は貯蓄、負の値を取る場合は負債となる。もしも、最終期の t 期末において、負債を抱えることを許容する、すなわち借金を残したまま死ぬことを許容すると、無限に借金をして大量の消費を行い、負債の返済を行わずに死ぬことが最適となってしまう。そのような行動を除外するため、追加として、No Ponzi Game Condition と呼ばれる下記の条件を課す。

$$A_T \geq 0. \tag{9}$$

この家計の効用最大化問題を解く際には、ラグランジュアンを下記のように設定する。

$$L = E_0 \left[\sum_{t=1}^{T} \beta^t u\left(c_t\right) + \sum_{t=1}^{T} \beta^t \lambda_t \left(\left(1+r\right) A_t + Y_t - c_t - A_{t+1} \right) \right] \tag{10}$$

λ_t はラグランジュ乗数であり、各期の所得の実現値により変化する確率変数となっている。この最適化問題の一階条件は、消費に関して微分すると、

$$u'\left(c_t\right) = \lambda_t, \tag{11}$$

を得、また資産に関して微分すると、

$$E_t \beta \left(1+r\right) \left[\lambda_{t+1}\right] = \lambda_t, \tag{12}$$

すなわち、

$$E_t \beta (1+r) [u' (c_{t+1})] = u' (c_t), \tag{13}$$

となる。(13) は消費に関するオイラー方程式と呼ばれるものであり、家計消費分析において最も重要な方程式の一つである。この意味は、不確実性を無視し、下記のような $\neq$ 方程式を考えると明らかである。

$$\frac{u' (c_t)}{\beta u' (c_{t+1})} = (1+r). \tag{14}$$

今期の消費一単位を諦めることによる効用の減少分は $u' (c_t)$ である。この一単位の消費を諦めることにより、来期において、一単位の消費に金利が加わり、$1+r$ 単位の消費が可能になる。すなわち、$1+r$ は今期と来期の消費の価格比となる。効用が最大化されるのは、二財の限界代替率が価格比に等しい時であり、来期の一単位の消費が増加する時の限界効用は $\beta u' (c_{t+1})$ であるから、上式は、今期と来期の限界代替率が価格比に等しいことを示している。

各時点の効用関数が CRRA であるとき、オイラー方程式は下記のようになる。

$$E_t \left[\beta \left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\sigma} \right] = \frac{1}{(1+r)}. \tag{15}$$

不確実性を無視して、上の式を対数線形近似して整理すると、

$$\begin{aligned} \ln c_{t+1} - \ln c_t &= \frac{1}{\sigma} [\ln (1+r) + \ln \beta], \\ &\simeq \frac{1}{\sigma} (r - \rho). \end{aligned} \tag{16}$$

ただし、$\beta = 1/(1+\rho)$ である。ここで、$T = \infty$ とし、無限視野の問題を考えてみよう。$r = \rho$ のとき、$\ln c_{t+1} = \ln c_t$ となり、消費は常に一定値をとり、定常状態となる。$r < (<) \rho$ のとき、消費水準は時間と共に増加 (減少していく。このときの変化速度は、σ の逆数に比例する。既にみたように、σ は異時点間の代替の弾力性の逆数であり、σ が大きいほど、異時点間の代替の弾力性は小さくなっている。異時点間の代替の弾力性が小さい時、消費は金利にあまり反応せず、ほぼ一定の値を取り続けることになるが、これは、消費の平滑化 (Consumption Smoothing) と呼ばれ、消費の動学分析のみならず、現代のマクロ動学モデルにおける根幹の動学メカニズムの一つである。σ が大きいほど、消費の平滑化の強度は大きくなる。逆に、σ を小さくすると、わずかの金利の変化に対し大幅に消費水準が変化することになる。σ をゼロに近づけると異時点間の代替の弾力性は無限大となり、消費平滑化が消滅する。このときの各期の効用関数は線形となり、限界効用が逓減しない関数形となっている。

1.2 動的計画法 (Dynamic Programming)

1.2.1 導入

家計消費分析で登場する下記の動学最適化問題、

$$\max\ E_0\left[\sum_{t=1}^{T}\beta^t u\left(c_t\right)\right].,\tag{17}$$

$$\text{s.t.}\quad A_{t+1}\leq\left(1+r\right)A_t+Y_t-c_t\quad\text{for all t.}\tag{18}$$

の解法は、ラグランジュアンを使わずに、動的計画法 (Dynamic Programming, DP) を用いて解くことも可能である。今、所得 Y_t が下記のような一階の自己回帰モデル (AR1) に従っていると仮定しよう[1]。

$$Y_{t+1}=\rho Y_t+\varepsilon_{t+1},\quad 0<\rho<1.\tag{19}$$

ただし、ε_{t+1} は系列相関のない確率変数であり、t 期における期待値はゼロであり、正規分布に従うと仮定する。すると、この家計は、T 期首に、前期までの蓄積の結果である資産 $\left(1+r\right)A_t$ と今期の所得 Y_t の実現値を観察してから今期の消費額 c_t を決めることになる。今、この家計の最終期における意思決定を考えてみよう。最終期である T 期では、この家計は来期の $T+1$ 期には存在しないので、来期のために資産を残す必要がない。したがって、この家計の最適な消費量は、その時点で保有する全資産と所得を消費に振り分けることになる。すなわち、

$$c_T=\left(1+r\right)A_T+Y_T.\tag{20}$$

次に、その 1 期前、$T-1$ 期における家計が直面する問題を考えよう。$T-1$ 期において、家計は $\left(1+r\right)A_{T-1}$ の資産と Y_{T-1} の所得を得ている。そこで、c_{T-1} の消費を行うと、来期には、

$$A_T=\left(\left(1+r\right)A_{T-1}+Y_{T-1}-c_{T-1}\right),\tag{21}$$

の資産が残る。家計は来期と今期の効用の現在割引価値の和の期待値を最大化するから、

$$\max_{c_{T-1}}\ \left[u\left(c_{T-1}\right)+E_{T-1}\beta u\left(\left(\left(1+r\right)A_{T-1}+Y_{T-1}-c_{T-1}\right)\left(1+r\right)+Y_T\right)\right],\tag{22}$$

を最大化することになる。上の最大化問題は、金利が外生で一定であることを考慮すると、A_{T-1} と Y_{T-1} を所与として、最適な消費水準 c_{T-1} を選んで

[1] AR1 に従うという仮定は下記のアルゴリズムの説明を簡単にするために設けたものであり、より一般的な確率過程を仮定することも可能である。

いることになり、最適な消費水準、および最大化された期待効用の割引現在価値の和もまた A_{T-1} と Y_{T-1} に依存する関数となる[2]。

上記の最大化問題の解

$$c_{T-1} = c^{*}_{T-1}\left(A_{T-1}, Y_{T-1}\right), \tag{23}$$

は、政策関数 (Policy Function)、政策関数の要素になっている変数を状態変数 (State Variable) と呼ぶ。また、最大化された目的関数

$$\begin{aligned} V_{T-1}\left(A_{T-1}, Y_{T-1}\right) &= u\left(c^{*}_{T-1}\left(A_{T-1}, Y_{T-1}\right)\right) \\ &\quad + E_{T-1}\beta u\left(\left(\left(1+r\right)A_{T-1} + Y_{T-1} - c^{*}_{T-1}\left(A_{T-1}, Y_{T-1}\right)\right)\left(1+r\right) + Y_T\right), \end{aligned} \tag{24}$$

は価値関数 (Value Function) と呼ばれる。(22) を価値関数を用いて書き直すと

$$V_{T-1}\left(A_{T-1}, Y_{T-1}\right) = \max_{c_{T-1}}\left[u\left(c_{T-1}\right) + E_{T-1}\beta V_T\left(A_T, Y_T\right)\right], \tag{25}$$

$$s.t. \quad Y_T = \rho Y_{T-1} + \varepsilon_T, \tag{26}$$

$$A_T \leq \left(1+r\right)A_{T-1} + Y_{T-1} - c_{T-1.} \tag{27}$$

となる。ちなみに、最終期の価値関数は

$$V_T\left(A_T, Y_T\right) = u\left(\left(1+r\right)A_T + Y_T\right), \tag{28}$$

であり、利用可能な資源を全てそのまま消費した時に得られる効用水準に等しい。(25) はベルマン方程式 (Bellman Equation) と呼ばれるものであり、各期の最大化問題は、来期の価値関数と今期の効用の和を最大化させるという、二期間の最大化問題として定式化されている。今は、$T-1$ 期の問題を考えたが、$T-1$ 期における価値関数が入手できたら、$T-2$ 期の問題も同様に定義可能であり、一般に

$$V_t\left(A_t, Y_t\right) = \max_{c_t}\left[u\left(c_t\right) + E_t\beta V_{t+1}\left(A_{t+1}, Y_{t+1}\right)\right], \tag{29}$$

$$s.t. \quad Y_{t+1} = \rho Y_t + \varepsilon_{t+1}, \tag{30}$$

$$A_{t+1} \leq \left(1+r\right)A_t + Y_t - c_{t.} \tag{31}$$

と書くことができる。このように、最終期における最適解を基に、時間を遡って最適消費経路を求める解法は「後ろ向きの帰納法 (Backward Induction)」と呼ばれ、全期間の最適消費経路を一括して導出するラグランジュアンによる解法と対照的なものである。

[2]数値的に (22) の最大化問題を解く際には、期待値オペレーターがあるため、積分する必要が生じる。また、A_{T-1} と Y_{T-1} を所与として、最適な消費水準 c_{T-1} に関する非線形最大化問題を数値的に解く、ということは、A_{T-1} と Y_{T-1} の可能なコンビネーションに対応する最適な c_{T-1} の対応を全て求めることを意味する。

ラグランジュアンによる解と動的計画法による解は必ずしも一致するとは限らない。また、ベルマン方程式を満たす価値関数が複数存在する可能性もある。両者が一致するための条件は Stokey and Lucas (1988) に詳しく議論されているが、家計消費分析において、両者の乖離が表面化するケースは少ない[3]。実際にラグランジュアンで解く場合とベルマン方程式を用いる際の最大の違いは、前者は各期の消費の経路を求めるのに対し、後者は各期における政策 (消費) 関数を求めることにある。コンピューターを用いて、数値的に解を求める場合、動的計画法は (1) 後ろ向きの帰納法 (Backward Induction) か (2) 価値関数反復法 (Value Function Iteration) のどちらかの手法で解くことになる。

1.2.2 後ろ向きの帰納法 (Backward Induction)

後ろ向きの帰納法 (Backward Induction) は、動学最適化問題の最終期における行動が確定している時に主として利用される手法である。家計消費分析では、家計の最後の時点、すなわち経済から撤退する時点が確定している時によく用いられる。この撤退時点は、家計がこれ以上経済に残ることはありえない時点のことであり、例えば人間の寿命が最大で 120 歳であるならば、120 歳が最終時点となる。120 歳よりも前の時点で死亡、あるいは経済からの撤退 (消費・貯蓄に関する意思決定をしなくなる) は容易にモデルに組み込むことが可能である。

既に、Backward Induction はベルマン方程式を導出するときに用いているので、ここではより具体的に、Backward Induction を用いた解法を紹介する。

家計の最終期を T 期とし、$T+1$ 期に資産を残さないということから、(22) が導出された。$T-1$ 期におけるベルマン方程式は

$$V_{T-1}\left(A_{T-1}, Y_{T-1}\right) = \underset{c_{T-1}}{\mathrm{Max}}\ \left[u\left(c_{T-1}\right) + E_{T-1}\beta u\left(\left(\left(1+r\right)A_{T-1} + Y_{T-1} - c_{T-1}\right)\left(1+r\right) + Y_T\right)\right], \tag{32}$$

であった。上記の解である c_{T-1} は、A_{T-1} と Y_{T-1} を要素とする関数、$c_{T-1} = c^*_{T-1}\left(A_{T-1}, Y_{T-1}\right)$ となる。最適な消費水準 c_{T-1} に関する非線形最大化問題を数値的に解く、ということは、A_{T-1} と Y_{T-1} の可能なコンビネーションに対応する最適な c_{T-1} の対応を全て求めることを意味する。ここでは、一番単純なグリッド分割による離散近似法を紹介する[4]。

[3]動的計画法とラグランジュアンによる解が乖離するケースの一つに、時間的整合性 (Time Consistency) がある。ラグランジュアンの解が時間的整合性をみたさないとき、その解は動的計画法の解とはならない。時間的整合性は、様々なケースで発生するが、双曲割引 (Hyperbolic Discount) によるものに関しては Harris and Laibson (2001) を参照せよ。

[4]動学的最適化問題の解法に限らず、経済学における数値解析一般に関しては、Judd (1998) は既に古典としての地位を確立している。Miranda and Fackler (2002) は動的計画法に詳しく、また Matlab のコードを多く掲載しており、より実践的であるが、コードがブラックボックスのままでも計算できてしまうため、数値計算を習得するためには、多少面倒でも Judd (1998) を読むことをお勧めする。

まず、所得過程を特定化する必要がある。以下の例では、単純な所得過程を考える。

(1)　引退前

引退前に t 歳の個人が受け取る所得は定額部分 1 と一定の率 (7%) で成長する通常所得 Y_t、および変動所得 ω_t から構成されていると仮定する。変動所得は、幸運な時と不運な時の二段階の値をとり、幸運な時は通常所得の 3 割増、不運な時は通常所得の 3 割減の所得を受け取ると仮定する。すなわち、

$$Y_t = 1 + 1.07^{(t-1)} \tag{33}$$

$$Income = Y_t \times \omega_t \tag{34}$$

$$\omega_t = 0.7 \text{ (低い所得のとき)}, \tag{35}$$

$$\omega_t = 1.3 \text{ (高い所得のとき)}, \tag{36}$$

とする。

変動所得 ω_t の状態は、前期の状態に依存しており、前期の幸運なとき、今期も幸運である確率が 0.9、同様に前期不運な時に今期も不運である確率も 0.9 であるとする。今期の状態の確率が前期の状態のみに依存するものはマルチンゲールと呼ばれる。このモデルのように、二つの値しかとならないものは、前期と今期の状態は下記の推移確率行列で表わすことができる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Low at t+1} & \text{High at t+1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Low at t} \\ \text{High at t} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{array} \right) \end{array} . \tag{37}$$

第 (1,1) 成分は、t 期に低い所得で、$t+1$ 期においてもまた低い所得である確率が 0.9 であることを表わす。このような推移確率行列で状態の推移を記述できる確率過程はマルコフ・チェーンと呼ばれる[5]。

(2)　引退後

引退後の所得は変動も成長もせず、一定の所得をうけとる、すなわち、所得は毎期同額で、

$$Income = 0.7 \times Y_{retirement} \tag{38}$$

となる。この家計は 80 年生存し、そのうち最初の 20 年は特に消費活動をせず、21 歳から労働と消費を行い、60 歳で引退し、残りの 20 年を引退期として過ごすと仮定する。

効用関数は CRRA であり、リスク回避度は $\sigma = 3$、時間選好 $\beta = 0.97$、金利は $R = 1/\beta$、初期資産はゼロとする[6]。

[5]マルコフ・チェーンは確率過程論の基本であり、多くの確率論の教科書に解説がある。古くなったが、渡部 (1979) はわかりやすく、また包括的にマルコフ・チェーンの説明を行っている。

[6]負債保有を認めることも勿論可能である。また、Appendix に掲載しているプログラムでは、初期資産が家計により異なり、正規分布に従っている状態を考えている。

この動学問題では、状態変数は資産 A と所得ショック ω の二種類であるが、所得ショック ω の実現値は二種類しかないので、引退前には、High と Low の二種類の状態に関し、それぞれに価値関数を考え、

$$V_t\left(A_t, High\right) = \max\left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\left(0.9 * V_{t+1}\left(A_{t+1}, High\right) + 0.1 * V_{t+1}\left(A_{t+1}, Low\right)\right)\right], \tag{39}$$

$$V_t\left(A_t, Low\right) = \max\left[\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\left(0.1 * V_{t+1}\left(A_{t+1}, High\right) + 0.9 * V_{t+1}\left(A_{t+1}, Low\right)\right)\right], \tag{40}$$

とベルマン方程式を二つに分割する。

状態変数を離散近似する場合は、資産の上限と下限を事前に設定する必要がある。借り入れを認めない場合の資産額の下限はゼロとできるが、上限をどの値に設定するのが適切であるかは、パラメターや関数形に依存する。したがって、何度か上限を変えてプログラムを走らせ、結果をみながら上限を設定する必要がある。大きな上限値を設定し、細かくグリッドを取ると数値計算に必要な時間とメモリー量が飛躍的に増加するので、動かすコンピューターの性能を考えながらグリッドをとる必要がある。

以下の例では、資産の下限をゼロ、上限を 100 とし、0.1 単位で分割している。したがって、資産は

$$A_T = [0, 0.1, 0.2, ..., 99.9, 100], \tag{41}$$

と 1001 個のグリッドに分割されている[7]。

まず、最終期における価値関数、

$$V_T\left(A_T\right), \tag{42}$$

を計算する。最終期には、家計は t 期首で利用可能な資産総額を全て消費に回すので、最終期の価値関数の値は、$(RA_T + Y_T)$ と同額の消費から得られる効用と等しくなる。従って、資産グリッド i に関して、価値関数の値を求めると、下記のようになる。

$$V_T\left(A_T(i)\right) = \frac{\left(RA_T\left(i\right) + Y_T\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma}. \tag{43}$$

次に、得られた最終期の価値関数を用い、ベルマン方程式の最大値を、A_{T-1} の各グリッドに関して求める。得られた V_{T-1} を用いて、再度ベルマン方程式の最大値を求めれば、V_{T-2} を求めることが可能である。繰り返しこの作業を行うことで、全期間の価値関数を求めることが可能である。図 1 は、人生最終期 $(t = 80)$ とその一期前 $(t = 79)$ および二期前 $(t = 78)$ の価値関数の形

[7]資産の最小値をゼロとすることで、流動性制約を導入していることになる。資産として負の値を許容することも勿論可能であり、その場合、借り入れを行うことが可能になる。

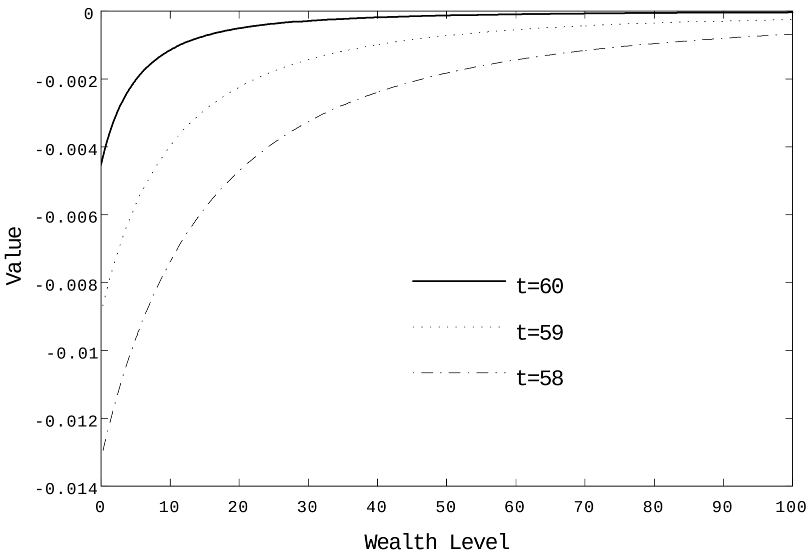

図 1: 価値関数

状を描いたものである。価値関数は資産水準に関して増加関数、かつ凹関数になっており、若いほど、低い水準になり、かつ凹性は緩やかになっていく。図 2 は同様に Policy Function を描いたものである。最終期 ($t = 80$) では、保有資産 (正確には資産に金利を乗じ、さらに所得を加えたもの) 全てを消費するが、その一期前では、水準はほぼ半分となっている。これは、残り二期間に消費を分割させている (平滑化させている) ことを示している。図 3 は、所得プロセスをコンピューター上でシミュレートし、仮想的なライフサイクル行動を描いたものである。このモデルでは、時間選好率と金利が同じ水準にあるため、もしも不確実性がなく、自由に借り入れが可能であれば、最適消費経路は一定値をとるはずであるが、(1) 所得に不確実性があり、かつ (2) 負債保有ができない、という二つの理由から、消費は一定ではなくなっている。50 歳までは所得と消費はほぼ一致し、資産蓄積もあまり進まないが、50 歳を過ぎた時点で一気に資産蓄積が進み、引退と同時に資産の取り崩しが始まる。不確実性がなくなり、資産蓄積が進んだ引退期以降の消費は一定となる。

Appendix にある Matlab コードと上記の説明を対応させて、ぜひとも一度はコードを実行し、様々な設定の下で、各年齢の価値関数や Policy Function の形状を自分で描いて欲しい。

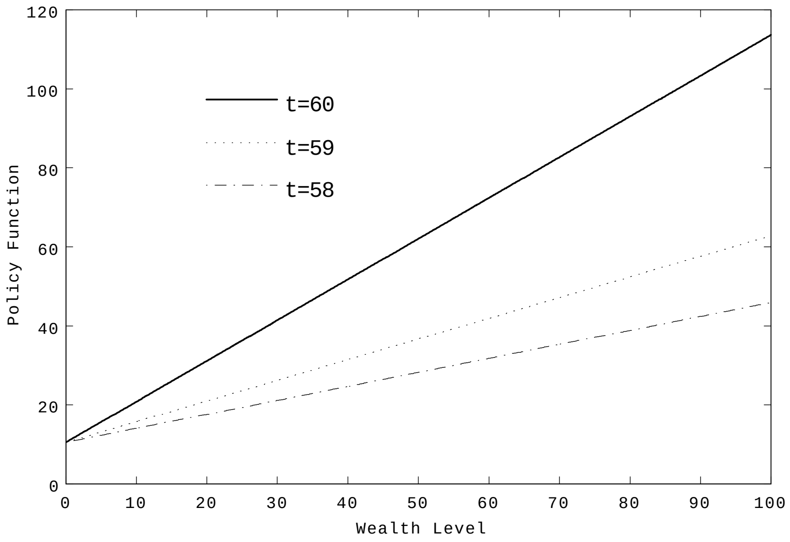

図 2: Policy Functions

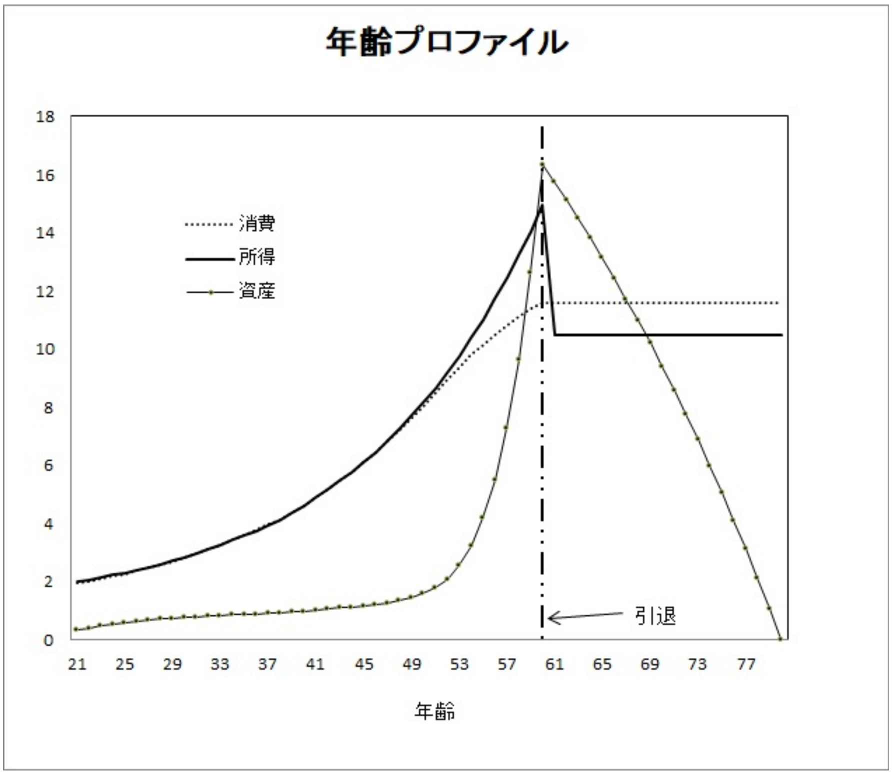

図 3: 図 3

1.2.3　価値関数反復法 (Value Function Iteration)

今までの例では、家計のライフサイクルを描写するため、人生の最終期を設定した。この結果、年齢により価値関数の形状が変化し、最適消費計画も年齢により異なるものになった。一方、マクロモデルの場合は、明示的な最終期を設定せず、無限視野を想定することが一般的である。このとき、最終期の存在を前提とした Backward Induction が使えなくなる。その代わり、無限視野の問題では、経済の状況 (分布) が時間に依存しない、定常状態が発生する。定常状態において、価値関数の形状は時間により変化しなくなる。この時、Value Function Iteration と呼ばれるアルゴリズムにより、価値関数の形状を数値的に求めることが可能になる。

単純な無限視野の最適化問題を考える。各期の効用関数を u、資源制約を g、状態変数を x、コントロール変数を c で表し、動的最適化問題を以下のように定義する。

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(x_t, c_t\right), \tag{44}$$

$$x_{t+1} = g\left(x_t, c_t\right), \tag{45}$$

$$x_0 : given. \tag{46}$$

上記の問題を解いて得た最適化された生涯効用を V^* で表わすと、

$$V^* = \max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(x_t, u_t\right) \quad s.t. x_{t+1} = g\left(x_t, c_t\right) \quad \text{and } x_0. \tag{47}$$

そこで、ベルマン方程式は以下のように定義される。

$$V\left(x\right) = \max_{c} \quad \left(u\left(x, c\right) + \beta V\left(x'\right)\right) \quad s.t. \quad x' = g\left(x, c\right). \tag{48}$$

ある一定の条件下で、Value Function Iteration とよばれる下記の操作により、ベルマン方程式を満たす価値関数 $V\left(x_t\right)$ を得ることが可能であることが知られている。

$$V_{j+1} = \max_{c} \quad \left(u\left(x, c\right) + \beta V_j\left(x'\right)\right) \quad s.t. x' = g\left(x, c\right). j = 1, 2, ...,. \tag{49}$$

まず、適当に初期の価値関数の候補 V_0 を作成する。通常は全ての状態変数のグリッドに関して常にゼロの値となる単純な関数を仮定することが多い。その価値関数の候補を用いて、ベルマン方程式を最大化する第二の価値関数の候補 V_1 を作成する。この作業を繰り返していくと、価値関数は一定の関数形に収束していくのである。この便利な性質は、ベルマン方程式が縮小写像になっていることに起因している。数学的な背景に関しては Stoky and Lucas (1988)、実践的なアルゴリズムに関しては Ljungqivist and Sargent (2004) および Miranda and Fackler (2002) において詳しく説明されている。

2 Code

```
%% Simple Life Cycle Consumption Model with Uncertainty
%
% 有限視野モデルを Backward Induction で解く
% 各期の効用関数は CRRA
% W(t+1)=R*W(t) + Y(t) -C(t)
% 所得ショックには持続性が存在
% 2010 年 10 月
% 阿部修人
clear all
tic
%% Set Parameter Values
gamma=3; % リスク回避度
beta=0.97; % 割引因子
R=1.01; % 金利 (1/beta である必要はない)
maxage=60; % 死亡年齢
retire_age=40;% 引退年齢 (死亡年齢よりも小さい必要あり)
%% 資産グリッドの作成
max_w=100;% 資産の最大値
min_w=0;% 資産の最小値 (不でも可)
inc_w=0.1;% グリッド幅
n= round((max_w-min_w)/inc_w+1); % # グリッド数
% 資産グリッド
for i=1:n
w(i,1)=min_w+inc_w*(i-1);
end
%
%% 所得過程 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
shockvalue=zeros(1,2); % 所得ショック
shockvalue(1)=0.7; % 低所得実現値
shockvalue(2)=1.3; % 高所得実現値
%
% 推移確率
trprob=[ 0.9 0.1; 0.1 0.9 ];
% 所得過程の非確率部分
Earning=ones(maxage,1); % 所得のフロー
g_young=1.07; % 勤労期における所得成長率
for k=1:maxage
if k<=retire_age
```

```
Earning(k)=1+1*g_young^(k-1);
elseif k>retire_age
Earning(k)=0.7*Earning(retire_age);
end
end
%
%%　初期化 %%%%%%%%%%%%%%%
VL_age=zeros(n,maxage);% 年齢プロファイル
VH_age=zeros(n,maxage);
Util=-10000000000000000000*ones(n,n);% 負の消費選択を避ける
Cons=zeros(n,n);
policy_l_age=zeros(n,maxage);% 年齢・Policy プロファイル
policy_h_age=zeros(n,maxage);
policy_l=zeros(n,1);
policy_h=zeros(n,1);
%% 終点作成 %%%%%%%%%%%%%%%
%
for i=1:n
for j=1:n
Cons(i,j)=R*w(i)+Earning(maxage);
if Cons(i,j)>0.0
Util(i,j)=(Cons(i,j)^(1-gamma))/(1-gamma);
end
end
end
%
% 終点における価値関数の作成
for i=1:n
VL1(1,i)=Util(i,1);
VH1(1,i)=Util(i,1);
policy_l_age(i,maxage)=R*w(i)+Earning(maxage);
policy_h_age(i,maxage)=R*w(i)+Earning(maxage);
end
%
VL_age(:,maxage)=VL1';
VH_age(:,maxage)=VH1';
%
%% Main Loop: Backward Induction %%%%%%
for k=2:maxage
```

```
% k=1 における Policy は既に計算済み
Cl=zeros(n,n);
Ch=zeros(n,n);
Ul = -10000000000000000000*ones(n,n);
Uh = -10000000000000000000*ones(n,n);
for i=1:n
for j=1:n
invretire=maxage-retire_age;
invage=maxage-k+1; % 並べ替え用
if k<=invretire % 引退後
% 引退後は所得は一定であることに注意
Cons(i,j)=R*w(i)+Earning(invage)-w(j);
if Cons(i,j)>0.0
Ul(i,j)=(Cons(i,j)^(1-gamma))/(1-gamma);
Uh(i,j)=Ul(i,j);%
end
end
if k>invretire % 勤労期
Cl(i,j)=R*w(i)+Earning(invage)*shockvalue(1)-w(j);
Ch(i,j)=R*w(i)+Earning(invage)*shockvalue(2)-w(j);
if Cl(i,j)>0
Ul(i,j)=(Cl(i,j)^(1-gamma))/(1-gamma); %
end
if Ch(i,j)>0
Uh(i,j)=(Ch(i,j)^(1-gamma))/(1-gamma); %
end
end
end
end
% ベルマン方程式の最大値を計算
for s=1:n
[VL0(s,1) pl(s)]=max(Ul(s,:)+beta*(trprob(1,1)*VL1+trprob(1,2)*VH1));
[VH0(s,1) ph(s)]=max(Uh(s,:)+beta*(trprob(2,1)*VL1+trprob(2,2)*VH1));
end
VL1=VL0';
VH1=VH0';
VL_age(:,invage)=VL0;
VH_age(:,invage)=VH0;
% Policy functions の導出
```

```
if invage<=retire_age % 勤労期
policy_l(:)=R*w(:)+Earning(invage)*shockvalue(1)- w(pl(:));
policy_h(:)=R*w(:)+Earning(invage)*shockvalue(2)- w(ph(:));
elseif invage>retire_age % 引退期
policy_h(:)=R*w(:)+Earning(invage)- w(ph(:));
policy_l(:)=R*w(:)+Earning(invage)- w(pl(:));
end
policy_l_age(:,invage)= policy_l;
policy_h_age(:,invage)= policy_h;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Life Cycle Simulation
%
simnum=5000;% 家計数
sigma=0.5;% 初期資産分布の標準偏差
mhu =0.1;% 初期資産分布の平均値
cons_sim=zeros(simnum, maxage);% シミュレートされた消費
next_wealth=zeros(simnum, maxage);% 同資産
incomedist=zeros(simnum, maxage);% 同所得
wealth=zeros(1,simnum);
wealth2_1=zeros(1,simnum);
%
% 初期資産分布の作成
for i=1:simnum
wealth(i)=round((((randn(1)+mhu)*sigma)-min_w)/inc_w+1);
% Note that the grid number: n=1+(wealth-min_w)/inc_w
if wealth(i)<1
wealth(i)=1;
elseif wealth>n
wealth(i)=n;
end
end
%
wealth2=sort(wealth);
%
% 初期所得分布をマルコフチェーンの定常分布と仮定
%
lengthpro=length(trprob);
P=(1/lengthpro)*ones(1,lengthpro);
```

```
for i=1:100
P=P*trprob;
end
incomestate=mnrnd(1,P,simnum);% 所得分布の初期状態
%
% 各最適経路の導出
for i=1:simnum
for k=1:maxage
asset=wealth2(i);
if k<=retire_age
income_now=incomestate(i,:);
nextshock=mnrnd(1, trprob,2);% 所得状態の推移
if income_now(1,1)==1;
cons_sim(i,k)=policy_l_age(asset,k);
next_wealth(i,k)=R*w(asset)+Earning(k)*shockvalue(1)-cons_sim(i,k);
incomedist(i,k)=Earning(k)*shockvalue(1);
incomestate(i,:)=nextshock(1,:);
elseif income_now(1,2)==1
cons_sim(i,k)=policy_h_age(asset,k);
next_wealth(i,k)=R*w(asset)+Earning(k)*shockvalue(2)-cons_sim(i,k);
incomedist(i,k)=Earning(k)*shockvalue(2);
incomestate(i,:)=nextshock(2,:);
end
elseif k>retire_age
cons_sim(i,k)=policy_h_age(asset,k);
next_wealth(i,k)=R*w(asset)+Earning(k)-cons_sim(i,k);
incomedist(i,k)=Earning(k);
end
wealth2_1(i)=round(((next_wealth(i,k))-min_w)/inc_w)+1;
if wealth2_1(i)<1
wealth2_1(i)=1;
elseif wealth2_1(i)>n
wealth2_1(i)=n;
end
wealth2(i)=wealth2_1(i);
end
end
% 年齢プロファイル
teststat=zeros(maxage,6);
```

```
for k=1:maxage
teststat(k,1)=var(log(cons_sim(:,k)));
teststat(k,2)=mean(cons_sim(:,k));
teststat(k,3)=var(log(incomedist(:,k)));
teststat(k,4)=mean(incomedist(:,k));
teststat(k,5)=var(next_wealth(:,k));
teststat(k,6)=mean(next_wealth(:,k));
end
%
%% Plot
%
axe=zeros(maxage,1);
for i=1:maxage
axe(i)=i+20;
end
%
figure
plot( axe,teststat(:,2),'k', 'LineWidth',2 );
hold on
plot( axe,teststat(:,4),'-kx' );
plot(axe,teststat(:,6),'-ko','MarkerSize',3 );
title('Consumption, Earning, and Wealth Profiles');xlabel('age');
legend(' 消費',' 所得',' 資産',2);
hold off
%
toc
```

3