家計消費の経済分析

(1)　需要関数の推計と分離可能性*

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 30 年 9 月 14 日

1　家計消費の経済分析の対象

日々の家計の行動を考えてみよう。朝、棚や冷蔵庫から食材を取り出し、朝食をとる。朝食を作るのは家計内在庫を用いた家計内生産活動であり、朝食を食べるのは時間をかけて行うサービス消費である。すなわち、朝食の際には、サービスの消費と生産がほぼ同時に行われている。また、朝食として、シリアルか、パンか、ご飯の何を食べるかの選択、あるいはそもそも朝食をとらない、という選択もある。前日の食事状況や当日に予定されている仕事の予定に依存してくるだろう。また、朝食をとらない場合、どのようなタイミングで食事をとるのか、というサービス消費のタイミングの問題となる。

朝食後、仕事に行く場合は、通勤に時間と費用がかかる。通勤時間は短期的には外生であるが、十年単位では内生的に決定される可能性があるだろう。労働時間も同様である。帰宅する際に、買い物をするだろうか。買い物をする場合、どこの店にいくのだろうか。各店には膨大な種類の商品・サービスが販売されているが、それらのうち、何をいくらで購入するのだろうか。ミクロ経済学の入門書では、限界代替率が価格比に等しい予算制約線上で最適消費量が決定されるが、現実には多くの商品は購入されず、コーナー解となる。購入する際、その商品・サービスの実際の消費と購買のタイミングはどの程度ずれるのだろうか?その日の予算制約、すなわち支出総額はどのように決定されるのだろうか?

次に、日々の購買行動から距離をとり、年単位の行動を考えると、海外旅行などの大型のサービス消費、住宅や車などの耐久財・固定資産の購入、貯蓄の運用方法、結婚・離婚、子供の教育、病気や事故のリスクと保険の購入、人間ドックなどの医療サービスの購入、休日の余暇と区分される時間の配分、親との同居の有無 ⋯ 。まさに無数の意思決定を行いながら、そして明日を、

*本講義ノートの作成に際しては原千秋氏から多くの貴重なコメントを頂いた。

一か月先を、10 年先を考えながら今日を生きている。「家計消費行動」の分析対象を消費財・サービスの購入の意思決定メカニズム、として捉える場合、必然的に、意思決定メカニズムに重要な影響を与える諸環境もまた分析対象に入れざるを得ない。所得、金融資産、物的資産、健康、家計内構成、これらは家計の消費行動に明らかに多大な影響を与える。家計消費の経済分析は、家計の意思決定に関する総合的な分析にならざるを得ない。実際、20 世紀初頭の消費関数論争以降、急速に拡大する家計レベルのミクロデータをもとに、家計消費研究は余暇時間配分、健康・医療、育児、所得変動リスク等、多くの方向に分析対象を拡大していった。1980 年に出版された Deaton, A. S. and J. Muellbauer (1980), *Economics and consumer Behavior*, Cambridge University Press, New York. は今なお色あせない、その当時の消費研究のほぼ全範囲を扱う大著であるが、現在の消費研究は彼らの教科書の範囲をはるかに超えて拡大している。一方、今日の消費研究の多くは、動学分析になっており、数学構造は静学分析に比べて複雑になっている。動学化することで得られる情報は非常に多いが、一方、動学モデルの技術的な問題のため、関数形などに強い仮定を置くことが一般的となり、Deaton and Muellbauer (1980) が書かれた 70 年代後半のミクロ計量分析で支配的であった、より一般的な、関数形に強い仮定を課さない、より多くの財・サービスを含めた消費分析、という視点は薄れてしまっている。分析対象の拡大と深化は確実に我々の知見を拡大し、人々の行動原理関する理解を深めているが、一方、細分化し、かつ動学化という方向が強調されることにより、70 年代や 80 年代に重視されていた一般的な関数形への追求が、単に技術的な理由により影を潜め、特定の扱いやすい関数形への依存が高まっていることは否定できない。

今回の講義シリーズの目標は、80 年代に確立した、Almost Ideal Demand System (AIDS) 等の、関数形に強い仮定を課さない、ほぼすべての関数の近似となる多数財の消費分析モデルから、近年の、不確実性下の余暇・貯蓄選択に関する一連の研究について紹介し、その基本的な技術を身に着け応用することである。現在の最先端、家計内在庫や余暇時間配分等、いまだ基本的な分析手法や結果が確立していない分野についても触れるよう努力する予定であるが、現段階では未定である。

最初の二回の講義ノートは、古典的な消費理論、特に静学分析において 1980 年代までに Stone, Deaton, Diewert 達が確立した消費理論について議論する。具体的には、膨大な種類のある商品の中から、どのようにして人々は普段の消費財購入の意思決定を行っているのか、その分析手法について紹介していく。必然的に、その内容はマクロ動学分析ではなく、ミクロの消費理論が中心となる。

2 需要関数の推計

ある商品に対する、特定の個人 (家計) の需要関数が存在し、下記のように書けるとしよう。

$$q_i = g_i\left(p, y\right),$$

ただし、p は価格ベクトル、y はその個人の所得である。静学分析とし、所得と価格は所与と仮定しよう。経済理論は、g_i についてどのような制約を課すだろうか?そして、私たちはどうやって需要関数を推計することができるだろうか?

需要関数の背後にある、効用関数最大化問題を考えてみよう。無論、

$$\max u\left(q\right)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{N} p_i q_i = y$$

だから、予算制約をみたすには、

$$\sum_{i=1}^{N} p_i g_i\left(p, y\right) = y,$$

を満たさねばならない。次に、予算制約が所得と価格に関して一次同次でり、価格と所得に正の定数 θ を乗じても予算制約は変わらない。したがって、効用最大化問題は予算制約の定数倍をしてもしなくても変わらないため、需要関数もまた不変である。これは、

$$q_i = g_i\left(p, y\right) = g_i\left(\theta p, \theta y\right), \theta > 0.$$

次に、予算制約式に需要関数を代入したものは、所得と価格に関する恒等式になるので、

$$\sum_{i=1}^{N} p_i g_i\left(p, y\right) = y$$

$$\begin{aligned} g_k\left(p, y\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial g_i\left(p, y\right)}{\partial p_k} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial g_i\left(p, y\right)}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

を得る。これを弾力性の形式に書き直すと、

$$\frac{p_k}{p_k} g_k + \sum_{i=1}^{N} \frac{g_i}{g_i} \frac{p_k}{p_k} p_i \frac{\partial g_i (p, y)}{\partial p_k} = 0$$

$$\frac{p_k}{p_k} g_k + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{ik} \frac{g_i}{p_k} p_i = 0$$

$$\frac{p_k}{y} g_k + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{ik} \frac{g_i}{y} p_i = 0$$

$$\omega_k + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{ik} \omega_i = 0,$$

$$\omega_k = \frac{p_k g_k (p, y)}{y}, \varepsilon_{ik} = \frac{p_k}{g_i (p, y)} \frac{\partial g_i (p, y)}{\partial p_k}$$

ただし、ω_k は k 財への支出シェア、ε_{ik} は k 財の i 価格の変化に対する価格弾力性である。また、

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial g_i (p, y)}{\partial y} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{y}{y} \frac{g_i}{g_i} \frac{\partial g_i (p, y)}{\partial y} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{g_i}{y} \varepsilon_{iy} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i \varepsilon_{iy} = 1,$$

ただし、ε_y は i 財の所得弾力性である。所得弾力性に関する制約式の意味を考えてみよう。所得弾力性の支出シェアによる加重平均は 1 になっている、ということは、様々な財の平均的な所得弾力性は 1 であることを示している。ある財の所得弾力性が 1 より大きければ、必然的に、少なくとも一つの財の所得弾力性は 1 よりも小さくなっている。以上を踏まえたうえで、需要関数に戻ってみよう。

$$q_i = g_i (p, y)$$

通常、この需要関数の定数項や各種パラメターを推計する際には、内点解を仮定して、

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy} \ln y + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_{ki} \ln p_k + e_i$$

とするのが最も単純かつ直感的であり、各種弾力性を線形回帰により容易に得ることができる。さて、N 財の情報があるとすると、この N 個の需要関数になり、推定するパラメータは所得弾力性 N 個と価格弾力性 $N \times (N-1) \times 1/2$

の和、だけ存在する。十分な数のサンプルサイズを確保できれば、この推計は今日のコンピューターであれば決して難しくない。しかし、複数の異なる個人のデータ、クロスセクションデータを用いて上式を推計するときには、いくつか注意する必要がある。まず、上式は、所得、価格弾力性は一定であると仮定している。ある財の所得弾力性が 1 を超えていると仮定しよう。すると、所得が増加していくと、その財の所得弾力性は 1 を超えているため、その財への支出シェアは増加していく。そして、十分に所得が増加すると、その財への支出シェアは 1 を超えることになる。すなわち、所得弾力性一定という仮定は、global な領域では明らかに誤りであり、あくまで局所的なケースにのみ正当化されるのである。上の需要関数は、ある消費、価格ベクトル、所得の点ににおける対数線形近似とみなすべきであり、global な構造モデルではない。しかし、そうであるなら、クロスセクションデータを用い、大金持ちから貧乏人までプールしたデータを用いて局所線形近似の需要関数を推計することには問題があることになる。

第二に、i 財の需要にのみ興味がある場合でも、推定するパラメターの数は $N+2$ 個存在する。それらのパラメターの中で、特に価格弾力性について、なんらかの先験的な知識を反映させることが可能であるか否か考えてみよう。例えば、オレンジとミカンであれば、代替財であるから価格弾力性はマイナスになるだろうし、オレンジと新聞の価格であれば、お互いはほぼ無関係であることが想定される。しかし、上の需要関数はマーシャルの需要関数、すなわち補償需要ではないため、価格弾力性には代替効果と所得効果の二つの効果が含まれてしまっている。二つの財の間の、選好関係における「距離」が直接反映されず、所得弾力性を通じる効果が残ってしまう。そこで、スルツキー方程式を利用しよう。補償需要を h とすると、スルツキー方程式は

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = \frac{\partial h_i}{\partial p_k} - q_k \frac{\partial q_i}{\partial y},$$

これを弾力性で書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_k} &= \frac{p_k}{q_i}\frac{\partial h_i}{\partial p_k} - \frac{p_k}{q_i} q_k \frac{\partial q_i}{\partial y} \\ \varepsilon_{ki} &= \varepsilon^*_{ki} - \omega_k \varepsilon_{iy} \end{aligned}$$

ただし、ε^*_{ki} は補償需要に関する価格弾力性であり、

$$\varepsilon^*_{ki} = \frac{p_k}{q_i}\frac{\partial h_i}{\partial p_k}.$$

需要関数に代入すると、

$$\begin{aligned}\ln q_i &= \alpha_i + \varepsilon_{iy}\ln y + \sum_{k=1}^{N}(\varepsilon^*_{ki} - \omega_k\varepsilon_{iy})\ln p_k + e_i \\ &= \alpha_i + \varepsilon_{iy}\left(\ln y - \sum_{k=1}^{N}\omega_k \ln p_k\right) + \sum_{k=1}^{N}\varepsilon^*_{ki}\ln p_k + e_i\end{aligned}$$

ここで、対数価格の支出シェアによる加重平均を物価指数 P とする、すなわち、

$$\ln P = \sum_{k=1}^{N}\omega_k \ln p_k,$$

とすると、

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy}\ln\left(\frac{y}{P}\right) + \sum_{k=1}^{N}\varepsilon^*_{ki}\ln p_k + e_i.$$

この式は、名目所得 y を 物価水準 P で割った、実質所得を含んでいる。この実質所得は効用水準とみなすことが可能である。補償需要関数に生じる効用水準が物価水準により得ることが可能になるのである。この式に出てくる価格弾力性は補償需要に関する弾力性であるから、対称性をみたし、かつ、所得効果を含まないため、代替性もしくは補完性が弱い、距離の離れた商品間の弾力性はゼロと仮定することができる。支出シェアは回帰分析を用いずに計算することができるため、物価指数 P は容易に計算可能である。直感的には、所得弾力性を実質所得に対する弾力性とすることで、価格効果は代替効果のみにすることが可能なのである。

3　数量から支出へ

補償需要の価格弾力性を含む需要関数は経済理論に即して結果を解釈することが容易にできる点が魅力であるが、実際にミクロデータを用いて推計する際には、財の数量の情報が必要になる。数量の情報は、えてして精度が低くなるか、そもそも存在しないケースが多い。スーパーマーケットで販売されている多くの生鮮食料品は、一山いくら、のような形で販売されているし、鮪の刺身にしても、正確なグラムで量り売りしているところは少ない。現代社会の複式簿記には数量の情報がなく、金銭情報のみである。家計簿でも、購入額の情報はあっても、そこに何グラムの魚やニンジンが入っていたか記録する人は少ないだろう。日本の総務省が行っている『家計調査』には数量情報が含まれているが、残念ながらその対象はごく限られた商品のみであり包括的なデータセットになっていない。数量情報が含まれるデータとして有名な Point of Sales (POS) データでも、生鮮食料品の数量は多くの場合含まれていない。

数量の情報を真剣に考えていくと、家計消費の分析は極めて困難になる。スーパーマーケットや住宅、車、雑誌、なんでも、商品単位となると非常に細かく分類されている。パスタをとっても、メーカーによって、グラム数によって、太さによって異なる商品となる。厳密に数量を考えると、特定の商品の数量となるが、小さなスーパーマーケットでも、取扱商品は数千種類に上るだろう。ある特定の商品を、特定の個人が購入する確率は限りなくゼロに近くなってしまう。また、そのような商品の数量単位の家計別データは、Homescan や Personalscan のような、スキャナーを用いたデータでもない限り収集は極めて困難になるし、またスキャナーを用いる場合でも、スキャンし忘れや、家計の他の構成員による購入等によりスキャンされない商品の購買、すなわち欠損値の影響が残ってしまう。

異なる商品であるため、数量として合算することができなくても、支出あるいは売上高であれば容易に合算可能である。そして、もしも、同一ではなくともよく似た商品への支出と、全く異なる財への支出が異なるメカニズムで決定されていれば、個別商品の数量ではなく、集合財への支出額をモデル化することはできないだろうか?ここで重要な役割を発揮するのが、効用関数の分離可能性という仮定である。

4　分離可能性

Deaton and Muellbauer (1980) に従い、6 財に依存する効用関数を考えてみよう。すなわち、

$$u = v\left(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\right)$$

ここで、q_1 はシリアル、q_2 は肉、q_3 は家賃、q_4 は燃料、q_5 はテレビ観戦、q_6 はスポーツ、としよう。これらは、食料、住宅関連、余暇、という三種類に分類できる。この時、消費者が次のような二段階の消費決定をすると考えてみよう。まず、消費者は様々な商品の価格を観察する。肉、シリアル、家賃、燃料、それぞれの価格である。第一段階では、自分の所得のうち、どれだけを食料に、住宅関連に、そして余暇に使うか、その割合を決定する。そして、第二段階では、食料全体への支出額をもとに、肉とシリアルをそれぞれどの程度購入するか決定する。肉とシリアルの消費量を決定する際には、住宅関連や余暇のような、食料グループに属さない財・サービスの価格や総所得は考えない。あくまで、第一段階で決定した食料への支出予定総額と、各食料品の価格をもとに最適な食料消費を決定するのである。

このような二段階の消費決定を可能にするのは、消費者の選好が弱分離可能 (Weakly Separable) のときである。選好が弱分離可能の定義は色々あるが、理解しやすいのは、効用関数が下記のように書くことが可能な時である。

$$u = v\left(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\right) = f\left[v_F\left(q_1, q_2\right), v_S\left(q_3, q_4\right), v_E\left(q_5, q_6\right)\right],$$

ただし、f は単調増加関数であり、v_i はグループ i に属する財への効用関数である。v_i は、さらに弱分離可能なようなサブグループに分けることで、三段階以上の消費決定モデルにすることも可能である。この、選好の分離可能性は、消費理論の根幹をなす仮定である。

食料消費を考えよう。もしも食料が他の財と弱分離可能であれば、食料への支出総額は第一段階で決定される。その支出額を Y_F とすると、食料グループに所属する財の数量は、食料に属する商品の価格ベクトル p_F と Y_F に依存する関数として書くことが可能である。次に、食料の中で、パスタが他の食料から分離可能であれば、パスタへの総支出額がまず決定され、その総支出額を所与にし、様々なパスタの購入数量が決定される。マーケティングの世界では個別商品への需要が分析の主要課題であろうが、経済学の場合は、特定のパスタブランドへの需要よりも、パスタというグループへの需要に関心がある場合が多いだろう。パスタ、という商品グループを考え、それ以上の分割はせずにパスタへの需要全体をモデルで定式化できればとても便利である。ただし、パスタへの総支出額は、各パスタの商品単位の価格のベクトルに依存してしまうことに注意が必要である。第一段階で、商品グループへの支出額を決定する際には、他の商品グループも含む、「全て」の商品に関する価格の情報が必要となっているのである。ここで、v_i はホモセティック、すなわち一次同次 (厳密には一次同次関数の単調増加変換) としよう。すると、第一段階での支出額が決定された後は、各グループへの支出額とグループに属する価格のみの関数として各需要関数を書くことが可能になる。それらの需要関数を代入すると、間接効用関数は

$$u = f\left[v_F\left(q_1\left(p_1,p_2,Y_F\right),q_2\left(p_1,p_2,Y_F\right)\right),v_S\left(\bullet\right),v_E\left(q_5\left(p_5,p_6,Y_E\right),q_6\left(p_5,p_6,Y_E\right)\right)\right]$$

と書くことが可能である。

各グループで考えると、ホモセティック効用関数の時の支出関数は効用水準に関して線形だったので、

$$E_F\left(p_1,p_2,u_F\right) = u_F \times E_F\left(p_1,p_2,1\right)$$

したがって、間接効用は

$$v_F\left(p_1,p_2,Y_F\right) = \frac{Y_F}{E_F\left(p_1,p_2,1\right)}$$

この右辺は、グループ支出で基準化されたグループ価格の価格指数の逆数と解釈可能である。支出関数の形状がわかれば、そこから各財価格を集計し、あたかも一つの価格、すなわちグループ物価指数を作成することが可能になる。物価指数を

$$P_F = E_F\left(p_1,p_2,1\right)$$

と定義し、数量指数を

$$Q_F = u_F$$

と定義すると、当然ながら、

$$P_F \times Q_F = u_F \times E_F\left(p_1, p_2, 1\right) = Y_F$$

となる。すなわち、効用関数が弱分離可能で、かつ、各グループ効用関数がホモセティックであれば、各グループへの集合財を考え、それに対応する物価指数を作成し、あたかも、グループ全体を一つの財とみなした集合財に関する効用最大化問題として家計の最大化問題を定式化可能になる。無論、サブグループの効用関数がホモセティックであるというのは強い仮定であり、所得が変化しても、各財の消費割合が不変、すなわち各財の所得弾力性が 1 である必要があるが、これは非常に強い仮定である。実際には、多くの研究ではここまで細かく考えず、各グループ内の価格を同一と考え、グループ単位の価格と各グループへの支出額を計算単位として考えることが多い。また、同一グループに属するすべての財価格の変動が同じであれば、著しく分析を簡素化できる。これは、後に、Composite Commodity Theorem の節で触れる。

選好の分離可能性は、マクロ経済学にとっても極めて重要である。異時点間の消費や、余暇・消費の間は分離可能と仮定されることが非常に多い。分離可能性の仮定がなければ、多くのマクロモデルはお手上げとなる。また、多様な財・サービスへの需要関数を推計する場合でも、分離可能性は非常に重要な役割を果たしており、この仮定なしに消費関数の推計は不可能に近い。したがって、分離可能性が現実の消費者行動と整合的であるか否か、半世紀にわたり、無数の実証分析が行われてきた。しかしながら、いまだ、効用が食料やその他や、さらに細かい、肉と果物が弱分離可能か否かについて等、基本的な性質について同意が得られているとは言えない状況にある。分離可能性を所与とした研究は現在の消費研究、異時点間でもクロスセクションでも、標準ではあるが、それを統計的に検証しようとすると、非常に難しいのが現状であり、今日でも多くの研究がなされている。次に、分離可能性の実証的な意味について考察してみよう。

4.1 分離可能性の検証

選好が弱分離可能であるとき、需要関数にはどのような制約が課されるだろうか?効用関数が異なる財グループ G と H に関して弱分離可能と仮定しよう。$i \in G, j \in H \quad (G \neq H)$ とする。すると、H に属するある財の価格 p_j の変化が G に属する財の補償需要に対して与える影響は

$$s_{ij} = \left.\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const}$$

代替効果は対称だから、

$$s_{ji} = \left.\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}\frac{\partial Y_H}{\partial p_i}\right|_{u=const} = s_{ij}$$

したがって、

$$\left.\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} = \left.\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}\frac{\partial Y_H}{\partial p_i}\right|_{u=const}$$
$$\left.\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\middle/\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}\right|_{u=const} = \left.\frac{\partial Y_H}{\partial p_i}\middle/\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\right|_{u=const}$$

この左辺は i に依存せず、右辺は j に依存していない[1]。したがって、両辺とも i と j に依存していないことになる。それを λ_{GH} と書き、整理すると、

$$\left.\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} = \lambda_{GH}\frac{\partial q_j}{\partial Y_H}$$

となる。総支出と各グループへの支出の関係に書き直すと、

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \left.\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial Y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} \\ &= \lambda_{GH}\frac{\partial q_i}{\partial Y_G}\frac{\partial q_j}{\partial Y_H} \\ &= \mu_{GH}\frac{\partial q_i}{\partial Y}\frac{\partial q_j}{\partial Y} \end{aligned}$$

ただし、

$$\mu_{GH}\frac{\partial Y_G}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \lambda_{GH}$$

この関係は、効用関数の弱分離性の必要十分条件になっていることが知られている (Gorman (1971))[2]。すなわち、二つの異なる財グループが弱分離しているかどうかは、片方の価格変化に対するもう一方の財の補償需要の代替効果が同一財グループ内ですべて同じであり、所得効果を用いた公式で表すことが可能であるか否かを検証すればよいことになる。

ここで、需要関数の形状が先に紹介したような

$$\ln q_i = \alpha_i + \varepsilon_{iy}\ln\left(\frac{y}{P}\right) + \sum_{k=1}^{N}\varepsilon^*_{ki}\ln p_k + e_i.$$

の形状をとっていると仮定しよう。すると、異なる財グループ間の代替効果はこの式から容易に求めることが可能であり、代替効果の同一グループ内での同一性という係数制約に関する χ^2 検定を行えばよい[3]。さらに一般的な需

[1] この Deaton and Muellbauer (1980) による証明方法には問題があるように思われる。この定理の最初の証明は Goldman and Uzawa (1964) “A note on separability in demand analysis,” *Econometrica,* 32, pp. 387-398. であるが、そこでは縁付きヘシアンを用いた、より複雑な証明が行われている。

[2] W.M. Gorman (1971), ”Two Stage Budgeting,” unpublished paper, London School of Economics, Dept. of Economics. だが、これは未刊行論文である。論文の中身は W. M. Gorman, C. Blackorby, and A. F. Shorrocks ed. (1996)*Separability and Aggregation: The Collected Works of W. M. Gorman, Volume I* Oxford Scholarship Online: November 2003 で読むことができる。

[3] Nayaga, R.M and O Capps (1994) “Tests on Weak Separability in DIssaggregated Meat Products,” *American Journal of Agricultural Economics*, Vol. 76, No. 4. 800-808. 等

要関数のクラスを用い推計する研究もあり、現在でも食料支出の分析などで頻繁に、パラメトリックな需要関数を特定した上で検証している研究は発表されている。しかしながら、対数線形や二次関数で近似した需要関数は、あくまでも真の需要関数に対する局所的な近似であり、これをグローバルな需要関数とみなすことには相当の無理がある。例えば、トランスログ等の多くのパラメターを有する需要関数は局所的には、観察不能な真の需要関数のとても良い近似になっている。しかし、グローバルな視点からは非常に強い制約を課した需要関数になっているのである。一方、大域的な需要関数の形状を知るためには、非常に多くの観察値が必要になる。需要関数は価格と所得の関数であり、その形状を知るには、理想的には、定義域に属するすべての価格と所得に関する情報がなければならないが、そのようなデータはまず存在しない[4]。

1983年にHal Varianが発表した論文[5]は、この分野のBreakthroughとなった。Varian (1983) は顕示選好を用い、ノンパラメトリックに検証することを提案している。これは非常に重要な研究なので、スペースをとって紹介しよう。

Varianの手法は、古典的な消費者理論に依拠している。まず、価格と消費に関するデータがある、としよう。この価格と消費のデータがどのような性質を持つとき、それは、合理的な消費行動と整合的になるだろうか?この、データから選好関係を推測するアプローチとしてはSamuelsonの顕示選好の弱公準が有名であるが、それだと推移性を確保できない。弱公準に変わり、主要な役割を演じるのは、Generalized Weak Axiom of Reveald Preference (GARP)と呼ばれる公理である。

$(p_x, x)\,(p_y, y)\ (p_{xi}, x_i)$ のような、観察された価格と消費量のベクトルのペアがあるとしよう。$p_x x \geq p_x y$ のとき、$xR^D y$ と書き、x は y よりも直接弱顕示選好される、と定義する。

1.顕示選好の直接弱公準：、$xR^D y$、かつ $x \neq y$ のとき、y が x よりも直接弱顕示選好されることはない。

ある x の系列 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ があり、$xR^D x_1, x_1 R^D x_2, ..., x_n R^D y$ のとき、x は y よりも弱顕示選好されるとし、xRy と書く。

2.顕示選好の強公準：xRy が成立し、かつ、$x \neq y$ のとき、 yRx が成立しない。

顕示選好の強公準により選好関係に推移性が成立するが、ある価格ベクトルの下で、複数の消費財ベクトルが最適であるときのケースをカバーせねばならない。そこで、

$p_x x > p_x y$ のとき、x は y に厳密に顕示選好される、と定義する。

[4]1970年代半ばころまでの、分離可能性理論研究の到達点であるBalckorby, C., D. Primont, and R.R. Russel (1978) *Duality, Separability, ad Functional Structure: Theory and Economic Applications*, North Holland.　は現在でも一読の価値はある。

[5]H.Varian (1983) “Non-Parametric Tests of Consumer Behaviour,” *The Review of Economic Studies*, Vol. 50, No. 1. 99-110.

3.一般化顕示選好の公準：xRy ならば、y が x よりも厳密に顕示選好されることはない。

GARP は、Afriat (1967)[6]による有名な定理で重要な役割を果たす。次の 3 つの性質を考えよう。(1) データが GARP を満たす、(2) 連続、単調、凹性、局所非飽和を満たす効用関数が存在し、その最大化行動として消費と価格ベクトルのデータを解釈可能である、(3) 観察された財と価格の組み合わせ (サンプルサイズ) が n であれば、Afriat の不等式と呼ばれる下記の不等式をみたすような $U^i, \lambda^i \quad (i = 1, 2, ..., n)$ が存在する、

$$U^i \leq U^j + \lambda^j p_j \left(x_i - x_j\right) \quad \text{for } i, j = 1, 2, ..., n.$$

Afriat の定理により、これら (1)-(3) は同値であることが知られている。Afriat の不等式は、データが GARP を満たす場合、それは凹の効用関数最適化問題から導出されものとみなすことが可能であることを示している。また、λ_j は、U_j における効用最大化条件、をマルチプライヤーを用いて書くと $Du\left(x_i\right) = \lambda^i p_i$ であることから、その意味は明らかであろう。証明は省くが、GARP は、凹、連続、単調性、局所非飽和を満たす効用関数が存在することと同値なのである。

さて、選好が x と z に関して弱分離可能なとき、効用関数は下記のように書くことが可能である。

$$u\left(x, z\right) = h\left(x, v\left(z\right)\right)$$

私たちは、観察されたデータがこの形状の効用関数の最大化問題の解とみなすことが可能であるための必要十分条件を知りたい。

まず、観察されたデータ全体が GARP を満たさねばならないことは明らかである。次に、$v\left(z\right)$ という効用関数が存在するためには z に関しても GARP が成立しなければならない。z に対応する価格を q と書くことにしよう。すると、三つの関数が凹であるためには、

$$\begin{aligned}
u\left(x^i, z^i\right) &\leq u\left(x^j, z^j\right) + \lambda^j p^j \left(x^i - x^j\right) + \lambda^j q^j \left(z^i - z^j\right) \\
h^i\left(x^i, v^i\right) &\leq h^i\left(x^i, v^j\right) + \lambda^j p^j \left(x^i - x^j\right) + \rho^j \left(v^i - v^j\right) \\
v\left(y_i\right) &\leq v\left(y_j\right) + \mu^j q^j \left(z^i - z^j\right)
\end{aligned}$$

ところで、z に属する任意の財 $z_{(l)}$ について、観察値 j において微分をとると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z_{(l)}} &= \lambda^j q^j \\
\frac{\partial u}{\partial z_{(l)}} &= \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z_{(l)}} = \rho^j \mu_j q^j
\end{aligned}$$

[6] S. Afriat (1967) “The Construction of a Utility Function from Expenditure Data,” *International Economic Review*, 8. 67-77.

したがって、

$$\rho^j = \frac{\lambda^j}{\mu^j}$$

これは、

$$h\left(x^i, v^i\right) \leq u\left(x^i, v^j\right) + \lambda^j p^j\left(x^i - x^j\right) + \frac{\lambda^j}{\mu^j}\left(v^i - v^j\right)$$

を意味する。Varian (1983) は、

(1) 下記の Afriat の不等式をみたす $U^i, \lambda^i, V^i, \mu^i \quad (i = 1, 2, ..., n)$ が存在する、

$$\begin{aligned} U^i &\leq U^j + \lambda^j p^j\left(x^i - x^j\right) + \frac{\lambda^j}{\mu^j}\left(V^i - V^j\right) \\ V^i &\leq V^j + \mu^j q^j\left(z^i - z^j\right) \quad \text{for } i, j = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

(2) $\left(q^i, z^i\right)$ と $\left(\left(p^i, 1/\mu^i\right), \left(x^i, V^i\right)\right)$ は Afriat の不等式[7]をみたすような $\left(V^i, \mu^i\right)$ を適当に選択することで GARP をみたす、

(3) 弱分離可能で、凹、単調、連続、局所非飽和をみたす効用関数が存在し、その最適化行動の結果としてデータを再現可能である

これら (1)-(3) が同値であることを証明した。

この必要十分条件に基づいてデータが弱分離可能であるか検証するにはどうすればよいだろうか?選択肢は (1) と (2) の二つである。まず、(1) を用いる手法を考えてみよう。データのサンプルサイズを n とする。その中から任意の二つをもってきて、財ベクトル全体と、一部のサブセットに関してこの $2n(n-1)$ 個の Afriat の不等式をみたすよう $U^i, \lambda^i, V^i, \mu^i$ を見つける必要がある。次に (2) を考えよう。これは一つのサブ効用関数でまとめられる財グループの消費ベクトル z^i を一つの指数 V^i でまとめ、$1/\mu^i$ を V^i に対応する価格とみなし、グループ内で GARP を満たすかどうかを判定するものである。問題は、$\left(V^i, \mu^i\right)$ である。前者は財グループの数量指数、後者は財グループの価格指数であるが、それらをどう求めてよいか不明である。Varian が用意したアルゴリズムでは、ある適当な二つの指数をとってきて、同一グループに属する商品の数量と価格に関して Afriat の不等式をみたすことを確認したうえで、そのもとで、財グループ内で GARP が成立するかどうか判定している。もしも適当にとった指数のもとでデータが z のグループ内、およびグループ財の数量と価格ベクトルを指数で表したものと他の財が GARP を満たしているのであれば、データは弱分離可能と整合的である。しかしながら、ある指数の下で GARP をみたしていなくとも、それは必ずしも弱分離可能性と矛盾しているとは言えない。採用した指数が間違っている可能性があるためで

[7] $v\left(y_i\right) \leq v\left(y_j\right) + \mu^j q^j\left(z^i - z^j\right)$ for $i, j = 1, 2, ..., n.$

ある。実際、Varian が開発したアルゴリズムでは、コブダグラス型の効用関数からシミュレートされたデータですら、弱分離可能性を棄却してしまうという指摘を Barnett and Choi (1989) が行っている[8]。Fleissig and Whitney (2003) は、(2) ではなく、(1) を用いることを提案している。(1) を用いるためには、すべての財と価格のデータに関して、二つの不等式をみたすような $(U^i, \lambda^i, V^i, \mu^i)$ を見出さねばならない。Fleissig and Whitney (2003) は、物価・数量指数として Törnqvist index を用い、かつ、線形計画法を用いることで (1) の検証が可能であることを示し、かつ、Varian のアルゴリズムよりも信頼性が高くなることを見出している[9]。Hjerstrand (2009) は、弱分離可能性検証に関する様々なノンパラメトリック検定の結果をまとめ、各手法の利点と問題点を整理している[10]。近年、Cherchye et al. (2015) は、GARP の判定に Indicator Function が使われており、混合整数線形計画法 (Mixed Integer Linear Programming) の問題に変換することが可能であることを指摘した。そして、Afirat の不等式を用いず (すなわち凹性を仮定しない) に高弱分離可能性を検証する手法を開発し、大幅に計算時間を短縮し、かつ精度の高いアルゴリズムのになるとしている[11]。

分離可能性の検証は消費行動の実証分析の基本でありながら、近年になりようやく実行可能かつ十分な検出力を有する統計分析手法が開発された状態にある。しかしながら、現在においても多くの実証分析は、局所的な近似式を用いているか、誤って弱分離可能性を棄却してしまう可能性の高いアルゴリズムを用いており、それらは再検証されるべきであろう。

4.2 Generalized Composite Commodity Theorem (GCCT): Lewbel (1996)

弱分離可能性を仮定せずに、ある消費財グループを集合財としてみなすことを正当化する、古典的な理論が存在する。Hicks-Leontief の Composite Commodity Theorem と呼ばれるものであり、ある財グループの価格の変動が完全に連動していれば、そのような財は一つの集合財とみなすことが可能である、というものである。もしも二つの財の価格の変動が完全に連動しており、価格変化率が一致しているなら、それらの財の価格は初期の相対価格がそのまま維持されることになる。初期の相対価格は固定されているからパ

[8] W. Barnett and S. Choi (1989) "A Monte Carlo Study of Tests of Blockwise Weak Separability," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 7, No. 3, 363-377.

[9] Fleissig, A., Whitney, G. A. (2003) "A new PC-based test for Varian's weak separability condition," *Journal of Business and Economic Statistics* 21, 133–145.

[10] Hjerstrand, P., (2009) Measurment Error: Consequences, Applications and Solutions. Emerald Group Publishing Ltd, Ch. "A Monte Carlo Study of the Necessary and Sufficient Conditions for Weak Separabillity," pp. 151–182.

[11] Laurens Cherchye, Thomas Demuynck, Bram De Rock (2015) "Revealed preference tests for weak separability: An integer programming approach," *Journal of Econometrics,* Volume 186, Issue 1, 2015, Pages 129-141, ISSN 0304-4076.

ラメターとみなすことができる。すると、時系列データを用いた消費分析を行う場合、共通の財価格の変化率を価格の代理変数として用い、初期の相対価格をパラメターとみなすことで失う情報は何もない。もっとも、グループに属するすべての価格が完全に比例している、という仮定は非常に強く、簡単に棄却されてしまう。

この、極端に非現実的と考えられていた定理は、Lewbel (1996) により再び注目されることになる[12]。 Lewbel (1996) により一般化され、より現実的となった、Generalized Composite Commodity Theorem (GCCT) を紹介しよう。

p_i : i 財の価格、P_I : I グループの財価格の価格指数、とし、

$$r_i = \ln p_i, R_I = \ln P_I$$
$$\rho_i = \ln\left(p_i/P_i\right) = r_i - R_I$$

すなわち、相対価格とする。また、$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{R}$ をベクトルとする。また、i 財価格の支出シェアは、z を支出総額とすると、

$$w_i = g_i\left(\boldsymbol{r}, z\right) + e_i$$

と書けるとしよう。ただし、$g\left(\boldsymbol{r}, z\right)$ は通常のマーシャルの需要関数から得られる i 財の支出シェアであり、それに誤差項が付加されている。また、$E\left(e_i|\boldsymbol{r}, z\right) = 0$、すなわち、誤差項の平均はゼロとする。ここで、Lewbel (1996) は、需要関数が合理的な意思決定の下で生成されており、かつ、$\boldsymbol{\rho}$ が $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{z}$ から独立であると仮定する。Hicks の定理では、$\boldsymbol{\rho}$ は一定と仮定されていたが、ここでは $\boldsymbol{\rho}$ は一定である必要はなく、支出総額や一般物価から独立であると仮定されている。そこで、集合財需要を下記のように作成する。

$$G_I^*\left(\boldsymbol{r}, z\right) = \sum_{i \in I} g_i\left(\boldsymbol{r}, z\right)$$

と定義する。すなわち、財グループに関する支出シェアの和である。ここで、

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}$$

と定義し、さらに、財グループの支出シェアの平均値、

$$G_I\left(\boldsymbol{R}, z\right) = \int G_I^*\left(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho}, z\right) dF\left(\boldsymbol{\rho}\right)$$

と定義する。すると、$G_I\left(\boldsymbol{R}, z\right)$ は足し合わせると 1 になり、価格と所得に関するゼロ次同次性をみたす。さらに、異なる財グループ、I と J の間で、支

[12] Lewbel, A. (1996). "Aggregation Without Separability: A General-ized Composite Commodity Theorem." *The American Economic Review* 86(3): 524-543.

出総額が変化したときの、I 財への支出シェアの変化と J 財の支出シェアとの共分散、すなわち、

$$H_{IJ} = Cov\left[\frac{\partial G_I^*\left(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho}, z\right)}{\partial z}, G_J^*\left(\boldsymbol{R}^* + \boldsymbol{\rho}, z\right)|\boldsymbol{R}, z\right]$$

とし、H_{IJ} を IJ 成分とする正方行列を $\boldsymbol{H}$ とする。すると、$\boldsymbol{H}$ が対称行列であることと、$G_I\left(\boldsymbol{R}, z\right)$ がスルツキーの対称性を満たすこと、は同値となる。

この意味することは、グループ内の相対価格の変動がランダムであり、物価水準や所得と相関がない限り、グループへの総消費を一つの集合財とみなすことが可能である、ということである。これは非常に魅力的な理論であり、農業経済学、資源経済学等、様々な応用分野において近年頻繁に用いられている[13]。

この GCCT が成立するか否かは、「$\boldsymbol{\rho}$ が $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{z}$ から独立である」か否かにかかっている。これを検証するには、グループに属する財の、グループ全体の物価の動きからのかい離が、そのグループ全体の価格指数及び他の財グループの価格指数と直交していることを示す必要がある。これは回帰分析で検証することが可能である。ただし、財価格にトレンドある場合、相対価格と一般物価の独立性の検定には注意が必要である[14]。また、 Sarmiento and Just (2006) は、相対価格が物価指数と独立の時、物価指数の公式に強い制約がかかり、一般に用いられる物価指数と齟齬が出てくることを指摘している[15]。財と物価指数の相対価格が物価指数と直交しているかどうか、例えばインフレ率が高い時に、他の財よりも値上がりしそうな、あるいは値下がりしそうな商品があるかどうか、が問われるわけであるが、私には、多くの研究はサンプルサイズの小さい時系列データで分析されており、大量のミクロの価格データで検証すると GCCT が成立するかどうかは自明ではないと思われる。

4.3 加法分離可能性の検証

弱分離可能性をさらに強化した、加法分離可能性もミクロ・マクロの分析では頻繁に用いられる。選好がグループ間で加法分離であるとき、効用関数は単調増加変換 f によって、下記のような形で表現可能である。

$$\begin{aligned} f\left(\overline{u}\left(x_1, x_2, y_3, y_4\right)\right) &= u\left(x_1, x_2\right) + v\left(y_3, y_4\right) \\ &= u\left(x\right) + v\left(y\right) \end{aligned}$$

---

[13] Lee L. Schulz & Ted C. Schroeder & Tian Xia, (2012) "Studying composite demand using scanner data: the case of ground beef in the US," *Agricultural Economics,* vol. 43, pages 49-57, 等。

[14] Davis, G. C. (2003) "The generalized composite commodity theorem: stronger support in the presence of data limitations," *Review of Economics and Statistics*, 85 , 476–80.

[15] Camilo Sarmiento & Richard Just, (2006) "A note on commodity price aggregation bias without separability," *Applied Economics Letters,* vol. 13(6), pages 365-368.

弱分離可能性と異なり、各財からの限界効用は他の財グループの消費水準から独立となる。

加法分離可能性は、異時点間の消費決定、余暇消費選択、および状態依存型財の状態間の選好を表現する期待効用関数の基礎として、非常に重要な役割を演じており、この仮定がどの程度現実を反映しているのか、検証することは極めて重要である。

加法分離可能な選好は弱分離可能でもあるので、異なるグループ G, H 間の代替効果に関しては下記が成立する。

$$
\begin{aligned}
s_{ij} &= \left.\frac{\partial q_i}{\partial y_G}\frac{\partial y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} \\
&= \mu_{GH}\frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial q_j}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

ここで、加法分離可能な場合は、グループ間の代替効果はすべて同一になるため、μ_{GH} はグループに依存せず

$$
\begin{aligned}
s_{ij} &= \left.\frac{\partial q_i}{\partial y_G}\frac{\partial y_G}{\partial p_j}\right|_{u=const} \\
&= \mu\frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial q_j}{\partial y}
\end{aligned}
$$

となる。これは非常に強い制約である。また、所得効果に関しても強い制約が課される。各サブ効用関数の中の消費財が一種類であり、かつ効用関数の二回微分が負であると仮定する。効用最大化の一階条件から

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u\left(x^i\right)}{\partial x_j} &= \lambda^i p_j^i \\
\frac{\partial v\left(y^i\right)}{\partial y_j} &= \lambda^i q_j^i
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
q_j^i\frac{\partial u\left(x^i\right)}{\partial x_j} = p_j^i\frac{\partial v\left(y^i\right)}{\partial y_j}
$$

上式の消費量に通常の需要関数を代入し、所得 m に関して微分すると、

$$
q_j^i\frac{\partial^2 u\left(x^i\right)}{\partial x_j^2}\frac{\partial x_j}{\partial m} = p_j^i\frac{\partial^2 v\left(y^i\right)}{\partial y_j^2}\frac{\partial y_j}{\partial m}
$$

二回微分が負であるため、もしも x_j の所得効果が負であれば、自動的に y_j の所得効果も負になる。これは任意のグループ間で成立するため、すべての財の所得効果は同一の符合となる。とこけで、以前にみたように、予算制約より、

$$
\sum_{i=1}^{N}\omega_i\varepsilon_{im} = 1
$$

すなわち、所得効果の加重平均は常に 1 でなければならない。これは、所得効果がすべて同一の符合である場合、それは負にはなりえない、すなわち、すべての財は正常財であることを意味する。

また、改めて加法分離可能な場合の効用最大化行動の一階条件、

$$\frac{\partial u\left(x^i\right)}{\partial x_j} = \lambda^i p_j^i$$
$$\frac{\partial v\left(y^i\right)}{\partial y_j} = \lambda^i q_j^i,$$

をみると、加法分離可能性の仮定により、マルチプライヤーが二式で同じになっている。弱分離可能性の時と同様に、Afriat の不等式を考えると、

$$\begin{aligned} &u^i \leq u^j + \lambda^j p^j \left(x^i - x^j\right) \\ &v^i \leq v^j + \mu^j q^j \left(y^i - y^j\right) \\ &\lambda^j = \mu^j \end{aligned}$$

となる。Varian (1983) は、

(1)　二つの凹、連続、単調な効用関数の和によりデータを効用最大化行動の結果として解釈可能である、と、(2) 下記の二つの不等式をみたすような $U^j, \lambda^j, V^j,$ のセットが存在する、

$$\begin{aligned} &U^i \leq U^j + \lambda^j p^j \left(x^i - x^j\right) \\ &V^i \leq V^j + \lambda^j q^j \left(y^i - y^j\right) \end{aligned}$$

の二つが同値であることを証明している。残念ながら、弱分離可能性の定理における GARP を用いた同値性については知られておらず、したがって、Varian(1983) のアルゴリズムは用いることができない。しかし、この Afriat のアルゴリズムを用いることで加法分離可能性の検証は可能である。Jones and Stracca (2008) は、線形計画法を用い、λ^j と μ^j を異なるものとして推計し、

$$\sum_j \left(\frac{\lambda^j - \mu^j}{\mu^j}\right)^2$$

をゼロにすることが可能か否かで、加法分離可能性の検証が可能であることを示している[16]。

動学モデルにおける加法分離可能性はマクロ経済学において非常に重要な意味を有している。これは動学モデルを議論するときに改めて触れることにする。

[16] Jones, Barry E. & Stracca, Livio, (2006) "Are money and consumption additively separable in the euro area? A non-parametric approach," *Working Paper Series 704, European Central Bank.*

5　まとめ

本講義ノートでは、需要関数を推計する際に重要な役割を果たす選好関係への制約、すなわち効用関数の構造に関して説明し、その統計的分析に関する近年の研究の進展をまとめた。残念ながら、日本の消費研究においては、本講義ノートで触れたような、ノンパラメトリック手法を用いた分離可能性の検証がされたという話しを筆者は聴いたことがない。パラメトリックモデルを用いた検証はいくつか存在するが、対数線形近似等の局所的な近似式を用い、分離可能性という大域的な性質の検証を行った場合、分離可能性よりもさらに強い仮説の検定になってしまう可能性があり (代替の弾力性や所得弾力性等が一定等)、信頼できる結果になるとは限らない。一方、分離可能性の仮定が成立しない場合、需要関数の推計は非常に困難となる。分離可能性、特に弱分離可能性が成立しない場合、人々の需要関数の構造は複雑となる。例えば余暇と消費財購入、サービス消費と財消費の関係、外食と余暇等の間に分離可能性がない場合、人々の余暇の機会費用の変化は、各財の代替効果に複雑な影響を与えうる。特にサービス需要と財消費、および余暇消費の間の分離可能性については、真剣に検証する価値のあるものと考えられる。