2009年度冬学期　応用マクロ経済学講義ノート: DP(1)

阿部修人

平成21 年11 月28 日

1　動的計画法(Dynamic Programming)

本章では動的計画法(Dynamic Programming) の簡単な解説を行う。厳密な議論は避け、Bellman 方程式の意味および具体的な解法にについて解説する。より一般的、かつ厳密な議論に関してはStokey and Lucas with Prescott(1987) を参照すること。

1.1　基本モデル

以下の単純な経済成長モデルを考える。

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_o^T} \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \tag{1}$$

subject to

$$c_t + k_{t+1} = Af(k_t) \tag{2}$$

k_0 given, $k_t \geq 0$, $0 < \beta < 1$.　各変数の定義は標準的なテキストと同一である。

この問題の解はどのように記述できるかを考えてみよう。上記の問題は条件付最適化問題であるが、(2) を目的関数に代入することにより、

$$\max_{\{k_{t+1}\}_o^T} \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(Af(k_t) - k_{t+1}) \tag{3}$$

k_0 given, $k_t \geq 0.$ の形に変形することが出来る。上記の最適化問題では資本ストックの系列に関して最適解を探せば良いことになる[1]。効用関数と生産関数が微分可能であり、十分滑らかであり、かつ内点解であると仮定すると、各期の資本ストックに関して偏微分し、一階条件式を得ることが出来る。

$$\beta^t U'\left(Af\left(k_t\right) - k_{t+1}\right)(-1) + \beta^{t+1} U'\left(Af\left(k_{t+1}\right) - k_{t+2}\right) Af'\left(k_{t+1}\right) = 0 \quad (4)$$

これが t=1,2,3,...,T-1 に関して成立している。t=T、すなわち terminal point において、$k_{T+1} = 0$ でなければばならない。[2]

上の一階条件式は T 個の非線形の連立方程式である。未知数は k_1 から k_T までの T 個の資本ストックである。したがって、原理的には非線形連立方程式体系を解く問題とみなすことが出来る。しかしながら、T が大きな値をとるときには、この非線形連立方程式体系を解くことは非常に困難となる。

(1) を解析的に解く、すなわち、closed form の形で、各期の最適な資本ストックを得ることは一般的に不可能である。しかしながら、非常に特殊なケースに限り、closed fomr の形で解を得ることができる。

関数形として、以下の仮定をおく。

$$U\left(c_t\right) = \ln c_t \quad (5)$$

$$Af\left(k_t\right) = Ak_t^{\alpha}. \quad 0 < \alpha < 1 \quad (6)$$

すると、一階条件は以下のようになる。

$$\beta^t \frac{1}{Ak_t^{\alpha} - k_{t+1}}(-1) + \beta^{t+1} \frac{\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}}{Ak_{t+1}^{\alpha} - k_{t+2}} = 0, \quad (7)$$

$$k_{T+1} = 0. \quad (8)$$

ここで、新たな変数を導入し

$$X_t = \frac{k_{t+1}}{Ak_t^{\alpha}} \quad (9)$$

[1] より正確には、資本ストックが負にならないような制約が存在するが、生産関数および効用関数の両方に稲田条件を課せば、資本ストックのゼロ制約はバインドされるとはない。

[2] この理由は各自考えてみよ。最後の期に資本ストックを残してなにか良いことがあるだろうか?

とする。(7) の両辺に k_{t+1} を乗じ、整理すると一階条件は以下のようになる。

$$X_{t+1} = 1 + \alpha\beta - \frac{\alpha\beta}{X_t} \tag{10}$$

$k_{T+1} = 0$ であるから、$X_T = 0$ となる。したがって、

$$X_{T-1} = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta - X_T} \tag{11}$$

さらに、

$$X_{T-1} = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} = \alpha\beta \frac{1 - \alpha\beta}{1 - (\alpha\beta)^2}. \tag{12}$$

$$X_{T-2} = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta - \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}} = \alpha\beta \frac{(1 + \alpha\beta)}{1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2} = \alpha\beta \frac{(1 + \alpha\beta)(1 - \alpha\beta)}{(1 - \alpha\beta)\left(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2\right)}. \tag{13}$$

したがって

$$X_{T-2} = \alpha\beta \frac{1 - (\alpha\beta)^2}{1 - (\alpha\beta)^3}. \tag{14}$$

繰り返すと、以下の公式を得ることが出来る。

$$X_t = \alpha\beta \frac{1 - (\alpha\beta)^{T-t}}{1 - (\alpha\beta)^{T-t+1}} \tag{15}$$

無論、この手法は terminal condition がある、すなわち最適化問題の視野が有限である (=T) ことに依存している。T が無限大であるとき、すなわち無限視野の場合は、この後ろ向きに解く手法はそのままでは使うことが出来ない。

1.2 Bellman Equation and Policy Function

ここでは、無限視野の場合、すなわち $T = \infty$ のケースを考える。

$$\max_{\{k_{t+1}\}_o^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(Ak_t^\alpha - k_{t+1}\right). \tag{16}$$

この場合、terminal point がなくなり、$X_T = 0$ の条件を使えなくなる。したがって、前セクションの解法を直接用いることも不可能になる。また、一階条件式は無限個存在することになり、連立方程式体系として解

くことも非常に困難になる。このようなときは、もし解があるとした場合、それがどのような性質を持ちそうか、考えてみる。

(15) において、T を大きくしていくと、右辺は $\alpha\beta$ に収束していく[3]。したがって、t が十分に大きいとき X_t は $\alpha\beta$ にほぼ等しい、すなわち

$$k_{t+1} = \alpha\beta A k_t^{\alpha} \tag{17}$$

となることが予想される。(17) が正しいとすると、最適な資本ストック水準は前期の資本ストックのみに依存することになる。すなわち、各期の最適な資本ストックは

$$k_{t+1} = h\left(k_t\right), \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{18}$$

の形で表されるのではないかと予想される。この関数 $h\left(k_t\right)$ は動的計画法では Policy Function と呼ばれている。このような Policy Function があり、各期の最適な資本ストックが前期の資本ストックのみに依存しているということがわかっていれば、無限の系列 $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ をいきなり求める必要はなく、Policy Function を求めることができれば初期の資本ストック k_0 から容易に各期の最適な資本ストックを得ることができる。

さて、ここで (16) の解がわかっていると仮定しよう。そのときの最大化された生涯効用を初期の資本ストックのみに依存する関数とみなすと

$$V\left(k_0\right) = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(A k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right) \tag{19}$$

$V\left(k_0\right)$ は、k_0 の下で実現可能な最大の生涯効用水準を意味する。次に、時間を一期進めると、

$$V\left(k_1\right) = \max_{\{k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln\left(A k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right) \tag{20}$$

で定義される $V\left(k_1\right)$ は、k_1 の下で実現可能な生涯効用になる。すると、t=0 時点における問題は

$$\max_{k_1} \left[\ln\left(A k_0^{\alpha} - k_1\right) + \beta V\left(k_1\right)\right] \tag{21}$$

となることが予想される。もしも $V\left(k_1\right)$ を知っていれば、上の問題を解くことが可能であり、最適な $k_1 = h\left(k_0\right)$ を得ることが出来る。なお、$V\left(k_0\right)$ を k_0 の下で実現可能な最大の生涯効用水準と定義していたので、

$$V\left(k_0\right) = \max_{k_1} \left[\ln\left(A k_0^{\alpha} - k_1\right) + \beta V\left(k_1\right)\right] \tag{22}$$

[3] $0 < \alpha\beta < 1$ による。

を得ることが出来る。期間を t 期にすると

$$V(k_t) = \max_{k_{t+1}} [\ln(Ak_t^\alpha - k_{t+1}) + \beta V(k_{t+1})] \tag{23}$$

期間によらず、最適化問題が同一の構造をとっていることに注目すると、時間の index を削除することが可能であり

$$V(k) = \max_{k'} [\ln(Ak^\alpha - k') + \beta V(k')] \tag{24}$$

を得ることが出来る。(24) は Bellman 方程式と呼ばれる。また、$V(k)$ は Value Function と呼ばれる。Value Function がわかれば、その解として Policy Function を得ることが出来、Policy Function がわかれば、各期の最適な資本ストックの水準を得ることが出来るのである。無論、全ての動的最適化問題がこのような形で定式化できるとは限らないが、各期で繰り返し同一の問題に直面することが多い経済学の問題では応用範囲は広い。

1.3 一般ケース

Ljungqivist and Sargent (2004) に従い、各期の return function を r、transition function を g で表し、動的最適化問題を以下のように定義する。

$$\max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \tag{25}$$

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t) \tag{26}$$

$$x_0 : given. \tag{27}$$

上記の問題を解いて得た最適化された生涯効用を V^* であらわすと

$$V^* = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \quad s.t. x_{t+1} = g(x_t, u_t) \quad \text{and } x_0 \tag{28}$$

そこで、Bellman 方程式は以下のように定義される。

$$V(x_t) = \max_u (r(x, u) + \beta V(x')) \quad s.t. x' = g(x, u). \tag{29}$$

ここで問題になるのは、(1)Bellman 方程式を満たす関数 V は存在するか否か、(2) 存在するとき、それは一意か、それとも複数存在するか、(3)

その解はV^*と一致するか?である。もしもBellman方程式の解が一つしか存在せず、しかもV^*と一致すれば、無限視野の最適化問題は一期間の最適化問題を満たす関数Vを探す問題に変換することが可能になる。

残念ながら、常にBellman方程式の解がV^*と一致するとは限らない。また、Bellman方程式をみたす関数が複数存在する可能性もある。以下に、Bellman方程式がユニークな解をもち、それがV^*と一致するための十分条件を示す。詳しくはStokey and Lucas with Prescott(1987),

chapter 4, section 2を参照せよ。

(1)　rは強く凹かつ有界である。

(2)　集合$\left\{(x_{t+1}, x_t) : x_{t+1} \in g(x_t, u_t), u_t \in R^k\right\}$は凸かつコンパクトである。

(1)は、各期の効用関数が凹関数かつ、上限値があることを意味し、(2)は各期の生産可能集合が凸かつコンパクトであることを意味する。以上の条件の下でBellman方程式をみたす関数Vは以下の性質を持つ。

1.　$V(x)$は単調増加関数である。

2.　$V(x)$は強く凹であり、Policy functionはsingle-valued functionになる。

3.　$V(x)$はV^*と一致する。

4.　Bellman方程式の解Vは以下のiterationで得ることが出来る。

$$V_{j+1} = \max_u \left(r(x, u) + \beta V_j(x')\right) \quad s.t. x' = g(x, u). \tag{30}$$

5.　上記のiterationの収束先として得られたValue Function $V(x)$は以下の性質を満たす。

$$V'(x) = \frac{\partial r}{\partial x}(x, h(x)) + \beta \frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x)) V'(g(x, h(x))). \tag{31}$$

5の性質はBenveniste and Scheinkmanの定理と呼ばれるものである。これは包絡線の定理とも呼ばれる。なぜなら、状態変数の一単位の増加は、それが瞬間効用関数rと生産可能性集合gを拡大させる直接効果のみがValue Functionに影響を及ぼし、Policy Functionの変化を通じた間接効果はValue Functionには影響を与えないことを示しているためである。

Benveniste and Scheinkmanの定理はクーンタッカーを用いた解との対比をするときに有効である。(24)の問題を考えてみよう。ここにBenveniste and Scheinkmanの定理を当てはめると

$$V'(k) = \frac{\alpha A k^{\alpha-1}}{A k^{\alpha} - k'}. \tag{32}$$

最適化の一階条件は

$$0=\frac{-1}{Ak^{\alpha}-k'}+\beta V'\left(k'\right) \tag{33}$$

$V'\left(k\right)$ の中が k と k' であることに注意してこの導関数を消去すると

$$-\frac{1}{Ak^{\alpha}-k'}+\beta\frac{\alpha Ak'^{\alpha-1}}{Ak'^{\alpha}-k''}=0. \tag{34}$$

ところで、DP ではなく、通常の動学問題として解くとオイラー方程式を下記のように得ることができる。

$$L=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^{t}\ln\left(Ak_{t}^{\alpha}-k_{t+1}\right),$$
$$\beta\frac{A\alpha k_{t}^{\alpha-1}}{Ak_{t}^{\alpha}-k_{t+1}}-\frac{1}{Ak_{t-1}^{\alpha}-k_{t}}=0$$

したがって、Benveniste and Scheinkman の定理から、通常のオイラー方程式と一致するのである。

条件 (2) は内生成長理論など、収穫逓増を含む生産関数を考えなければ通常は満たされる仮定である。しかし、(1) は問題を含んでいる。例で用いた対数効用関数には上限は存在せず、したがってこの条件を満たさない。実際、効用関数や利潤関数が有界であると仮定することはごく稀であり、多くの場合、この定理を用いることが出来ないのである。例えば、有名な Hall の消費のモデルでは効用関数が 2 次式と仮定しているが、この下では Bellman 方程式を満たす関数は複数存在することが知られている。Stokey and Lucas with Prescott(1987) の 4.4 節で有界でないケースを論じているが、マクロモデルで頻繁に用いられる関数形において、Value Function の一意性や最適性をことは通常非常に困難である。実際には、制約条件の凸、コンパクト性と効用関数が凹であることを確認し厳密な議論を避けて Value Function を用いることが多い。この厳密性の欠如が深刻な問題をつくるかどうかは今後の課題であるが、近年の論文によると、有界のケースを非有界のケースの多くの場合に拡張できるようである。

ここで興味深い性質は 4. である。最適化問題に解があることを示す定理は多いが、具体的にその解を導くアルゴリズムまで示すものは少ない。この iteration は Value Function Iteration と呼ばれるものであり、Dynamic Programming を解く際に中心的な役割を担うことになる。

1.4 Value Function Iteration

(30) で与えられたアルゴリズムを具体的にどう利用するか考える。まず、j=0 のとき、すなわち最初の時点での問題を考える。すると

$$V_1 = \max_u \left(r\left(x,u\right) + \beta V_0\left(x'\right)\right) \quad s.t. x' = g\left(x,u\right) \tag{35}$$

となる。右辺の最大化問題を解くには関数 V_0 を知る必要があるが、このアルゴリズムではとくに V_0 に関しては何も記述がない。上記の問題がもしも縮小写像になっていれば初期の V_0 は任意の関数でよいことが知られており、どんな関数、たとえば定数でも構わない。上記の問題を解いて得た関数 V_1 を右辺に持っていき、j=1 として

$$V_2 = \max_u \left(r\left(x,u\right) + \beta V_1\left(x'\right)\right) \quad s.t. x' = g\left(x,u\right) \tag{36}$$

と定義する。こうして V_j と V_{j+1} あるいはそれを生成する Policy Function $h_j\left(x\right)$ と $h_{j+1}\left(x\right)$ が十分に近くなったとき、すなわち iteration が違いを生み出さなくなるまでこのプロセスを続ける。そして得られた関数が求める Value Function および Policy Function、またはそれらの近似とみなすのである。

一部門の最適成長モデルを用いて、Value Function Iteration を実際に応用してみる。

まず $V_0 = 0$ を仮定する。すると、j=0 の問題は

$$V_1 = \max_{k'} \ln\left(Ak^\alpha - k'\right) + \beta \times 0. \tag{37}$$

この問題の解は $k' = 0$ のとき、

$$V_1 = \ln Ak^\alpha = \ln A + \alpha \ln k \tag{38}$$

となる。つぎに、j=1 として、この V_1 を用いて

$$V_2 = \max_{k'} \ln\left(Ak^\alpha - k'\right) + \beta\left(\ln A + \alpha \ln k'\right) \tag{39}$$

とする。この最適化問題の一階条件は

$$\frac{-1}{Ak^\alpha - k'} + \beta\alpha\frac{1}{k'} = 0 \tag{40}$$

である。整理すると

$$k' = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}Ak^\alpha \tag{41}$$

であり、これを代入すると

$$V_2 = \ln\left(\left(1-\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right)Ak^{\alpha}\right) + \beta\left(\ln A + \alpha\ln\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}Ak^{\alpha}\right) \tag{42}$$

したがって

$$V_2 = \ln\frac{A}{1+\alpha\beta} + \beta\ln A + \alpha\beta\ln\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} + \left(\alpha+\alpha^2\beta\right)\ln k \tag{43}$$

さらにこれを用いて j=2 とすると

$$V_3 = \max_{k'}\ln\left(Ak^{\alpha}-k'\right) + \beta\left(Const1 + \left(\alpha+\alpha^2\beta\right)\ln k'\right) \tag{44}$$

この一階条件は

$$\frac{-1}{Ak^{\alpha}-k'} + \beta\left(\alpha+\alpha^2\beta\right)\frac{1}{k'} = 0 \tag{45}$$

であり、

$$k' = \frac{\alpha\beta\left(1+\alpha\beta\right)}{1+\alpha\beta\left(1+\alpha\beta\right)}Ak^{\alpha} \tag{46}$$

が解となる。V_3 は

$$V_3 = Const2 + \alpha\left(1+\alpha\beta+\left(\alpha\beta\right)^2\right)\ln k' \tag{47}$$

となる。これを繰り返していくと、

$$V\left(k\right) = \frac{1}{1-\beta}\left(\ln\left(A\left(1-\alpha\beta\right) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln\left(A\alpha\beta\right)\right)\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln k \tag{48}$$

を得る。これが正確な Value Function であり、付随する Policy Function は

$$k' = \alpha\beta k^{\alpha} \tag{49}$$

である。

この例からわかるように、Value Function は手法としては単純であるが、収束が遅い。上記の例では lnk の係数は等比数列の和として表れ、その無限和が所望の Value Function となる。もう少し速く収束させる、または容易に Value Function を求める手法がいくつか開発されている。

1.5 Guess and Verify

もっとも単純な、しかし応用範囲の狭い手法が Guess and Verify である。これは、Value Function を Guess し、その関数が Bellman Equation を満たすことを確認する、すなわち Verify するというものである。[4]これは Value Function の形状についてある程度の知識があることが前提となる。

再び、(16) を用いて Guess and Verify を実践してみる。効用関数が対数であることから、Value Function も対数であると Guess してみよう。すなわち、

$$V(k) = E + F \ln k \tag{50}$$

ただし、E と F は定数である。ここで、この Value Function が Bellman Equation を満たす、すなわち

$$E + F \ln k = \max_{k'} \ln \left(Ak^{\alpha} - k'\right) + \beta \left(E + F \ln k'\right) \tag{51}$$

であることを Verify することができればよい。最適化の一階条件は

$$0 = \frac{-1}{Ak^{\alpha} - k'} + \frac{\beta F}{k'} \tag{52}$$

である。したがって

$$k' = \frac{\beta F A k^{\alpha}}{1 + \beta F} \tag{53}$$

となる。これを Bellman Equation に代入して整理すると

$$E + F \ln k = \ln \frac{A}{1 + \beta F} + \alpha \ln k + \beta E + \beta F \ln \frac{\beta F A}{1 + \beta F} + \alpha \beta F \ln k \tag{54}$$

これが恒等式であるとすると

$$F = \alpha + \alpha \beta F, \tag{55}$$

$$E = \ln \frac{A}{1 + \beta F} + \beta E + \beta F \ln \frac{\beta F A}{1 + \beta F}. \tag{56}$$

これを E,F に関する連立方程式と考えると

$$F = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \tag{57}$$

[4] Long and Plosser(1983) は Guess and Verify を用いて Dynamic Programming を解いている。

$$E = \frac{1}{1-\beta}\left(\ln\frac{A}{1+\beta F} + \beta F \ln\frac{\beta F A}{1+\beta F}\right) \tag{58}$$

を得る。E と F に関して解ききったので、この関数は Bellman Equation を満たすことがわかり、この Guess は正しかったことが証明されたことになる。

この手法が実際に応用可能なモデルは数えるほどしかなく、あまり実用的ではない。また、どのような関数を Guess するかに関しても決まっ手法はなく、一種の技法として考えるしかない。

1.6 Policy Function Iteration

これは Value Function の代わりに Policy Function を iterate する手法であり、Value Function よりも速く収束することが多いと言われている。別名 Howard's Policy Improvement Algorithm とも言われる。

1. まず、実行可能な Policy Function の候補

$$u = h_0(x_0) \tag{59}$$

を適当にとる。

2. つぎに、この Policy Function により得られる Value Function の候補を計算する。すなわち

$$V_0(x_0) = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, h_0(x_t)) \quad s.t. x_{t+1} = g(x_t, h_0(x_t)) \quad \text{and } x_0. \tag{60}$$

3. 上で得られた Value Function の下で、新たに Policy Function を計算する。すなわち

$$\max_u (r(x,u) + \beta V_0(x')) \quad s.t. x' = g(x,u) \tag{61}$$

を解く。

4. また 1. から繰り返し、Policy Function があまり変化しなくなるまで続ける。

再び、(16) を用いて Policy Function Iteration を実践してみる。

1. まず、実行可能な Policy Function を適当に推測する。例えば、貯蓄性向が 1/2 であると仮定し

$$k_{t+1} = \frac{1}{2} A k_t^{\alpha} \tag{62}$$

とする。

2. これを効用関数に代入し、生涯効用、すなわち Value Function の候補を計算する。

$$V_0(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(A k_t^{\alpha} - \frac{1}{2} A k_t^{\alpha}\right) \tag{63}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(\frac{1}{2} A k_t^{\alpha}\right) \tag{64}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln\left(\frac{1}{2} A\right) + \alpha \ln k_t\right) \tag{65}$$

ここで、

$$k_t = \frac{1}{2} A k_{t-1}^{\alpha} \tag{66}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\alpha} A^{1+\alpha} k_{t-2}^{\alpha^2} \tag{67}$$

であることを利用して

$$k_t = \ln D + \alpha^t k_0 \tag{68}$$

ただし、D は定数である。したがって、

$$V_0(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln\left(\frac{1}{2} A\right) + \alpha \ln D + \alpha^{t+1} \ln k_0\right) \tag{69}$$

$$V_0(k_0) = const + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k_0. \tag{70}$$

3. 上で求められた Value Function を用いて Bellman Equation に戻ると

$$V_0(k) = \max_{k'} \ln(Ak^\alpha - k') + \beta \left(const + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln k' \right) \tag{71}$$

この一階条件を用いると

$$\frac{-1}{Ak^\alpha - k'} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \frac{1}{k'} = 0 \tag{72}$$

したがって

$$k' = \alpha\beta A k^\alpha \tag{73}$$

となり、一回の iteration で正しい解が得られたことになる。