

# 2020年度応用マクロ経済学講義ノート

## Shooting and RBC

阿部修人

2020年5月

### 1 Shooting

RBCモデルを線形近似した上で、あるいは Linear-Quadratic で近似して解く手法は、動学システムが微分可能であり、かつ、定常状態近傍に限定する場合は、容易に実行でき、かつ精度の高いものである。しかしながら、非常に長期にわたる分析の場合、あるいは微分可能でない要素が含まれるときは、線形近似手法は有効ではない。非線形問題の解法には様々なものが考えられているが、ここでは、小規模なマクロ経済分析でよく用いられる Shooting を紹介し、応用例として、著名な Hayashi-Prescott<sup>1</sup>型の RBC モデルの解法および様々な政策実験を紹介する。

### 2 Hayashi-Prescott Type RBC Model

#### 2.1 The Model

- この節では Hayashi-Prescott 型の RBC ( Real Business Cycle ) モデルのセットアップを解説する。

#### 2.2 Households

不確実性の存在しない、単純な、分権化されたマクロの一般均衡モデルを考える。

- The Intertemporal Utility Function

---

<sup>1</sup>Hayashi, F. and E. C. Prescott (2002) "The 1990s in Japan: A Lost Decade." Review of Economic Dynamics, 5, pp. 206-235.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t N_t U(c_t, h_t, e_t) \text{ with } U(c_t, h_t, e_t) = \log c_t - g(h_t)e_t. \quad (1)$$

- $N_t$  : 家計における労働力の人数 (外生変数  $N_{t+1} = (1 + n_t)N_t$  に従う)
- $E_t$  : 家計における雇用されている人数
- $e_t = E_t/N_t$  : 家計の雇用率 (操作変数)
- $c_t = C_t/N_t$  : 1人当たり消費 (操作変数)
- $h_t$  : 週当たり労働時間 (政策変数)
- $g(h_t)$  : 家計の労働の不効用関数

$$g(h_t) \approx \alpha(1 + (h_t - 40)/40), \quad (2)$$

$$= \alpha \left( \frac{h_t}{40} \right). \quad (3)$$

ここでは、人口のうち、どの程度の割合の家計が労働供給をどの程度行うかを内生化しているが、週当たりの労働時間は外生であると仮定する。労働供給をする場合の限界負効用が、政府により規制できると仮定されているのである。これは、かつて土曜日の午前中は就業するのが一般的であったが、週40時間労働を実現するために、週休二日制の導入を政府が平成六年に導入したことに対応するためである。

• The Budget Constraint

$$(1 + \tau_t^c)C_t + X_t \leq (1 - \tau_t^h)w_t h_t E_t + (1 - \tau_t^k)r_t K_t + \tau_t^l N_t, \quad (4)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + X_t. \quad (5)$$

- $X_t$  : 貯蓄 (投資)
- $K_t$  : 資本ストック
- $\tau_t^l$  : 移転所得
- $\tau_t^c$  : 消費税 (政策変数)
- $\tau_t^h$  : 労働所得税 (政策変数)
- $\tau_t^k$  : 資本所得税 (政策変数)
- 政府の税収は全て  $\tau_t^l$  によって再び家計に移転される。このモデルでは国債は捨象している。Distortotinally tax が入っているので、

このモデルでは Ricardian Equivalence は成立していないが、コブダグラス型生産技術と対数効用関数の際には、資本課税の存在による最適値からの乖離はごくわずかである。詳しくは Chamley (1986) を参照せよ<sup>2</sup>。

– (4) 及び (5) を労働力数  $N_t$  で割ると ,

$$\begin{aligned}(1 + \tau_t^c)c_t + x_t &\leq (1 - \tau_t^h)w_t h_t e_t + (1 - \tau_t^k)r_t k_t + \tau_t^l, \\ (1 + n_t)k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + x_t.\end{aligned}$$

• Lagrangean

$$\begin{aligned}L &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [(\log c_t - g(h_t)e_t)] + \\ &\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \lambda_t [(1 - \tau_t^h)w_t h_t e_t + (1 - \delta + (1 - \tau_t^k)r_t) k_t - (1 + \tau_t^c)c_t + \tau_t^l - (1 + n_t)k_{t+1}]\end{aligned}$$

• The Equilibrium Conditions

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta \left( \frac{1 + \tau_t^c}{1 + \tau_{t+1}^c} \right) (1 + n_t)^{-1} (1 - \delta + (1 - \tau_{t+1}^k)r_{t+1}), \quad (6)$$

$$(1 + n_t)k_{t+1} = (1 - \tau_t^h)w_t h_t e_t + (1 - \delta + (1 - \tau_t^k)r_t) k_t - (1 + \tau_t^c)c_t + \tau_t^l, \quad (7)$$

$$w_t = \frac{g(h_t)c_t(1 + \tau_t^c)}{(1 - \tau_t^h)h_t}. \quad (8)$$

## 2.3 Firm

• Profit Function and Production Technology .

$$Y_t - (r_t K_t + w_t h_t E_t) \text{ with } Y_t = K^\theta (A_t h_t E_t)^{1-\theta}.$$

where  $A_{t+1} = (1 + a_t)A_t$ .

• The Equilibrium Conditions

<sup>2</sup>Chamley, C. (1986). Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives. *Econometrica*, 54(3), 607-622. doi:10.2307/1911310

$$r_t = \theta K_t^{\theta-1} A_t^{1-\theta} (h_t E_t)^{1-\theta},$$

$$w_t = (1 - \theta) K_t^\theta A_t^{1-\theta} (h_t E_t)^{-\theta}.$$

つまり,

$$r_t = \theta A_t^{1-\theta} k_t^{\theta-1} (h_t e_t)^{1-\theta},$$

$$w_t = (1 - \theta) A_t^{1-\theta} k_t^\theta (h_t e_t)^{-\theta}.$$

- ここで,  $s_t \equiv k_t / (A_t h_t e_t)$  とおくと,

$$r_t = \theta s_t^{\theta-1}, \quad (9)$$

$$w_t = (1 - \theta) A_t s_t^\theta. \quad (10)$$

## 2.4 Government

- 政府は税収を全て家計に還元する.

$$\tau_t^l = \tau_t^c c_t + \tau_t^h w_t h_t e_t + \tau_t^k r_t k_t$$

- これに (9) と (10) を代入すると, 次の通り.

$$\tau_t^l = \tau_t^c c_t + \tau_t^h (1 - \theta) A_t s_t^\theta h_t e_t + \tau_t^k \theta s_t^{\theta-1} k_t \quad (11)$$

## 3 Dynamic General Equilibrium

### 3.1 System Equations

- (9) 及び (10) を (6) から (8) に代入すると, 一般均衡の条件が導かれる.

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta \left( \frac{1 + \tau_t^c}{1 + \tau_{t+1}^c} \right) (1 + n_t)^{-1} (1 - \delta + (1 - \tau_{t+1}^k) \theta s_{t+1}^{\theta-1}), \quad (12)$$

$$(1 + n_t)k_{t+1} = (1 - \tau_t^h)(1 - \theta)A_t s_t^\theta h_t e_t + (1 - \delta + (1 - \tau_t^k) \theta s_t^{\theta-1}) k_t - (1 + \tau_t^c) c_t + \tau_t^l, \quad (13)$$

$$(1 - \theta)A_t s_t^\theta = \frac{g(h_t)c_t(1 + \tau_t^c)}{(1 - \tau_t^h)h_t},$$

$$\text{or } s_t = \left( \frac{g(h_t)c_t(1 + \tau_t^c)}{(1 - \theta)A_t(1 - \tau_t^h)h_t} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \quad (14)$$

- $e_t = k_t/(A_t h_t s_t)$  を (13) に代入すると,

$$k_{t+1} = (1 + n_t)^{-1} \left[ (1 - \tau_t^h)(1 - \theta) [s_t]^{\theta-1} k_t + (1 - \delta + (1 - \tau_t^k) \theta [s_t]^{\theta-1}) k_t - (1 + \tau_t^c) c_t + \tau_t^l \right],$$

$$\Leftrightarrow$$

$$k_{t+1} = (1 + n_t)^{-1} \left[ (1 - \delta + \{(1 - \tau_t^k) \theta + (1 - \tau_t^h)(1 - \theta)\} [s_t]^{\theta-1}) k_t - (1 + \tau_t^c) c_t + \tau_t^l \right]. \quad (15)$$

- (13) と (15) の 2 式がこの経済の挙動を決定するシステムを構成する .

### 3.2 Detrending

- $\tilde{c}_t = c_t/A_t$ ,  $\tilde{k}_t = k_t/A_t$ ,  $\tilde{\tau}_t^l = \tau_t^l/A_t$  として, システムを detrend する .

$$\tilde{c}_{t+1} = \frac{\tilde{c}_t}{(1 + n_t)(1 + a_t)} \left[ \beta \frac{1 + \tau_t^c}{1 + \tau_{t+1}^c} \left( 1 - \delta + (1 - \tau_{t+1}^k) \theta \left[ \left( \frac{\alpha^{\frac{h_{t+1}}{40}} \tilde{c}_{t+1} (1 + \tau_{t+1}^c)}{(1 - \theta)(1 - \tau_{t+1}^h) h_{t+1}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]^{\theta-1} \right) \right], \quad (16)$$

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1 + n_t)(1 + a_t)} \left[ (1 - \delta + \{(1 - \tau_t^k) \theta + (1 - \tau_t^h)(1 - \theta)\} [s_t]^{\theta-1}) \tilde{k}_t - (1 + \tau_t^c) \tilde{c}_t + \tilde{\tau}_t^l \right]. \quad (17)$$

このとき  $\tilde{\tau}_t^l$  は政府の予算制約式 (11) の両辺を  $A_t$  で割って, 次のように定義される .

$$\tilde{\tau}_t^l = \tau_t^c \tilde{c}_t + \tau_t^h (1 - \theta) s_t^\theta h_t e_t + \tau_t^k \theta s_t^{\theta-1} \tilde{k}_t$$

$e_t = \tilde{k}_t/(h_t s_t)$  をこの式に代入すると,

$$\tilde{\tau}_t^l = \tau_t^c \tilde{c}_t + \{\tau_t^h(1 - \theta) + \tau_t^k \theta\} s_t^{\theta-1} \tilde{k}_t.$$

- したがって、(17) 式は、次の通り書ける。

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n_t)(1+a_t)} \left[ \left(1 - \delta + [s_t]^{\theta-1}\right) \tilde{k}_t - \tilde{c}_t \right]. \quad (18)$$

- (16) 及び (18) の式のシステムは状態変数の初期値  $\tilde{k}_0$  が与えられた時に、パラメーター  $\{\alpha, \delta, \theta, \beta\}$  及び、外生変数のシークエンス  $\{n_t, a_t, h_t, \tau_t^c, \tau_t^k, \tau_t^h\}$  が与えられた下で、内生変数  $\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_t\}$  のシークエンスを生成する。操作変数の初期値  $\tilde{c}_0$  の選択はシューティング・アルゴリズムにより決定する。

### 3.3 Solution for Nonlinear Equation

- (16) 式は  $\tilde{c}_{t+1}$  について非線形方程式になっており、解析的な解があるかわからない。ここでは、非線形方程式の数値解法をもちいる。アルゴリズムは、T. Dekker によって考案されたもので、2分法、セカント(割線)法、逆2次補間法の組み合わせを使う。詳しくは、Forsythe, Malcolm and Moler (1976) を参照。

## 4 Steady State

- シューティング・アルゴリズムで  $\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_t\}$  の収束経路を求めるには  $\tilde{k}_t$  の定常状態の値が必要となる。 $\tilde{k}_t$  の定常状態の値は次のように求めることができる。先ず (16) を定常状態で評価して、

$$1 = \frac{1}{(1+n_{ss})(1+a_{ss})} \left[ \beta \left(1 - \delta + (1 - \tau_{ss}^k) \theta [s_{ss}]^{\theta-1}\right) \right].$$

- これを  $s_{ss}$  について解くと、次の形となる。

$$s_{ss} = \left[ \frac{\left( \frac{(1+n_{ss})(1+a_{ss})}{\beta} - 1 + \delta \right)}{(1 - \tau_{ss}^k) \theta} \right]^{\frac{1}{\theta-1}}.$$

- (14) 式を  $\tilde{c}_t$  について解き、定常状態において評価すると、次の通り。

$$\tilde{c} = \frac{(s_{ss})^\theta (1 - \theta) (1 - \tau_{ss}^h) h}{\alpha (h/40) (1 + \tau_{ss}^c)} \quad (19)$$

- 雇用率  $e$  を定常状態で評価すると、次の通り。

$$e = \frac{\tilde{k}}{hs_{ss}}.$$

- (17) より、定常状態での  $\tilde{k}_t$  を計算する。

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \frac{1}{(1+n)(1+a)} \left[ (1-\delta + [s_{ss}]^{\theta-1}) \tilde{k} - \tilde{c} \right], \\ &\Leftrightarrow \\ &\left[ (1+n)(1+a) - (1-\delta + [s_{ss}]^{\theta-1}) \right] \tilde{k} = -\tilde{c}, \\ &\Leftrightarrow \\ \tilde{k} &= \frac{\tilde{c}}{(1-\delta + [s_{ss}]^{\theta-1}) - (1+n)(1+a)}. \end{aligned} \quad (20)$$

#### 4.1 Shooting の考え方

Shooting は、その名の通り、試し打ちを続け、定常状態に収束する初期値を求める手法である。状態変数の初期値が定まっており、かつ、最初の操作変数の数が少ない場合に有効な手法である。とくに、不確実性が存在しない場合、実際の経路の水準とモデルの水準を比較できるというメリットがある。通常の RBC は不確実性を導入しており、シミュレーションで得られる消費や資本ストックの経路は、発生させた乱数の実現値に依存してしまう。しかし、確実性下の動学モデルであれば、シミュレートされたパスと実際の経路の直接比較が可能となる。

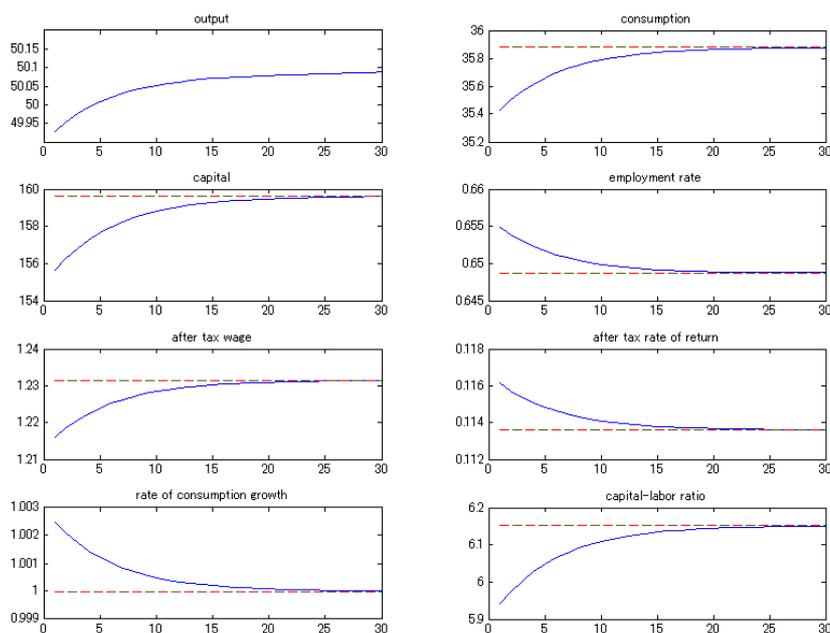
Shooting は、初期時点での操作変数の値に関して最適な値を探し続ける手法であり、多数の状態変数が含まれていても、コントロール変数の数が少ない限り有効な手法である。また、試し打ちの際には、オイラー方程式等を Forward に解く必要はなく、Value Function Iteration もないので、各 Shooting は、100 期程度の経路であれば一瞬で計算される。また、微分可能性も仮定しないので、動学方程式があるかぎり、非常に広いクラスのモデルに適用可能である。しかしながら、ひたすら初期値を試し打ちを続けることで収束させるので、コントロール変数が複数存在すると、複数次元の中で探し回ることになり、現実的ではなくなる。また、不確実性が存在する場合は、厳密には動学モデルは定常状態には収束しないので、初期値の値を厳密に求めることが困難になる。逆に、Value Function Iteration を用いる手法は、状態変数が少なく、一方、コントロール変数が多い場合に適している。

## 5 Basic Simulations

ここでは  $n_t = 0, a_t = 0, h_t = 40, \forall t$  として、様々な仮定の下でモデルの挙動を調べる。

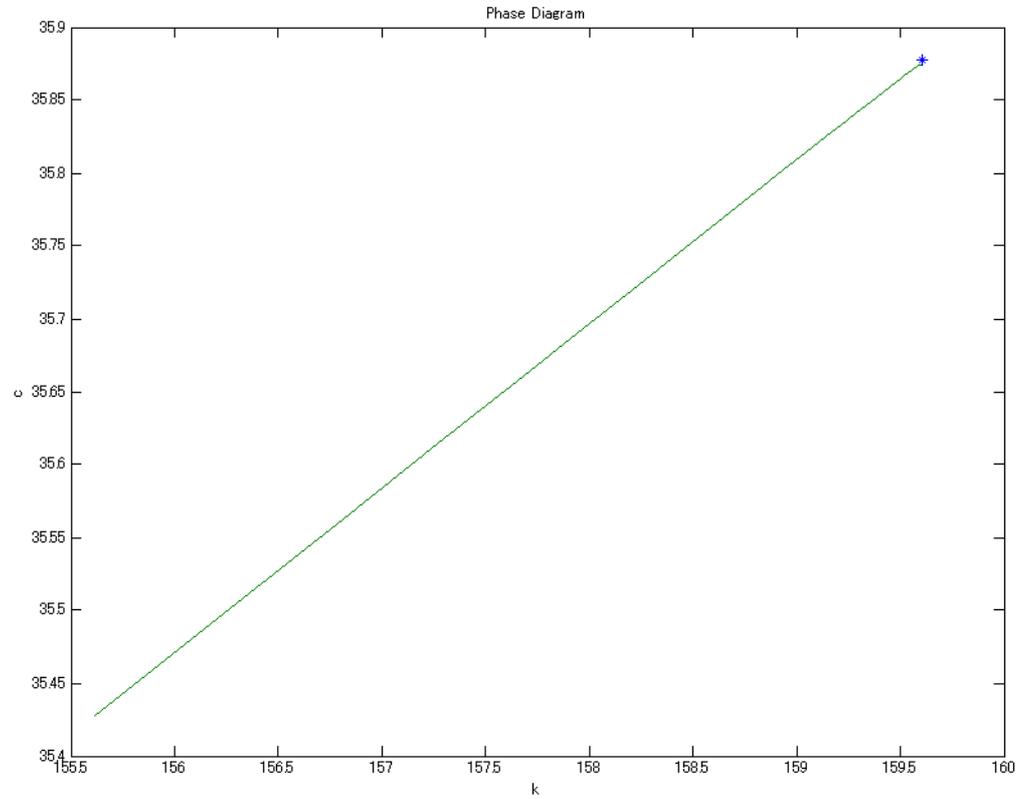
### 5.1 鞍点経路の Simulation

- まずは、定常状態から離れた状態から定常状態への鞍点経路上の収束状況を検証する。
- $k_0 = k_{ss} \times 0.975$  とする。
- $\tau_t^c = \tau_t^h = \tau_t^k = 0, \forall t$  とする。
- 各変数の動きは以下のグラフの通り。



Graph 1: 定常状態への収束経路

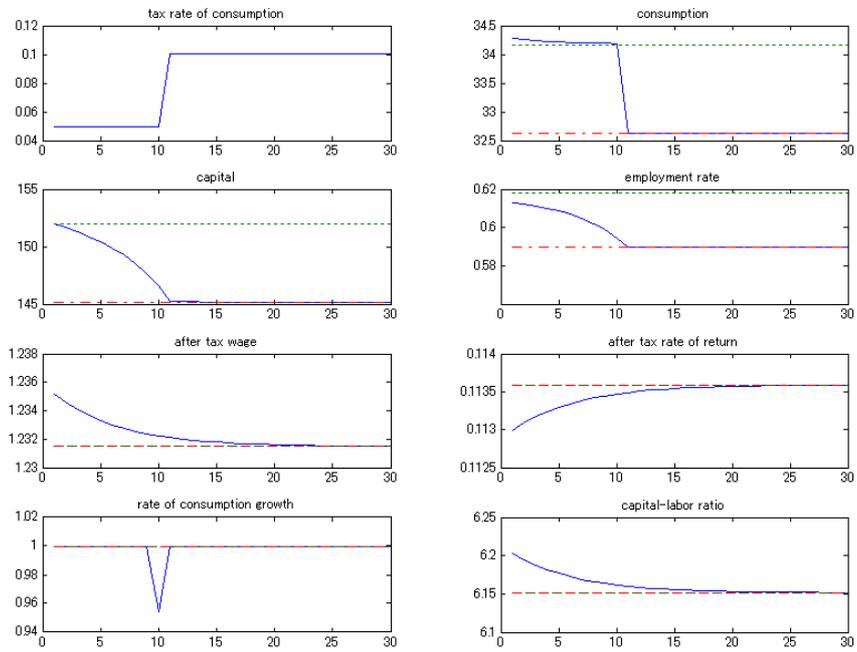
- $\tilde{c}_t, \tilde{k}_t$  の動きを位相図に書くと次の通り。グラフの \* が定常状態を表す点である。



Graph 2: 定常状態への収束 (位相図)

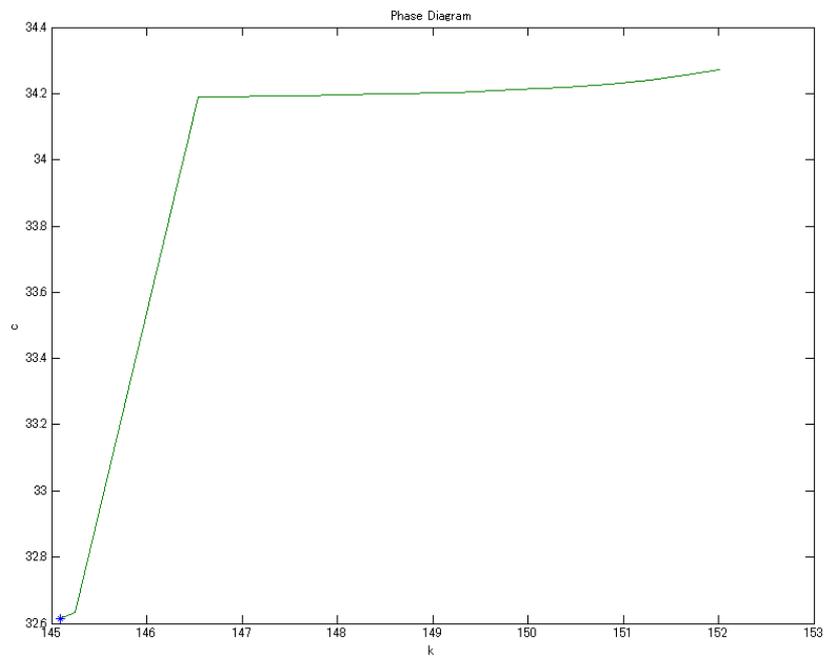
## 6 消費税引き上げの Simulation

- 第 1 期に, 第 11 期に消費税率を引き上げることをアナウンスし, 実際に第 11 期に実際に引き上げが行われるという状況における新たな定常状態への収束を経路を検証する .
- $\tau_t^h = \tau_t^k = 0, \forall t$  とする .
- $\tau_t^c = \begin{cases} 0.05 & \text{if } t \leq 10 \\ 0.10 & \text{if } t > 10 \end{cases}$
- $k_0 = k_{ss0}$  とする .  $k_{ss0}$  は  $\tau_t^c = 0.05$  の時の定常状態 .
- 各変数の動きは以下のグラフの通り .



Graph 3: 消費税率引き上げの影響

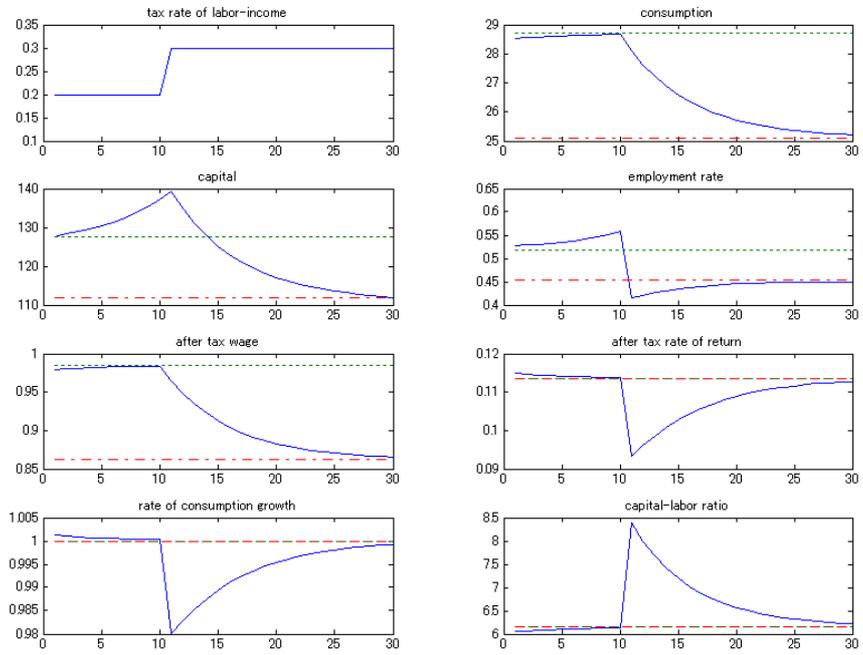
- $\tilde{c}_t, \tilde{k}_t$  の動きを位相図に書くと次の通り .



Graph 4: 消費税引き上げの影響（位相図）

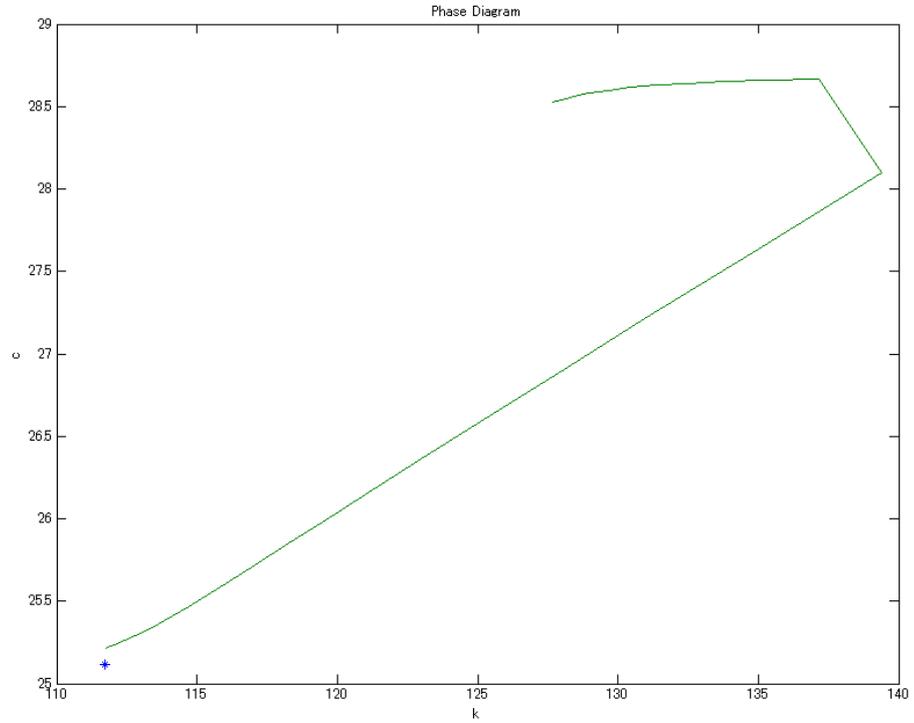
## 7 労働所得税率引き上げの Simulation

- 第 1 期に，第 11 期に労働所得税率を引き上げることをアナウンスし，実際に第 11 期に実際に引き上げが行われるという状況における新たな定常状態への収束を経路を検証する．
- $\tau_t^c = \tau_t^k = 0, \forall t$  とする．
- $\tau_t^h = \begin{cases} 0.20 & \text{if } t \leq 10 \\ 0.30 & \text{if } t > 10 \end{cases}$
- $k_0 = k_{ss0}$  とする． $k_{ss0}$  は  $\tau_t^h = 0.2$  の時の定常状態．
- 各変数の動きは以下のグラフの通り．



Graph 5: 労働所得税率引き上げの影響

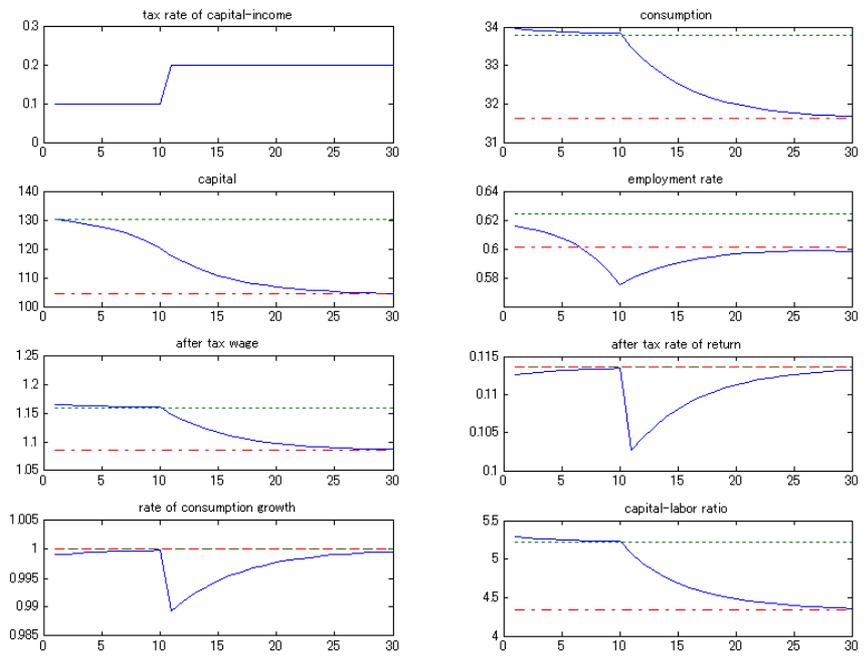
- $\tilde{c}_t, \tilde{k}_t$  の動きを位相図に書くと次の通り.



Graph 6: 労働所得税率引き上げの影響（位相図）

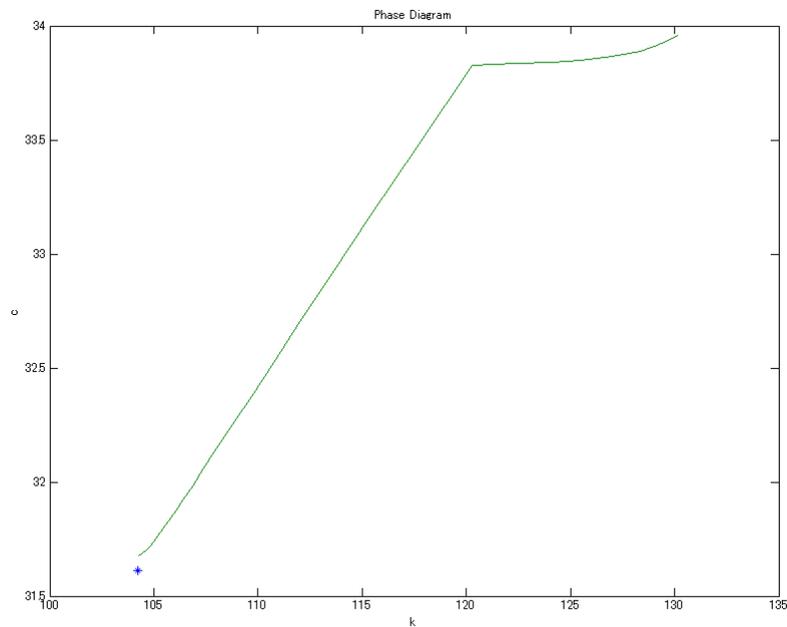
## 8 資本所得税率引き上げの Simulation

- 第 1 期に，第 11 期に消費税率を引き上げることをアナウンスし，実際に第 11 期に実際に引き上げが行われるという状況における新たな定常状態への収束を経路を検証する．
- $\tau_t^c = \tau_t^h = 0, \forall t$  とする．
- $\tau_t^k = \begin{cases} 0.10 & \text{if } t \leq 10 \\ 0.20 & \text{if } t > 10 \end{cases}$
- $k_0 = k_{ss0}$  とする． $k_{ss0}$  は  $\tau_t^k = 0.10$  の時の定常状態．
- 各変数の動きは以下のグラフの通り．



Graph 7: 資本所得税率引き上げの影響

- $\tilde{c}_t, \tilde{k}_t$  の動きを位相図に書くと次の通り.



Graph 8: 資本所得税率引き上げの影響（位相図）

## 9 Data Construction

- データは国民経済計算，労働力統計，人口統計，及び毎月勤労統計のデータを用いる．
- 生産 ( $Y_t$ ): 国民総支出
- 消費 ( $C_t$ ): 民間最終消費 + 政府最終消費
- 設備投資 ( $X_t$ ) = 総固定資本形成 + 在庫品増加 (民間, 政府) + 純輸出 + 海外からの純要素所得
- 資本ストック ( $K_t$ ): 設備投資 ( $X_t$ ) と資本減耗率 ( $\delta$ ) から perpetual inventory 法で作成
- 適当あたり労働時間 ( $h_t$ ): 毎月勤労統計の適当あたり労働時間 (30人以上の事業所)
- 労働力人口 ( $N_t$ ): 人口統計の15歳以上, 65歳未満の人口総数

- 雇用者数 ( $E_t$ ): 労働力統計の雇用者数

全要素生産性 ( $A_t$ ):

$$A_t = \frac{(Y_t K_t^{-\theta})^{\frac{1}{1-\theta}}}{h_t E_t}$$

## 10 Forecastings by the Calibrated Model

- 1980年を始点に、日本経済の実際のデータを外生変数として、消費、資本ストック、生産、賃金、金利といった内生変数の動きをSimulationする。1980年の初期時点の資本ストックは前章で定義した資本ストックのデータを用いる。
- また、外生変数には1980年から2007年について実際のデータを用い、その後については様々な仮定をおいてforecastを行う。

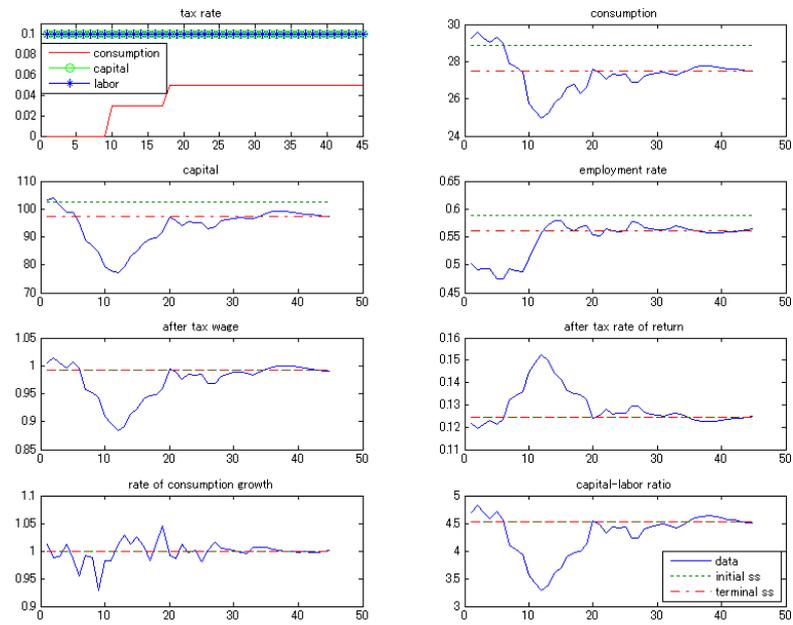
Hayashi-PrescottモデルのSimulation									
Simulations		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
		消費税①	消費税②	労働所得税の減税	資本所得税の減税	労働時間の時短	税なし	TFP①	TFP②
人口成長率 (n)	07年以前	現実のデータ							
	08年以降	2008年以降は予測値							
TFP成長率 (a)	07年以前	現実のデータ							
	08年以降	1.9% *	1.9% *	1.9% *	1.9% *	1.9% *	1.9% *	3.0%	0.0%
労働時間 (h)	07年以前	現実のデータ							
	08年以降	38.4 **	38.4 **	38.4 **	38.4 **	35.0	38.4 **	38.4 **	38.4 **
消費税 (Tauc)	07年以前	***	***	***	***	***	0	0	0
	08年以降	5.0%	10.0%	5.0%	5.0%	5.0%	0	0	0
労働所得税 (Tauh)	07年以前	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%	0	0	0
	08年以降	1.0%	1.0%	0.5%	1.0%	1.0%	0	0	0
資本所得税 (Tauk)	07年以前	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%	1.0%	0	0	0
	08年以降	1.0%	1.0%	1.0%	0.5%	1.0%	0	0	0

Notes: (1)人口成長率の予測値は国立社会保障・人口問題研究所の出生中位予測を利用  
(2)\*\*についてはTFP成長率の08年以降の値は00年から07年の平均値  
(3)\*\*については労働時間の08年以降の値は00年から07年の平均値  
(4)\*\*\*については1988年以前は0%, 1989年から3%, 1997年以降は5%

## 11 消費税の引き上げ

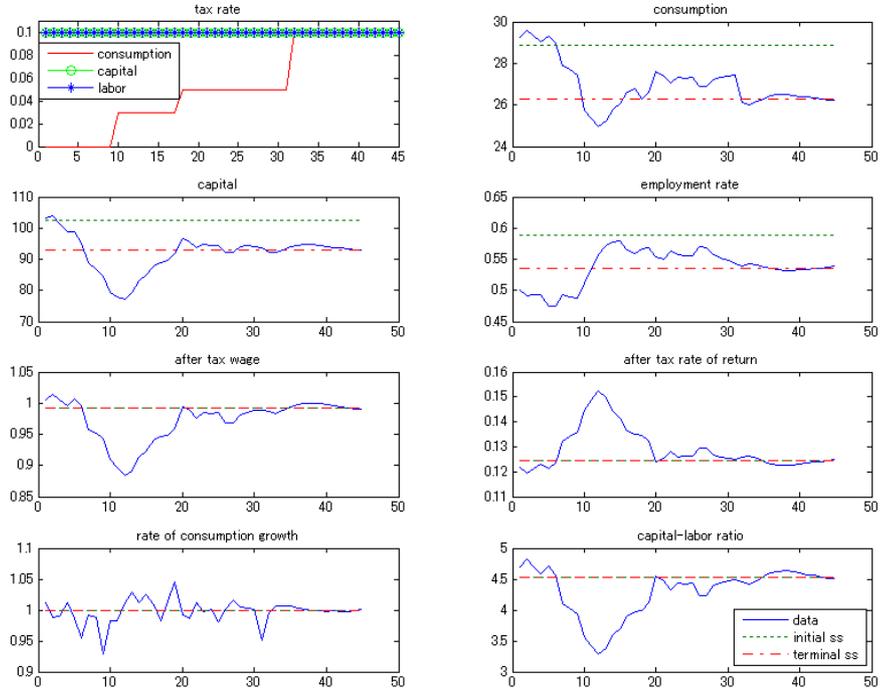
### 11.1 1989年, 1997年の消費税引き上げ (Simulation1)

- 消費税を1989年に0.3%, 1997年に0.5%に引き上げ、そのまま税率が据え置かれるケース
- 各変数の動きは以下のグラフの通り。

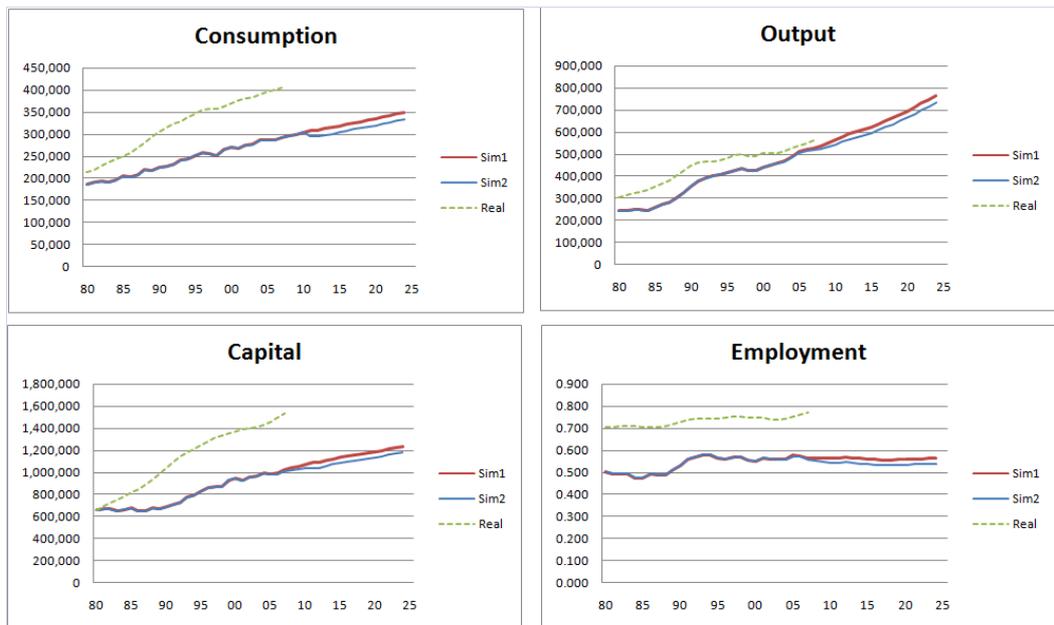


## 11.2 2011年の消費税引き上げ (Simulation2)

- 消費税を1989年に0.3%、1997年に0.5%に引き上げ、さらに2011年に10%に引き上げるケース
- 各変数の動きは以下のグラフの通り。



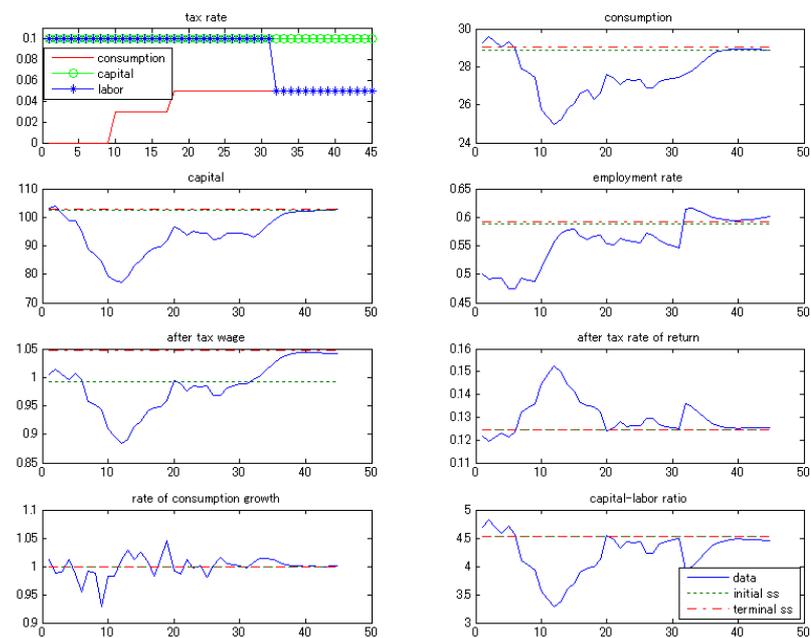
● 実際のデータとの比較



## 12 所得税の引き下げ

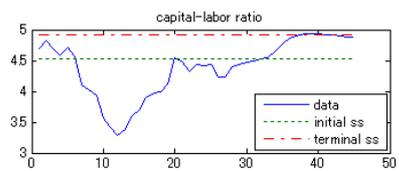
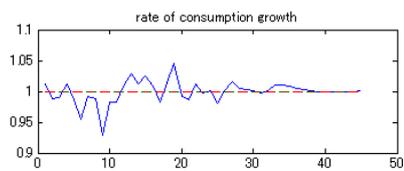
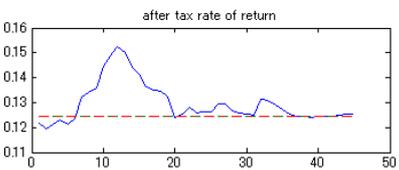
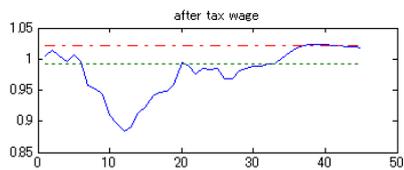
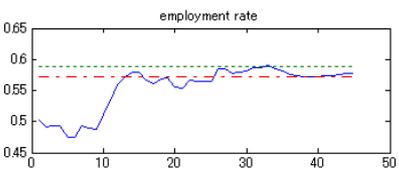
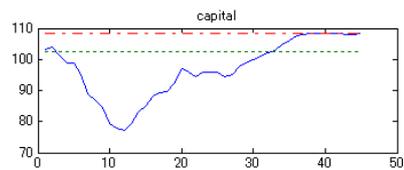
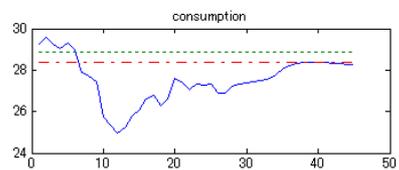
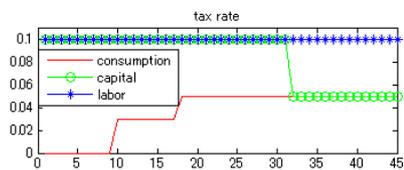
### 12.1 2011年の労働所得税の引き下げ (Simulation3)

- 2011年に労働所得税を10%から5%に引き下げるケース
- 各変数の動きは以下のグラフの通り。

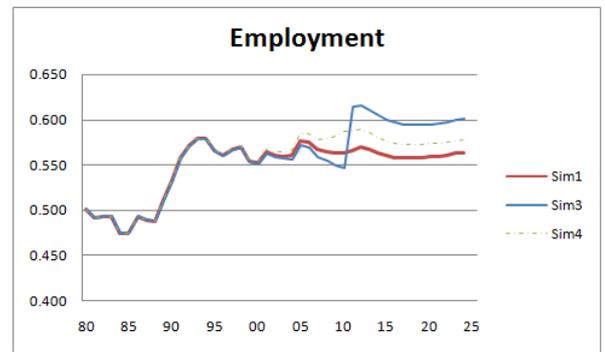
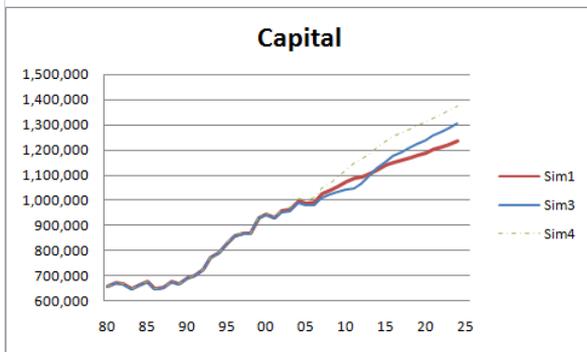
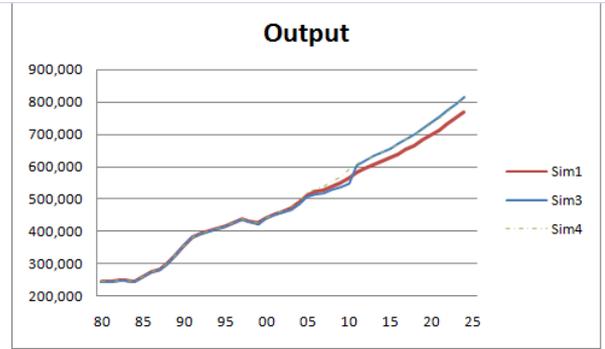
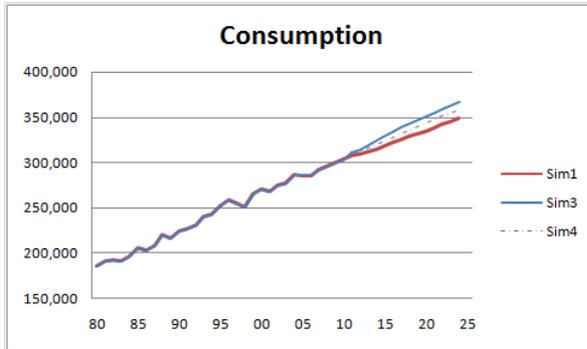


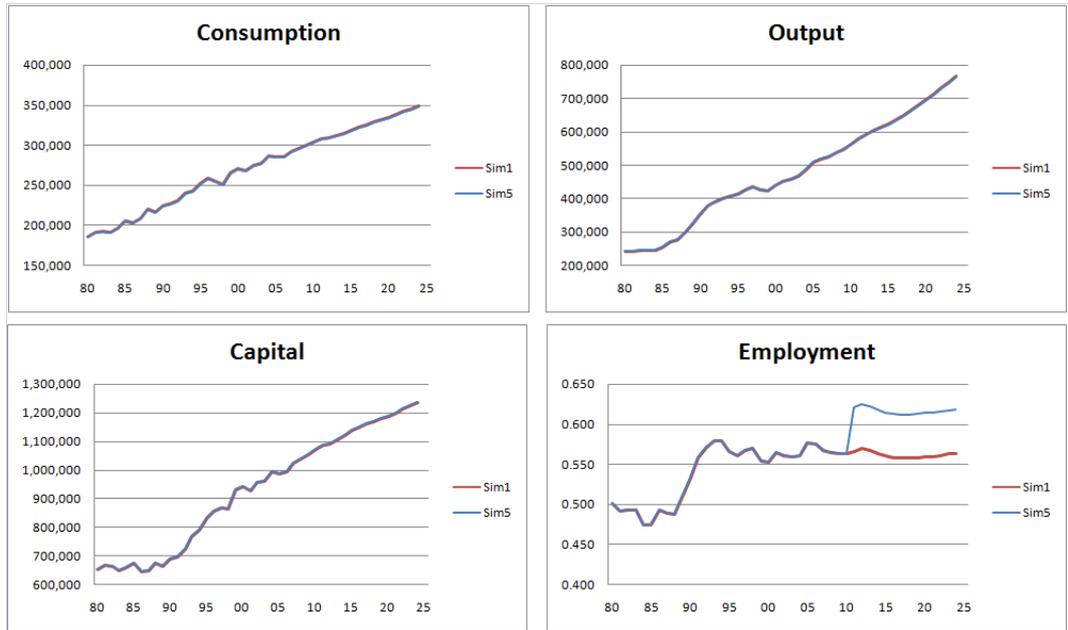
### 12.2 2011年の資本所得税の引き下げ (Simulation4)

- 2011年に資本所得税を10%から5%に引き下げるケース
- 各変数の動きは以下のグラフの通り。



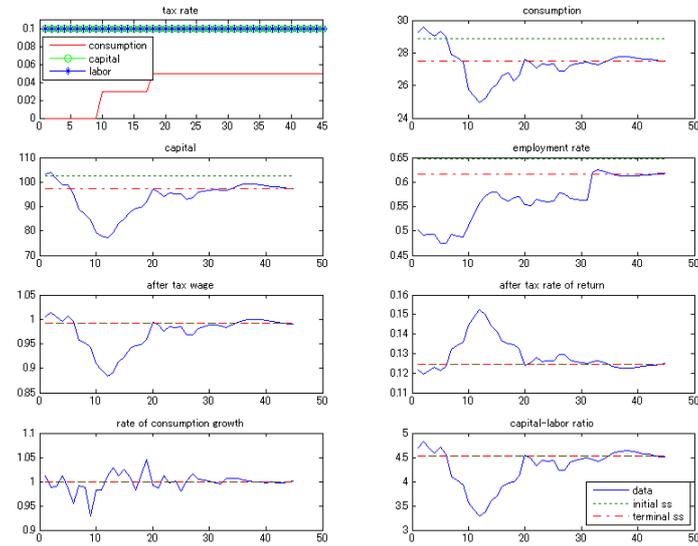
- Simulation1 のケースとの比較





## 13 時短の推進

### 13.1 2011年以降のさらなる時短の推進 (Simulation5)

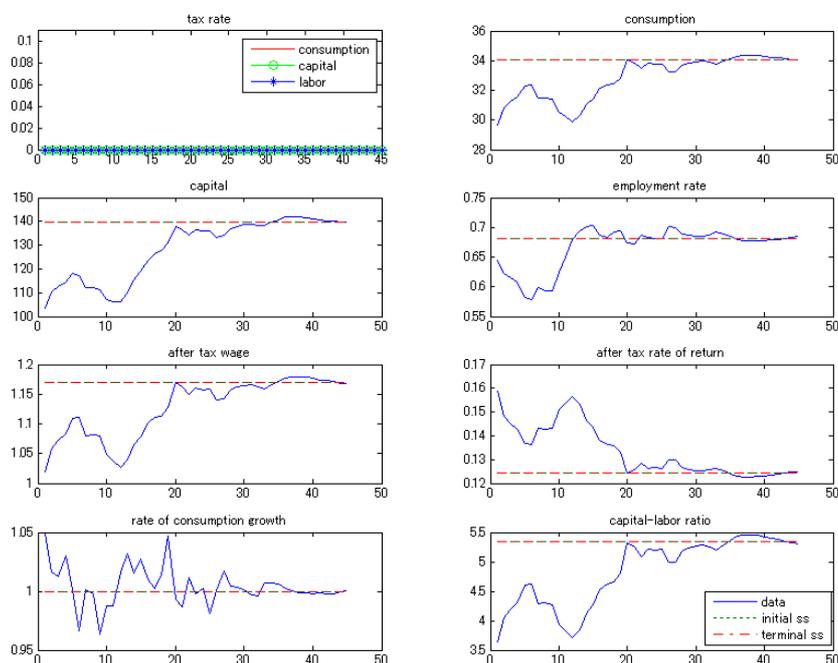


- Simulation1 のケースとの比較

## 14 生産性伸び率の上昇

### 14.1 基本ケース (Simulation6)

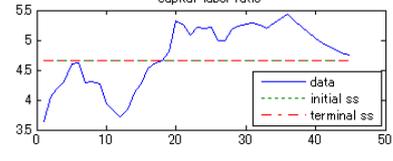
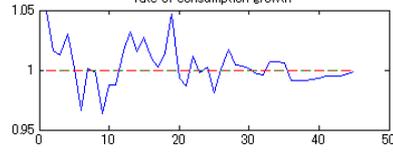
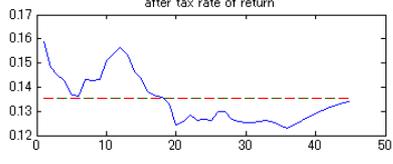
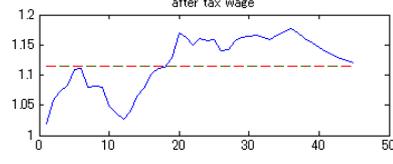
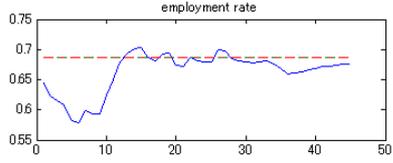
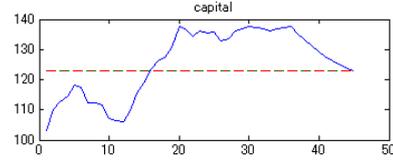
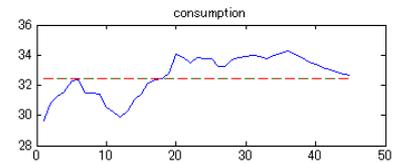
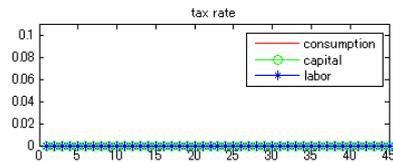
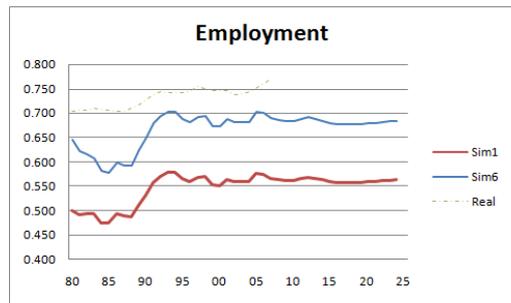
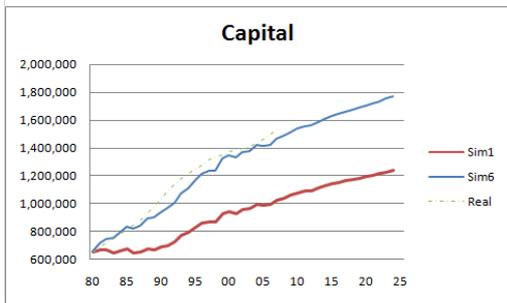
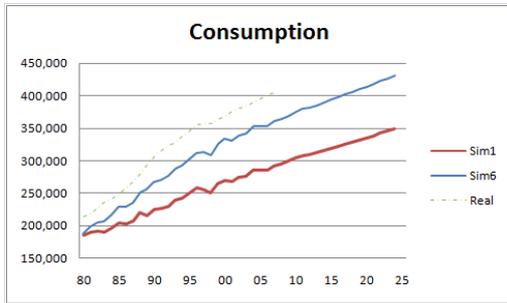
- 2008 年以降の TFP 成長率を 2000 年から 2007 年の TFP 成長率の平均値 (1.9 %) と同じになると仮定
- 税率は消費税, 資本・労働所得税について, すべてゼロとする.
- 各変数の動きは以下のグラフの通り.



- 現実のデータ及び Simulation1 との比較

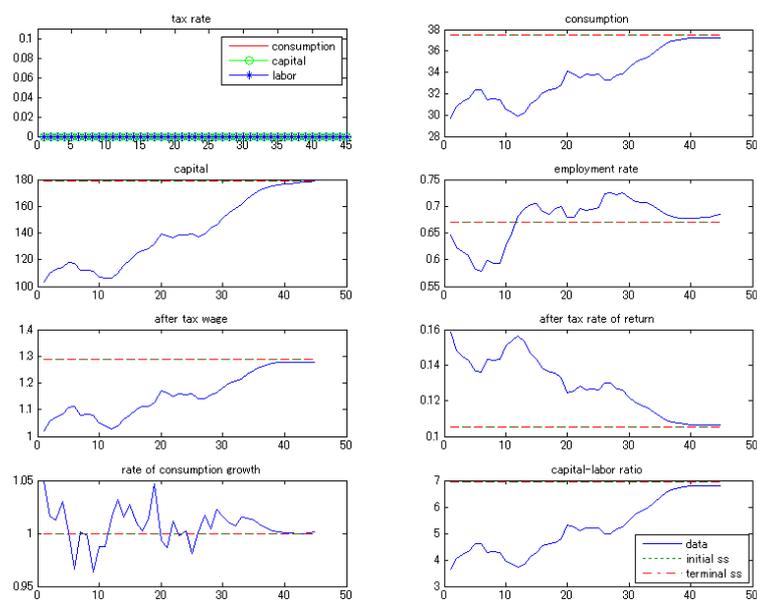
### 14.2 2015 年以降の生産性伸び率の上昇 (Simulation7)

- 2008 年以降の TFP 成長率を 3.0 % になると仮定

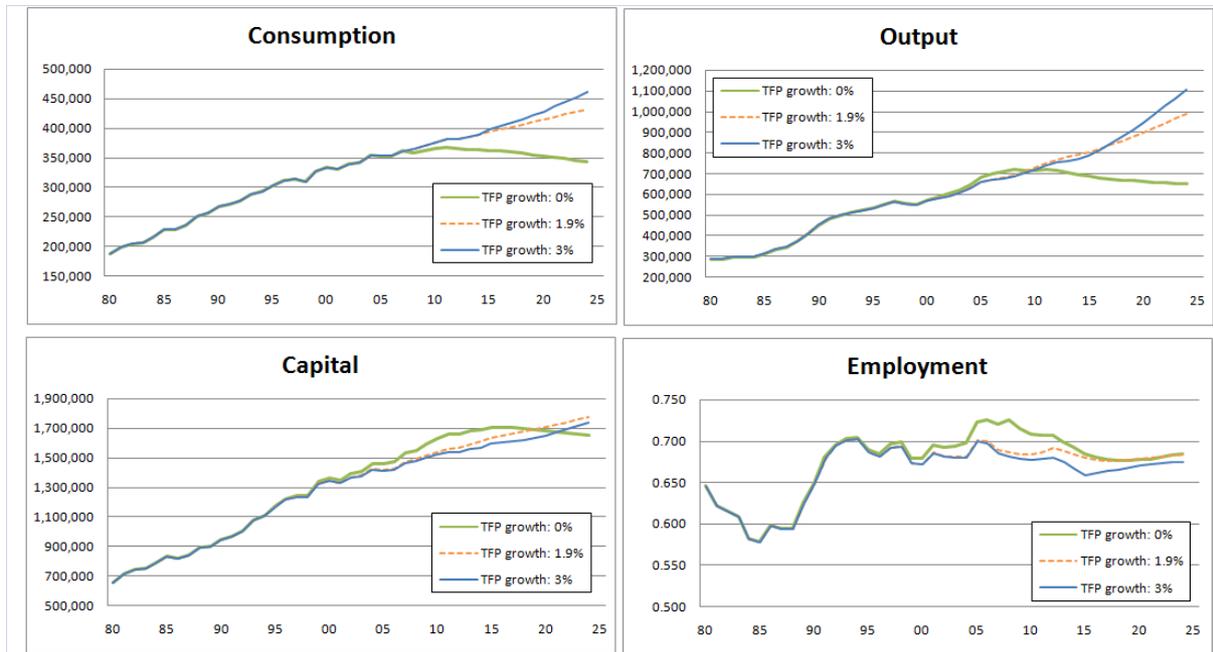


### 14.3 2015 年以降の生産性伸び率の低下 (Simulation8)

- 2008 年以降の TFP 成長率を 0.0 % になると仮定



- TFP 成長率についての Simulation のまとめ



## 15 Code

Shooting の原理は極めて単純であるが、実際に行おうとすると、いくつかの問題が生じる。具体的には、(1) 何期先の収束状況を見るか、(2) 初期値をどの範囲から開始するか、(3) 初期値の update をどのように行うか、の三つの問題が生じる。Value Function Iteration や線形近似と異なり、初期値の選択や収束期間の選択は、この手法では Crucial となる。というのは、オイラー方程式や生産関数は、資本ストックやし消費支出が正の値をとることを前提としているが、最適成長モデルで見たように、初期値の選択を誤ると資本ストックや消費支出が負の値をとるようになってしまい、複素数が発生し、プログラムがエラーになるためである。そのため、この手法は、一般的な解の特徴をみるというよりも、特定のパラメーター、特定の history の下での、最適経路をいくつか導出するときに適していると言えるだろう。下記のプログラムは外木氏によるものである。

```

%%%%%%%%%%%%%% メインプログラム%%%%%%%%%%%%%%
% shooting algorithm for the Hayashi-Prescott Type RBC model with
distorting tax
% see Hayashi and Prescott (2002)
% Written by Tonogi Akiyuki (Dec, 2008)
clear

```

```

% deep parameter
alpha = 1.373;
beta = 0.976;
delta = 0.089;
theta = 0.362;
% stopping rule
stop = 0.0001;
% perods of simulation
T = 30;
% AA: rates of TFP growths
% NN: rates of population growths
% HH: hours of week working
% default
AA = ones(T,1)*0;
NN = ones(T,1)*0;
HH = ones(T,1)*40;
% initial tax rate
taucI = 0.00;
taukI = 0.00;
tauhI = 0.00;
% terminal tax rate
taucT = 0.00;
taukT = 0.00;
tauhT = 0.00;
% the period of chage of government behavior
period_c=0;
period_k=0;
period_h=10;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% shooting algorithm %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% step.1
% initial and terminal steady state
sss0 = (((((1+NN(T,1))*(1+AA(T,1)))/beta)-1+delta)/((1-taukI)*theta))^(1/(theta-1));
css0 = ((sss0^theta)*(1-theta)*(1-tauhI)*HH(T,1))/(alpha*(HH(T,1)/40)*(1+taucI));
kss0 = css0/((1-delta+sss0^(theta-1))-(1+NN(T,1))*(1+AA(T,1)));
ess0 = kss0/(HH(T,1)*sss0);

```

```

sss = (((((1+NN(T,1))*(1+AA(T,1)))/beta)-1+delta)/((1-taukT)*theta))^(1/(theta-
1));
css = ((sss^theta)*(1-theta)*(1-tauhT)*HH(T,1))/(alpha*(HH(T,1)/40)*(1+taucT));
kss = css/((1-delta+sss^(theta-1))-(1+NN(T,1))*(1+AA(T,1)));
ess = kss/(HH(T,1)*sss);
k00=kss0*0.975;
c00=css0*0.975;
Tauc = ones(T+1,1)*taucI;
Tauk = ones(T+1,1)*taukI;
Tauh = ones(T+1,1)*tauhI;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% once-and-for-all increase in tauc at t=10
%
%Tauh(period_h+1:T+1,1) = ones(T+1-period_h,1)*tauhT;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% main loop %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
i = 1;
c0=c00;
while i < 5000
K = zeros(T,1);
C = zeros(T,1);
E = zeros(T,1);
S = zeros(T,1);
K(1) = k00;
C(1) = c0;
for t = 1:T-1
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% step.2
% compute c(t+1)
% using Bisection Method
tauc0 = Tauc(t,1);
tauc1 = Tauc(t+1,1);
tauk0 = Tauk(t,1);
tauk1 = Tauk(t+1,1);
tauh0 = Tauh(t,1);
tauh1 = Tauh(t+1,1);
a = AA(t,1);
n = NN(t,1);

```

```

h0 = HH(t,1);
h1 = HH(t+1,1);
c0 = C(t);
k0 = K(t);
parm(1,1)=c0;
parm(1,2)=alpha;
parm(1,3)=beta;
parm(1,4)=delta;
parm(1,5)=theta;
parm(1,6)=tauc0;
parm(1,7)=tauc1;
parm(1,8)=tauk1;
parm(1,9)=tau1;
parm(1,10)=a;
parm(1,11)=n;
parm(1,12)=h1;
[c1,fval] = fzero(@(c1) euler(c1,parm),c0);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% step.3
% compute k(t+1)
s0=((c0*alpha*(h0/40)*(1+tauc0))/((1-theta)*(1-tauh0)*h0))^(1/theta);
s1=((c1*alpha*(h1/40)*(1+tauc1))/((1-theta)*(1-tauh1)*h1))^(1/theta);
k1=1/((1+n)*(1+a))*((1-delta+s0^(theta-1))*k0-c0);
e0=k0/(h0*s0);
e1=k1/(h1*s1);
C(t+1) = c1;
K(t+1) = k1;
S(t) = s0;
E(t) = e0;
S(t+1) = s1;
E(t+1) = e1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% step.4
% check c(t+1)>0 % 初期値を間違えると、消費や資本ストックが負に
なり、オイラー方程式などが計算できなくなる。
if c1<=0
break
elseif k1<=0
break

```

```

end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% step.5
% check k(T)=kss
if c1 <= 0
    c0 = C(1) + 0.00002*abs(kss); % 経済理論を利用して、初期値の update
    を極力、効率的に行う。
end
if abs(k1-kss) <= stop
    break
elseif k1 <= 0
    c0 = C(1) - 0.00001*abs(kss-k1);
elseif k1 < kss && k1 > 0
    c0 = C(1) - 0.00001*abs(kss-k1);
elseif k1 >= kss
    c0 = C(1) + 0.00001*abs(kss-k1);
end
Kex(:,i) = K;
Cex(:,i) = C;
Eex(:,i) = E;
Sex(:,i) = S;
i=i+1;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% other equilibrium quantities %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Y = zeros(T,1);
R = zeros(T,1);
q = zeros(T,1);
roq = zeros(T,1);
woq = zeros(T,1);
A = ones(T,1);
for t = 1:T
    A(t+1) = A(t)*(1+AA(t,1));
    Y(t) = (K(t)^theta)*(A(t)*HH(t)*E(t))^(1-theta); % 生産
    q(t) = (1+NN(t))*(beta*C(t)*(1-Tauc(t)))^(-1); % 資産価格
    roq(t) = (1-Tauk(t,1))^theta*S(t,1)^(theta-1); % 税引き後実質利率
    woq(t) = (1-Tauh(t,1))*(1-theta)*S(t,1)^theta; % 税引き後実質賃金率
end

```

```

R(t) = (1/((1+AA(t,1))*(1+NN(t,1))))*beta*((1+Tauc(t,1))/(1+Tauc(t+1,1)))*((1-
delta)+(1-Tauk(t,1))*theta*S(t,1)^(theta-1));
end
% other variables in steady state
cs0 = ones(T,1)*css0;
ks0 = ones(T,1)*kss0;
es0 = ones(T,1)*ess0;
ss0 = ones(T,1)*sss0;
cs = ones(T,1)*css;
ks = ones(T,1)*kss;
es = ones(T,1)*ess;
ss = ones(T,1)*sss;
% initial steady state
q0 = ones(T,1)*(1+NN(T))*(beta*css0*(1-taucI))^(-1);% 資産価格
roq0 = ones(T,1)*(1-taukI)*theta*sss0^(theta-1);% 税引き後実質利率
woq0 = ones(T,1)*(1-tauhI)*(1-theta)*sss0^theta;% 税引き後実質賃金率
R0 = ones(T,1)*(1/((1+AA(T,1))*(1+NN(T,1))))*(beta*(1+tauc1)/(1+tauc1))*((1-
delta)+(1-taukI)*theta*sss0^(theta-1));
% terminal steady state
qs = ones(T,1)*(1+NN(T))*(beta*css*(1-taucT))^(-1);% 資産価格
roqs = ones(T,1)*(1-taukT)*theta*sss^(theta-1);% 税引き後実質利率
woqs = ones(T,1)*(1-tauhT)*(1-theta)*sss^theta;% 税引き後実質賃金率
Rs = ones(T,1)*(1/((1+AA(T,1))*(1+NN(T,1))))*(beta*(1+tauc1)/(1+tauc1))*((1-
delta)+(1-taukT)*theta*sss^(theta-1));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% drawing graphs %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t=(1:T)';
figure(1)
subplot(421),plot(t,Y(1:T,1)),title('output');
subplot(422),plot(t,C,t,cs0,'-',t,cs,'-'),title('consumption');
subplot(423),plot(t,K,t,ks0,'-',t,ks,'-'),title('capital');
subplot(424),plot(t,E,t,es0,'-',t,es,'-'),title('employment rate');
subplot(425),plot(t,woq,t,woq0,'-',t,woqs,'-'),title('after tax wage');
subplot(426),plot(t,roq,t,roq0,'-',t,roqs,'-'),title('after tax rate of return');
subplot(427),plot(t,R,t,R0,'-',t,Rs,'-'),title('rate of consumption growth');
subplot(428),plot(t,S,t,ss0,'-',t,ss,'-'),title('capital-labor ratio');
figure(2)
plot(ks,cs,'*',K,C);

```

```

title('Phase Diagram');
xlabel('k');
ylabel('c');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ここまで%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% オイラー方程式%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function y=euler(c1,param)
c0=param(1,1);
alpha=param(1,2);
beta=param(1,3);
delta=param(1,4);
theta=param(1,5);
tauc0=param(1,6);
tauc1=param(1,7);
tauk1=param(1,8);
tauh1=param(1,9);
a=param(1,10);
n=param(1,11);
h1=param(1,12);
s1=((c1*alpha*(h1/40)*(1+tauc1))/((1-theta)*(1-tauh1)*h1))^(1/theta);
y=(c0/((1+n)*(1+a)))*((beta*(1+tauc0)/(1+tauc1)))*(1-delta+(1-tauk1)*theta*(s1)^(theta-1))-c1;

```