2020 年度応用マクロ経済学講義ノート: 不完備資本市場.

阿部修人

2020 年 7 月

1　不完備市場のモデル化

最適成長モデルや標準的 RBC モデルは、厚生経済学の第一基本定理が成立する経済モデルを用い、経済成長や景気循環の様々な側面の分析においてある程度の成功を収めている。しかしながら、このような「効率的」な経済モデル、すなわち市場が完備かつ競争的な経済モデルでは分析が不可能な経済現象は多数存在する。近年ではマクロ経済的諸側面においても、そのような、完備市場では描写できない現象、たとえば景気循環と所得・消費格差の関係、等に対する関心が高まっており、不完備市場によるマクロモデルの構築は珍しくなくなっている。不完備市場の一般均衡分析の歴史は古く、Radner や Cass 等により行われているが、近年の研究では不完備性の Empirical Implications を重視している点に特徴がある[1]。

Aiyagari(1994) はマクロ経済モデルに不完備市場を導入する根拠として下記の七点を挙げている。

(1)　完備市場の下では、個人の所得リスクは保険によりカバーされるため、全ての家計消費は、唯一カバーされないマクロの動向と完全に同じ動きをするはずであるが、実際にはそうなっていない。

(2)　家計消費の Volatility は大きいが、一方マクロの消費はスムーズになっている。

(3)　家計所得の階層間移動は頻繁に起きている。たとえば、アメリカでは 10 年間で 3/5 の家計が所得分位の位置を変えている。

(4)　Mehra - Prescott のパズル

[1]独占的競争モデルや価格の硬直性、寡占市場の分析はマクロ経済学においては長い歴史があり、J.R. Hicks (1939) 『価値と資本』　(岩波文庫。 安井 琢磨 熊谷 尚夫 訳) の中で、独占市場が価格の硬直性を作り出し、市場均衡とは異なる状態を作り出す可能性があると述べている。無論、1980 年代から延々と続いている New Keynesian 達のモデルもこの延長上にある。経済モデルが非効率な均衡を導き出すモデルは財政学ではその中心にあるし (でなければ政府は所得再分配しかすることがない)、常に応用経済学で用いられてきた。動的計画法に基づくカリブレーションでは、状態変数を少数に制限する必要があり、必ずしも、今までのケインジアンや財政学者達の貢献を十分に生かしきれていない。これは、裏を返せば、数値解析技術の発展により分析可能になる経済現象はまだまだ多いということでもある。

(5)　景気循環の Propagation Mechanism として、標準の RBC モデルでは技術ショックの自己相関それ自体で景気循環の大方を説明してしまい、モデルの必要性が感じられない。

(6)　企業投資をマイクロで見ると極めて Lumpy な一方、産業別にみるとスムーズになっている。

(7)　消費をスムージングしないと仮定した場合の welfare costs は、完備市場の下では極めて小さく (1 四半期で一人当たり 10 セントくらい)、near rational な家計を考えると、消費=所得と仮定する極端な消費関数を否定できなくなってしまう。

1990 年代以降、家計のミクロパネルデータへのアクセスが容易になり、多くの実証研究が家計消費に関して行われてきている。日本でも、諸外国に遅れはしたが、21 世紀に入り、家計パネルデータが複数構築され、研究が急速に進んでいる。それらのデータに基づく研究の多くは、Mace や Townsend 等による一部の例外を除き、完備市場モデルを否定するものになっている。この分野を進めてきた Aiyagari が 1997 年に急逝したが、その後、Kocherlakota や Attanasio, Perri, Kruger 等により急速に不完備市場のマクロ分析は進展し、現在、もっとも進展速度の速い分野にもなっている。

Bewyley-Aiyagari モデルと呼ばれる、Aiyagarti が数値解析を可能にした不完備市場のモデルは、Ramsey や Solow、あるいは Kydaland and Prescott によるモデルと同様に、 その後の研究のベンチマークになっている。本モデルの構造は Bewley による古典的な研究に準拠しているが、比較的小さなプログラムコードで実行可能であり、かつ様々な応用可能性を兼ね備えている。特徴としては (1) 一般均衡であること (2)Ex ante に同質な家計間に Ex post に異質性が発生すること (3) 生産経済であり資本蓄積が存在すること (4) 流動性制約により、借り入れに制約が存在すること (5) 個人の借り入れ制約を緩めることで inside money を導入可能であること、など等、望ましい性質が多く含まれている。また、モデルがシンプルであることから、離散近似で十分に分析可能であることも良い点である。[2]

2　Bewley-Aiyagari-Hugget モデル

まず、不確実性下の家計の貯蓄・消費選択問題について考えてみよう。経済には数多くの家計が存在しており、効用関数は同一であるが、雇用形態に関しては家計により異なり、雇用されている家計と失業している家計の二種類が存在するとする。家計は一単位の労働を供給するが、働ける場合は $(s = 1)$、働けない場合は $(s = 0)$ の供給を行う。失業するかしないかは家計にとり完全に外生であり、家計間での相関はない。すなわち、マクロ経済的な失業確

[2] Aiyagari の論文では Piece wise linear approximation で解いている。

率の変動はないとする (この意味では、マクロ経済全体をゆるがすショックはここでは扱わない)。今期失業するかしないかは、前期の就業状態に依存するマルコフチェーン (2×2 の推移確率行列 P) に従う確率変数となっている。すなわち、家計は雇用に関する不確実性に直面している。

家計は一つの資産 $a_t \, (\in A)$ を有し、それを取引することで、消費と貯蓄の異時点間代替が可能になっている。家計の最適化問題は下記のようになる。なお、資産集合 A に負の値を含めれば、その家計は負債を持つことが可能であることを意味する。ここでは、特に A に関しては、コンパクト性のみを仮定しておく。

$$\max \quad E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t\right) \tag{1}$$

$$s.t. \quad c_t + a_{t+1} = \left(1+r\right) a_t + w s_t, \tag{2}$$

$$a_{t+1} \in A. \tag{3}$$

ベルマン方程式は

$$v\left(a, s\right) = \max_{a' \in A} u\left(\left(1+r\right) a + ws - a'\right) + \beta E\left(v\left(a', s' | s\right)\right) \tag{4}$$

ここで、a' と s' は来期の資産と雇用状態を表している。来期の価値関数が $v\left(a', s'|s\right)$ となっているのは、来期の雇用状態は今期の雇用状態に依存するためである。今、このベルマン方程式を解くことができ、Policy Function

$$a' = g\left(a, s\right), \tag{5}$$

を得たとする。このとき、経済全体の資産分布と雇用の分布はどうなるだろうか?

$t+1$ 期の a と s の分布を

$$prob\left(a_{t+1} = a', s_{t+1} = s'\right) = \lambda\left(a', s'\right)$$

とする。この分布関数は、経済全体にどの程度の資産が存在するか、彼等の雇用形態がどうなっているか、を示している。

完備市場であれば、各個人の将来の雇用形態リスクに対応する保険の売買が可能なので、各人は雇用変動のリスクをヘッジすることが出来る。しかし、この経済では、資産 a の価格 (収益率) は各個人で共通であり、各個人の雇用形態に依存していない。すなわち、状態依存型財になっていない。その点で、この経済は不完備市場になっている。資産が状態依存型でなくとも、この経済では家計は雇用状態と資産水準以外は同質なので、単に自由に借金をすることが可能であれば、失業した人は将来就業した時に返済することを約束することで、就業時と同等の消費が可能になる。しかしながら、この経済に借

り入れ制約、すなわち借入額に制限があると、各個人は消費を平滑化するほどには借り入れができず、完備市場であれば可能であったような消費の実現はできなくなる。すなわち、各個人の借入額に制限があるなら、この経済は不完備市場となり、家計にとり将来の雇用リスクを完全にヘッジすることが出来なくなる。

この経済の資産保有が初期時点において完全に平等であったと仮定しよう。20 期ほど経過したとき、この経済の資産分布はどうなっているだろうか?この経済では、各個人の来期の雇用状態は不確実であった。当初完全に平等で、全員雇用されていたとしても、来期には失業する人も生じる。20 期経過した後は、経済の中には非常な不幸に遭遇し、19 期連続で失業する人もいるかもしれないし、全期間雇用されつづける幸運な人も出てくるだろう。初期時点において、家計は将来の様々な可能性を考えて消費・貯蓄選択を行うが、実際に選択される消費水準は、失業すれば下がるだろうし、就業状態が続けば減ることはないであろう。結果として、消費や資産は家計間で異なる値になっていく。換言すれば、この経済には資産格差が発生する。

この経済の資産格差は $\lambda\left(a', s'\right)$ によって表わすことが可能であった。では、この経済の定常状態での格差はどうなっているだろうか?t 期のある資産と就業状態に関して、(a, s) という状態にあり、来期に (a', s') になる確率を考えよう。$a' = g\left(a, s\right)$ は、今期 (a, s) の時の Policy Function の値であり、来期の資産額を示す。$I\left(a', s, a\right)$ を、 $a' = g\left(a, s\right)$ を満たすときのみに 1、そうでないときはゼロの値をとる Indicator Function としよう。すると、今期の (a, s) の確率が $\lambda\left(a, s\right)$ であることを踏まえると、$\lambda\left(a, s\right) \times prob\left(s_{t+1} = s', s_t = s'\right) \times I\left(a', s, a\right)$ は、今期 (a, s) で、来期に (a', s') の値をとる確率となる。すると、$\lambda_{t+1}\left(a', s'\right)$ を求めるには、下記の積分 (和) を求めればよい。

$$\lambda_{t+1}\left(a', s'\right) = \sum_a \sum_s \lambda\left(a, s\right) prob\left(s_{t+1} = s', s_t = s'\right) I\left(a', s, a\right), \tag{6}$$

$$I\left(a', s, a\right) = 1 \quad \text{if} \quad a' = g\left(a, s\right) \quad \text{otherwise zero}, \tag{7}$$

そして、上式を $\lambda\left(a, s\right)$ に関する差分方程式と考え、その不変分布、$\lambda\left(a, s\right)$ を求ると、それが定常状態における資産と就業状態に関する分布、すなわち不変分布をえる。そして不変分布 $\lambda\left(a, s\right)$ が求まれば、資産の平均値を下記のように求めることも可能である。、

$$E\left(a\right) = \sum_a \sum_s \lambda\left(a, s\right) g\left(a, s\right) \tag{8}$$

この経済では、Aggregate では不確実性はないため、この平均資産額は、経済全体の資産額とみなすことも可能である。

2.1 Hugget Model

Hugget (1993) は生産のない純粋交換経済で、なおかつ各家計が雇用リスクに直面し、負債発行額に限度がある経済を考えている。そこでは、資産水準 a に下限 $-\phi$ が外生的に与えられている。後は、上記のモデルと同様の構造となっている。Hugget モデルの均衡は下記で与えられる。

定義*: Hugget Model* **における均衡**

負債制約 $-\phi$ の下での定常均衡は、金利 r, Policy Function $g(a,s)$、および定常分布 $\lambda(a,s)$ であり、

(1)　r の下で、 Policy Function $g(a,s)$ は家計の最適化問題を解く

(2)　確率分布 $\lambda(a,s)$ は $g(a,s)$ から導出される推移確率の不変分布である

(3)　資産市場は均衡している。すなわち、(a,s) は下記の式をみたす、

$$\sum_a \sum_s \lambda(a,s)\, g(a,s) = 0, \tag{9}$$

となる。

最後の条件は、この経済では負債を発行する人が一人でもいれば、経済には逆に負債を購入する人が必ず存在し、平均的な資産 (負債) 額はゼロにならねばならない、ということを意味する。これは、この経済における負債が内部通貨 (inside money) となっていることを反映している。もしも、中央銀行が通貨を外部から投入 (outside money) すれば、この均衡条件の右辺に、中央銀行が発行する貨幣の量が生じ、それが均衡式となる。

なお、このように、動学経済の均衡を定義することは動学理論における標準的な作法であり、Review fo Economic Dynamics のような専門誌では頻繁に登場する。

2.2 生産経済 (Aiyagari モデル)

次に、Aiyagari (1994) による生産経済を考えてみよう。経済全体の資本および労働投入の集計量を投入とするコブ・ダグラス型技術により消費財が生産される。政府部門は捨象されているが、導入することは容易である。

家計の Bellman Equation は下記のようになる。

$$v(k,s) = \max_{c,k'} \left[u(c) + \beta E\left[v(k', s'|s) \right] \right]$$

s.t.

$$c + k' = rk + ws + (1-\delta)k, 0 \le k'$$

すなわち、家計は今期の就業状態 (s) と資産水準 (k) を所与として、今期の消費と来期の資産を決める。このとき、今期の就業状態は来期の就業状態に

関して情報を有しているので、その情報を用いて将来予測を行っている。このDPにおける資産水準のpolicy functionを $k' = g(k, s)$ とする。

家計にとっての状態変数は s と k であるが、我々の関心は個別家計の動向ではなく、経済全体の変数の状態に関心がある。すなわち、s と k の経済全体の平均値を我々は知りたい。そこで、s と k の推移を描写するマルコフチェーンを作り、その定常分布を求める。そのためには、policy functionおよび推移確率 P から s,k に関するマルコフチェーンを作成する必要がある。

$$prob\left(k_{t+1} = k', s_{t+1} = s'\right) = \lambda\left(k', s'\right)$$

とする。この確率分布の中で、定常分布となるものを見つけることが我々の目標である。

まず、k と s をグリッドに分割し、グリッドに入るか、入らないかという情報を用いて推移確率行列を計算する。

$$I\left(k', s, k\right) = 1 \quad \text{if} \quad k' = g\left(k, s\right) \quad \text{otherwise zero,}$$

とするIndicator Functionを考える。これは、s, k の下で、次の期に k' になるか否かを判定する。k' と s' のペアに到達する確率を考えると、(k, s) から (k', s') に移行する確率は

$$prob\left(k', s' | k, s\right) = prob\left(s_{t+1} = s' | s_t = s\right) I\left(k', s, k\right)$$

で与えられる。ここから、推移確率行列の要素を得ることが出来る。定常分布は

$$\lambda\left(k', s'\right) = \sum_k \sum_s \lambda\left(k, s\right) prob\left(s_{t+1} = s' | s_t = s\right) I\left(k', s, k\right)$$

で、λ に関する不動点を求めれば、それが定常分布となる。均衡では、個人の資本ストックや労働供給が集計されてマクロ資本および労働投入量になるから、

$$K = \int k\lambda\left(k, s\right) dkds$$

$$N = \int s\lambda\left(k, s\right) dkds$$

したがって、要素価格は

$$r = r\left(K, N\right) = \alpha \left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha - 1}$$

$$w = w\left(K, N\right) = \left(1 - \alpha\right) \left(\frac{K}{N}\right)^{\alpha}$$

で与えられる。

ここで、均衡を実際に計算するときに面倒なことが生じる。家計が Bellman Equation を解く際には、金利と賃金は所与、すなわち外生であった。ところが、金利と賃金は均衡で、すなわち家計の最適化行動の結果を踏まえて決定される。すなわち、均衡金利、賃金と家計の意思決定は同時決定となり、均衡を求める際には、均衡式と家計の最適化問題を同時にみたすような賃金と金利を求めねばならない。このような金利や賃金は、不完備市場では常に存在するとは限らず、また存在しても完備市場のような性質を有するとは限らない。しかしながら、離散近似で DP を解く限りは、家計の最適化行動はユニークな解を持つことが保証されており、モデルの正しい解であるか否かはともかく、数値的なユニークな解を得ることは、多くの場合可能になっているる

2.3 Aiyagari モデルの単純版

このモデルを解くコードは有名であり、また、数値計算の精度の限界が明らかになるものでもある。得られる分布の大まかな形状は正しいが、グリッドを増やしても細かな奇妙な振動は消滅せず、また、収束基準を厳しくすると、ループに陥り、Bellman Equation が収束しなくなる可能性があるので注意すること。

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%                    SMODEL 2
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% set parameter values
%
sigma = 1.50; % risk aversion
beta = 0.98; % subjective discount factor
prob = [ .8 .2; .5 .5]; % prob(i,j) = probability (s(t+1)=sj | s(t) = si)
delta = 0.97; % 1 - depreciation
A = 1.00; % production technology
alpha = 0.25; % capital's share of income
theta = 0.05; % non-rental income if unemployed is theta*wage
Kstart = 10.0; % initial value for aggregate capital stock
g = 0.20; % iteration の relaxation parameter
%
```

```
% form capital grid
%
maxkap = 20; % maximum value of capital grid
inckap = 0.05; % size of capital grid increments
nkap = round(maxkap/inckap+1); % number of grid points
%
% calculate aggregate labor supply
%
[v1,d1]=eig(prob');
[dmax,imax]=max(diag(d1));
probst1=v1(:,imax);
ss=sum(probst1);
probst1=probst1/ss;
pempl=probst1(1,1);
%
N = 1.0*pempl + theta*(1-pempl);
%
% loop to find fixed point for agregate capital stock
%
liter = 1;
maxiter = 50;%iteration に時間がかかるので、
toler = 0.001;% 収束条件に関しては注意すること。あまり厳しくすると収
束しなくなるる
metric = 10;
K = Kstart;
disp('ITERATING ON K');
disp('');
disp(' liter metric meanK Kold');
%
% 均衡総資本を求めるループ
%
while (metric > toler) & (liter <= maxiter);
    %
    % calculate rental rate of capital and wage
    %
    wage = (1-alpha) * A * K^(alpha) * N^(-alpha);% K と N から要素
価格を求める
    rent = (alpha) * A * K^(alpha-1) * N^(1-alpha);
    %
```

```
% tabulate the utility function such that for zero or negative
% consumption utility remains a large negative number so that
% such values will never be chosen as utility maximizing
%
util1=-10000*ones(nkap,nkap); % utility when employed
util2=-10000*ones(nkap,nkap); % utility when unemployed 状態に応
じて効用を分離
 for i=1:nkap;
     kap=(i-1)*inckap;% 効用関数の作り方は離散近似
          for j=1:nkap;
           kapp = (j-1)*inckap;
           cons1 = wage + (rent + delta)*kap - kapp;
                if cons1 > 0;
              util1(j,i)=(cons1)^(1-sigma)/(1-sigma);
             end;
          cons2 = theta*wage + (rent + delta)*kap - kapp;
              if cons2 > 0;
              util2(j,i)=(cons2)^(1-sigma)/(1-sigma);
               end;
         end;
end;
%
% initialize some variables
%
v = zeros(nkap,2);
decis = zeros(nkap,2);
test = 10;
 [rs,cs] = size(util1);
%
% iterate on Bellman's equation and get the decision
% rules and the value function at the optimum
%
 while test ~= 0;
      for i=1:cs;
          r1(:,i)=util1(:,i)+beta*(prob(1,1)*v(:,1)+ prob(1,2)*v(:,2));
          r2(:,i)=util2(:,i)+beta*(prob(2,1)*v(:,1)+ prob(2,2)*v(:,2));
     end;
     [tv1,tdecis1]=max(r1);
      [tv2,tdecis2]=max(r2);
```

```
      tdecis=[tdecis1' tdecis2'];
      tv=[tv1' tv2'];
       test=max(any(tdecis-decis));
       v=tv;
       decis=tdecis;
 end;
decis=(decis-1)*inckap;
 %
% form transition matrix
% trans is the transition matrix from state at t (row)
% to the state at t+1 (column)
% The eigenvector associated with the unit eigenvalue
% of trans' is the stationary distribution.
%
g2=sparse(cs,cs);
g1=sparse(cs,cs);
 for i=1:cs
       g1(i,tdecis1(i))=1;
       g2(i,tdecis2(i))=1;
end
 trans=[ prob(1,1)*g1 prob(1,2)*g1; prob(2,1)*g2 prob(2,2)*g2];
trans=trans';
 probst = (1/(2*nkap))*ones(2*nkap,1);
test=1;
while test > 10^(-8);
      probst1 = trans*probst;
      test = max(abs(probst1-probst));
       probst = probst1;
 end;
%
% vectorize the decision rule to be conformable with probst
% calculate new aggregate capital stock meanK
 %
kk=decis(:);
 meanK=probst'*kk;
 %
 % calculate measure over (k,s) pairs
% lambda has same dimensions as decis
%
```

```
    lambda=zeros(cs,2);
     lambda(:)=probst;
    %
    % calculate stationary distribution of k
    %
     [v1,d1]=eig(prob');
     [dmax,imax]=max(diag(d1));
     probst1=v1(:,imax);
     ss=sum(probst1);
     probst1=probst1/ss;
    probk=sum(lambda'); % stationary distribution of 'captal'
    probk=probk';
     %
    % form metric and update K
     %
     Kold = K;
     Knew = g*meanK + (1-g)*Kold;
    metric = abs((Kold-meanK)/Kold);
     K = Knew;
     disp([ liter metric meanK Kold ]);
    liter = liter+1;
end;
%
% print out results
%
disp('PARAMETER VALUES');
disp('');
disp(' sigma beta delta A alpha theta');
disp([ sigma beta delta A alpha theta]);
disp('');
disp('EQUILIBRIUM RESULTS ');
disp('');
disp(' K N wage rent');
disp([ Kold N wage rent ]);
%
% simulate life histories of the agent
%
disp('SIMULATING LIFE HISTORY');
k = Kold; % initial level of capital
```

```
n = 100; % number of periods to simulate
s0 = 1; % initial state
hist = zeros(n-1,2);
cons = zeros(n-1,1);
invest = zeros(n-1,1);
grid = [ (0:inckap:maxkap)' ];
[chain,state] = markov(prob,n,s0);
for i = 1:n-1;
       hist(i,:) = [ k chain(i) ];
       I1 = round(k/inckap) ;
       I2 = round(k/inckap) + 1;
      if I1 == 0;
           I1=1;
            disp('N.B. I1 = 0');
       end;
       if I2 > nkap;
            I2 = nkap;
            disp('N.B. I2 > nkap');
       end;
      weight = (grid(I2,1) - k)/inckap;
      kprime = weight*(decis(I1,chain(i))) + (1-weight)*(decis(I2,chain(i)));
       if chain(i) == 1;
            cons(i) = wage + (rent + delta)*k - kprime;
            elseif chain(i) == 2;
            cons(i) = wage*theta + (rent + delta)*k - kprime;
            else;
           disp('something is wrong with chain');
           chain
      end;
       k = kprime;
      invest(i) = kprime;
end;
%
%
subplot(2,2,1),plot((1:n-1)',invest,(1:n-1)',cons);
title('MODEL 2: INVESTMENT AND CONSUMPTION');
print histmod2
disp('Covariance matrix');
disp([cov(cons,invest)]);
```

```
%
% calculate income distribution
%
income = [ (rent*grid + wage) (rent*grid + wage*theta) ] ;
[ pinc, index ] = sort(income(:));
plambda = lambda(:);
%
subplot(2,2,2), plot(pinc,plambda(index));
title('MODEL 2: INCOME DISTRIBUTION');
xlabel('INCOME LEVEL');
ylabel('% OF AGENTS');
print distmod2
%
% calculate capital distribution
%
subplot(2,2,3),plot(grid,probk);
title('MODEL 2: CAPITAL DISTRIBUTION');
xlabel('CAPITAL GRID');
ylabel('% OF AGENTS');
print capdmod2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% マルコフチェーンで履歴をシミュレートする
%

function [chain,state]=markov(T,n,s0,V);
%function [chain,state]=markov(T,n,s0,V);
% chain generates a simulation from a Markov chain of dimension
% the size of T
%
% T is transition matrix
% n is number of periods to simulate
% s0 is initial state
% V is the quantity corresponding to each state
% state is a matrix recording the number of the realized state at time t
%
%
[r c]=size(T);
if nargin == 1;
V=[1:r];
```

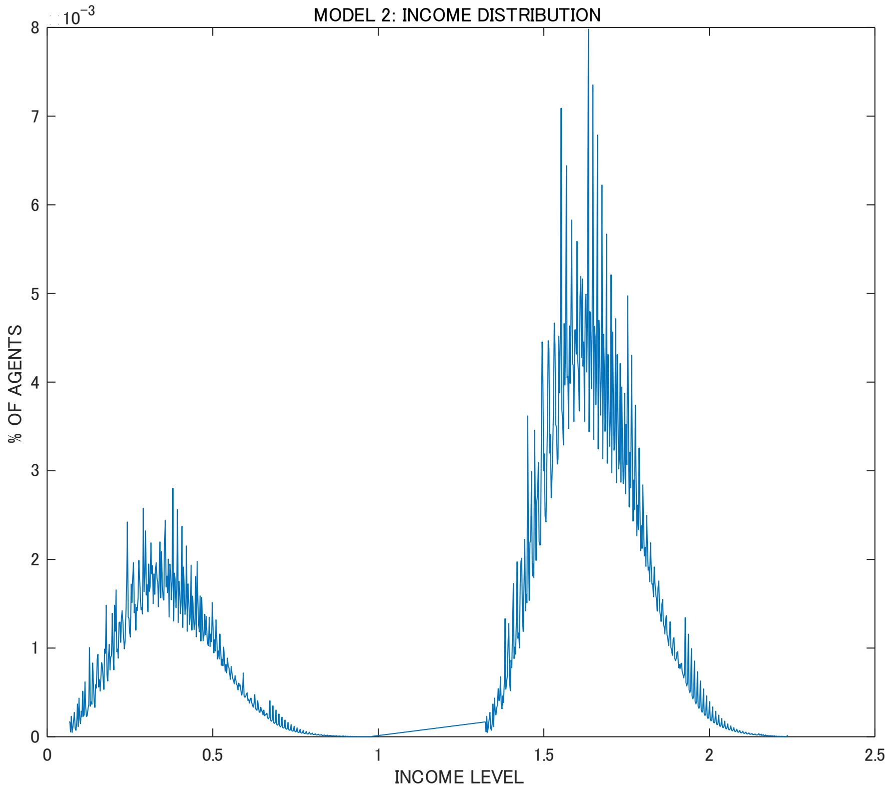
```
s0=1;
n=100;
end;
if nargin == 2;
V=[1:r];
s0=1;
end;
if nargin == 3;
V=[1:r];
end;
%
if r ~= c;
disp('error using markov function');
disp('transition matrix must be square');
return;
end;
%
for k=1:r;
if sum(T(k,:)) ~= 1;
disp('error using markov function')
disp(['row ',num2str(k),' does not sum to one']);
disp(' it sums to :');
disp([ sum(T(k,:)) ]);
disp(['normalizing row ',num2str(k),'']);
T(k,:)=T(k,:)/sum(T(k,:));
end;
end;
[v1 v2]=size(V);
if v1 ~= 1 |v2 ~=r
disp('error using markov function');
disp(['state value vector V must be 1 x ',num2str(r),''])
if v2 == 1 &v2 == r;
disp('transposing state valuation vector');
V=V';
else;
return;
end;
end
if s0 < 1 |s0 > r;
```

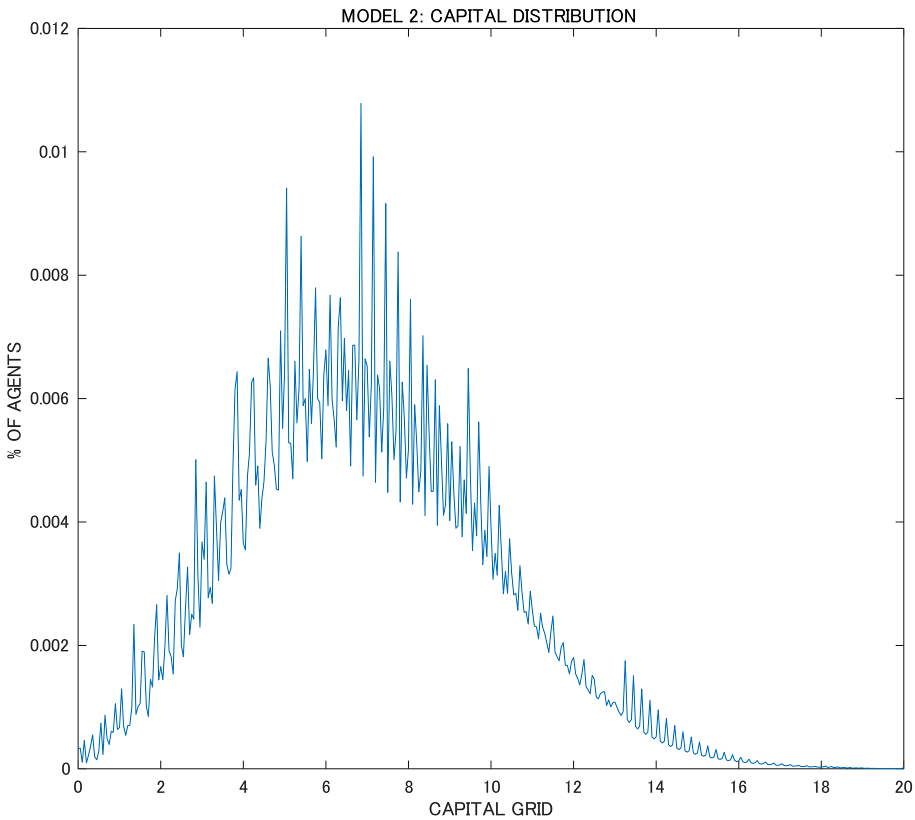
```
disp(['initial state ',num2str(s0),' is out of range']);
disp(['initial state defaulting to 1']);
s0=1;
end;
%
%T
%rand('uniform');X=rand(n-1,1);
s=zeros(r,1);
s(s0)=1;
cum=T*triu(ones(size(T)));
%
for k=1:length(X);
state(:,k)=s;
ppi=[0 s'*cum];
s=((X(k)<=ppi(2:r+1)).*(X(k)>ppi(1:r)))';
end;
chain=V*state;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 出力結果

%
>> MODEL 2
PARAMETER VALUES
sigma beta delta A alpha theta
1.5000 0.9800 0.9700 1.0000 0.2500 0.0500
EQUILIBRIUM RESULTS
K N wage rent
7.0105 0.7286 1.3209 0.0458
SIMULATING LIFE HISTORY
Covariance matrix
0.0032 0.0601
0.0601 1.2548
16.6540
```

グリッドの分割幅が 0.05 の場合、私の Thinkpad では、約 17 秒で計算は終了する。


MODEL 2: INCOME DISTRIBUTION
$\times 10^{-3}$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
% OF AGENTS
0
0.5
1
1.5
2
2.5
INCOME LEVEL


MODEL 2: CAPITAL DISTRIBUTION
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
% OF AGENTS
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
CAPITAL GRID

3 Aggregate Uncertainty: 導入

Hugget や Aiyagari モデルは、動学モデルではあっても、総資本ストックや労働供給量は一定であり、したがって金利や賃金も時間に依存せず一定であった。不確実性は個人レベルでは存在しても、マクロレベルでは大数法則により均されており、個人レベルでは所得の増減があっても、マクロレベルでは総所得に変化はなかった。しかし、これでは、マクロの景気循環モデルとして使うことはできない。Aiyagari モデルにマクロの生産性ショック等を導入して初めて、不完備資本市場における景気循環分析が可能となる。はたして、個人レベルでの貸し借りに制限がある不完備資本市場では、実物景気循環モデルが考えるような完備資本市場と異なる景気循環の特徴が出てくるのだろうか?景気循環の局面により、資産分布や所得分布に大きな変化は出ててくるのだろうか?

上記の問題に対する最初の回答は、Krusell and Smith (1998) により与えられた。結論から言うと、Krusell and Smith (1998) は、不完備資本市場モデルと標準的な完備資本市場のモデルで、定常資本ストック水準の量や消費と生産の間の相関、生産の自己相関等、マクロ変数の挙動はほとんど同じであるとしている。標準的 RBC モデルに比べ、何百倍もの時間をかけて (Krusell and Smith (1998) のアルゴリズムは、当時であれば数時間、状況によっては何十時間もかかっている。一方、当時の PC でも、線形 RBC モデルの計算は数秒で終了したはずである。)、複雑なモデルを解き、得たのは、非常に単純な完備資本市場モデルとほぼ同じだったのである。

Krusell and Smith のモデルは、非常に単純な不完備資本市場モデルにマクロショックを導入したものであり、多くの拡張可能性がある。労働供給の内生化、労働市場のサーチ活動、リスク資産の導入、世代重複モデルの導入、住宅資産の導入等である。そして、実際に多くの Follower を作り出している。また、Nakajima (2010) や、Krusell, Mukoyama, Sahin, and Smith (2008) 等、日本人による貢献も大きい分野でもある。しかし、不完備市場の導入が、完備市場と大きく異なるマクロ変数の挙動を生み出す、という結果はなかなか得られていないのが現状である。

無論、不完備市場を導入することにより、所得分布の変化、景気循環のコスト分析、等、完備市場では分析不可能な側面の分析が可能になるというメリットは非常に大きい。しかしながら、そのような側面を重視せず、ただ、マクロ諸変数の挙動を説明する、という目的のためには、不完備市場の導入は、その計算費用に対応する程の大きな変化は、なかなか得ることが出来ていない。この分野は、まさにマクロ経済学のフロンティアであり、毎年非常に多くの論文が発表されている。Krusell and Smith (1998) は、かつての Kydland and Prescott (1982) や Solow(1965) のようなベンチマークモデルとしての地位を確立しているのである。なお、この分野サーベイとしては、Krusell and

Smith (2006) と Heathcode, Storesletten, and Violante (2009) が便利である。

4 Krusell and Smith の経済

Aiyagari モデルの家計の Bellman Equation は

$$v(k,s) = \max_{c,k'} \left[u(c) + \beta E \left[v(k', s'|s) \right] \right]$$

s.t.

$$c + k' = rk + ws + (1-\delta) k, 0 \leq k'$$

だった。総資本ストックと労働供給は、

$$K = \int k\lambda(k,s)\, dkds$$

$$N = \int s\lambda(k,s)\, dkds$$

で与えられている。すなわち、総資本ストックと総労働供給は、家計レベルの就業状態 (s) と資産水準 (k) の分布に依存している。また、生産技術を一次同次のコブダグラス型とすると、金利と賃金は、

$$r = r(K,N) = \alpha \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha - 1}$$

$$w = w(K,N) = (1-\alpha) \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha}$$

となっていた。Krusell and Smith (1998) は、この Aiyagari モデルに、マクロ生産性ショック z を導入する。すなわち、金利と賃金は

$$r = r(K,N) = z\alpha \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha - 1}$$

$$w = w(K,N) = z(1-\alpha) \left(\frac{K}{N} \right)^{\alpha}$$

となる。マクロの総生産性ショックは、無論、家計レベルの資産・就業状態の分布にも影響を与えるので、

$$\lambda' = H(\lambda, z) \tag{10}$$

家計の Bellman Equation は

$$v(k,s;\lambda,z) = \max_{c,k'} \left[u(c) + \beta E \left[v(k', s'; \lambda', z' | (s,z,\lambda)) \right] \right] \tag{11}$$

s.t.

$$c + k' = rk + ws + (1-\delta)\,k, 0 \le k'$$

となる。

また、家計レベルの資本・就業状態の分布は時間に依存するようになり、$\lambda_t\,(k,s)$ となる。したがって、総資本ストック等は

$$K_t = \int k\lambda_t\,(k,s)\,dkds$$

$$N_t = \int s\lambda_t\,(k,s)\,dkds$$

この経済の均衡は下記のように定義できる。

均衡 (Krusell and Smith)

Krusell and Smith 経済の均衡は、要素価格 r, w、価値関数、Policy Function $k' = f\,(k,s;\lambda,z)$、および λ' を規定する H であり、

(1)　要素価格と H を所与として、価値関数は (11) を満たし、$k' = f\,(k,s;\lambda,z)$ が対応する Policy Function となる。

(2)　s, z および $k' = f\,(k,s;\lambda,z)$ によって作られるマルコフチェーンは、今日の $\lambda\,(k,s)$ を H に寄り、来期の $\lambda'\,(k,s)$ に移す。

均衡そのものの定義は、上記のように単純であるが、状態変数に $\lambda\,(k,s)$ が入っていることにより、実質的にこの問題は解くことは不可能になっている。$\lambda\,(k,s)$ は、この経済に存在する全構成員の資産保有量と就業状態の分布である。完備市場では、各家計の消費・貯蓄行動は同一であったが、不完備市場では、資産家と貧乏人では消費・貯蓄行動が異なり、経済の分布により、来期の資本ストック水準が異なってくるためである。

Krusell and Smith (1998) は、この、完全に合理的な家計行動を捨て、その近似として、$\lambda\,(k,s)$ の情報をいくつかの、moment の情報に落とし、各主体は、分布そのものではなく moment の情報により意思決定をする、と仮定した。moment を $m = (m_1, m_2, ..., m_I)$ とすると、各主体の Bellman Equation は

$$v\,(k,s;m,z) = \max_{c,k'}\left[u\,(c) + \beta E\left[v\,(k',s';\lambda',z' |\,(s,z,m))\right]\right] \qquad (12)$$

に資源制約等を加えたものになる。この問題なら、curse of dimensionality の問題はかなり軽減される。Krusell and Smith は、一次の moment のみに依存して各主体は意思決定を行うと仮定した。さらに、z として、good と bad の二つの状態しかないと仮定し、

$$\begin{aligned} \ln K' &= \gamma_{0g} + \gamma_{1g}\ln K \quad \text{if z=good} \\ \ln K' &= \gamma_{0b} + \gamma_{1b}\ln K \quad \text{if z=bad} \end{aligned} \qquad (13)$$

、とした。各家計はこのルールで将来予測を行い、実際の総資本ストックは、家計のストックの積分で与える。両者のずれが少なければ、家計の意思決定はほぼ正しいことになる。Krusell and Smith(1998) は、この経済の均衡を解くアルゴリズムとして、下記のようなものを提唱している。

(1)　(13) のパラメターを guess する

(2)　家計の Bellman Equation を解く

(3)　分布関数のシミュレーションを行う

(4)　シミュレートされた分布関数から総資本ストックを計算し、(13) のパラメターを計算する。

(5)　(1) が収束するまで計算を続ける

(6)　収束したら、なんらかの goodness of fit のテストを行う。うまくいかなかったら、異なる (13) の定式化を考える

より具体的には、初期状態として、各家計は平均的なストック水準を保有していると仮定し、シミュレーションの最初の 1000 回を捨てる。家計数は 5000 とし、シミュレーションは 11000 回行っている。(13) が一次の moment のみに依存する、ということは、この経済の資産分布の不平等がこの経済にほとんど影響していないことを意味する。このかなり極端な仮定は、しかしながら、彼らによると妥当なものであり、実際、(13) をシミュレーションパスを用い推計すると、決定係数は good、bad の両方の時で 0.9999 を超え、ほぼ完全な fit が得られている。二次 moment を追加しても、追加的に得られる情報はほとんどなく、総資本ストックの動きに対する影響はほぼゼロとなる。

Goodness of Fit テストには、総資本ストック遷移式の決定係数の大きさ、及び資本ストック遷移式で予測された来季の資本ストックと、シミュレートされた家計レベルの資本ストックの平均値のダイナミクスを比較するもの、が考えられているが、近年、よく用いられるのは Euler Equation Error である。Euler Equation は、条件付き期待値で与えられているので、実現値と、その条件付き期待値との差は、情報集合に含まれている変数とは直行するはずである。そこで、シミュレートされた家計の消費系列から Euler Equation Error を計算し、実際に直行しているかどうか、その平均値がゼロになっているか否かで、モデルの「正しさ」を検証することができる。これは容易に実行可能であり、近年では多くの研究がこのテストを用いている

Table 2 は Krusell and Smith (1998) が計算したものである。Benchmark ケースは、この経済で対数効用を仮定したもの。Real Businee Cycle は、労働供給を内生化させたもの、Stochastic β は、割引率を三種の値をとるマルコフチェーンとし、家計間で異なる値をとると仮定したものである。この仮定により、資産分布はより不平等となる。

まず、資本ストック水準そのものをみると、不完備市場では予備的貯蓄の分だけ増加しており、リスク回避度が高ければ、予備的貯蓄も大きくなる。次に、設備投資の標準偏差は、完備と不完備で違いはなく、消費と生産の相関、

TABLE 2

Aggregate Time Series

Model	Mean(k_t)	Corr(c_t, y_t)	Standard Deviation (i_t)	Corr(y_t, y_{t-4})
Benchmark:				
Complete markets	11.54	.691	.031	.486
Incomplete markets	11.61	.701	.030	.481
$\sigma = 5$:				
Complete markets	11.55	.725	.034	.551
Incomplete markets	12.32	.741	.033	.524
Real business cycle:				
Complete markets	11.56	.639	.027	.342
Incomplete markets	11.58	.669	.027	.339
Stochastic-β:				
Incomplete markets	11.78	.825	.027	.459

生産の自己相関にも、完備と不完備の間に大きな差はない。すなわち、マクロ変数の動きをみるためだけであれば、不完備市場を仮定する必要はほとんどないのである。

5 アルゴリズムの改善

2010 年の Journal of Economic Dynamics and Control は特集号を組み、Krusell and Smith のコードの改善をテーマに多くの論文が、コードとともに集められている。その比較の結果は Den Haan (2010) でまとめられており、一読の価値がある[3]。その中で、最もよい評価が与えられているのが、Reiter (2010) によるアルゴリズムである。Krusell and Smith (2010) の Value Function Iteration を policy function itertation に置き換えた Maliar et al. (2010) の Matlab アルゴリズムは、Xeon　3.0GHz で 40 分ほどかかるが、Reiter の Matlab コードは 10 分弱で終了する。そして、Den Haan (2010) によると、計算精度も Reiter によるものがもっとも高くなっている。

Krusell and Smith のアルゴリズムには、(1) Value Function Iteration と

[3] この特集号は、複雑な Krusell and Smith のコードの様々なバージョンが集められており、この分野に興味のあるものは必読である。特に、Maliar et al. (2010) のコードは読みやすく、手を入れやすいので、ダウンロードして一度回すことを強く推薦する。

(2) 総資本ストック決定ルール (Aggretate Law of Motion, ALM) という、二つのループがあり、(2) では大量の家計についてシミュレーションを行っている。この結果、コードの実行に多くの時間がかかることになる。Reiter のアルゴリズムは、資産分布のヒストグラムをパラメターで描写することで、(2) のステップをなくすことに成功している。Krusell and Smith (1998) では、総資本ストックを計算するには、一度シミュレーションをせねばならなかったが、もしも分布が手元にあれば、そこからシミュレーションせずに、機械的に平均値や分散を計算することができる。これは、著しく計算速度を速める。次に、Reiter は、Value Function Iteration ではなく、Backward Induction を用いることを提唱している。Backward Induction を行うには、終末期に関する状態の情報が必要である。ここで、Reiter は、終末期として、マクロショックのない、定常均衡における分布と Value を週末期とし、そこから Backward Induction を行うことを提唱している。Backward Induction は、通常、Value Function より高速である。さらに、Carroll の提唱した Endogenous Grid を用いることで、さらに計算効率を高めることもできる。Reiter のアルゴリズムは、具体的には下記のようになる。

(1)　資産分布に関する情報をパラメターで表す

(2)　マクロショックのない状況での定常分布を導く

(3)　マクロショックのない状況での、資産分布をいくつかの moment で予測する式を指定する

(4)　(3) で用いる moment の数を指定する

(5)　Backward Induction で Value Function を計算する。

Reiter のアルゴリズムは十分に高速であり、より低級言語、Fortran や C を用いずとも、実用的な速度でマクロモデルを解くことができる。