2016年応用マクロ経済学
指数理論(9)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成31年11月6日

概 要

Superlative Index

1 Superlative Index

経済学的アプローチは、物価指数である生計費指数を広大な経済学の体系の中に位置づけることにより、物価指数と失業や国内総生産等、他の経済諸変数との関係を分析する際に一貫した理論や分析手法を提供する。これは、経済学の視点で世の中を見る者にとっては自然な発想であり、かつ非常に魅力的である。一方、物価指数の研究は経済学者のみが担ってきたわけではなく、経済学のバックグラウンドをもたない実務家、統計学者、あるいは数学者が、彼らなりの「望ましい」物価指数の在り方を追求しており、彼らの中には、経済学の体系の中に指数を位置づけること自体に必ずしも価値を見出さない者がいてもおかしくない。経済学的な思考法になじみのないものに取り、効用関数のように、我々が直接観察できない、仮想的なモデルの関数形を事前に特定化したうえで計算する生計費指数に説得力を感じないのも無理のないことである。

たとえ経済学を専攻するものにとっても、生計費指数がよって立つ効用関数や費用・支出関数の関数形を具体的に仮定することに対しては抵抗を感じるものも少なくないだろう。フィッシャー指数やウォルシュ指数を生計費指数とする Quadratic Mean of Order r 関数は、費用・支出関数が効用水準と単位費用関数の掛け算、すなわち、ホモセティック選好を仮定しているため、所得弾力性は1に固定され、奢侈品や下級財は存在しなくなってしまう[1]。また、トルンクビスト指数を導く Translog 型はノンホモセティックな選好を許容するものの、それが全ての財・サービスに関して「正しい」支出関数であると仮定することにはやはり無理がある。物価指数の経済学的アプローチは、

[1]効用関数とみなす場合は、一次同次なので、やはり選好はホモセテイックとなる。

多くの (時に非現実的な) 仮定を必要とする、というのが、その支持者、批判者の間の共通の認識であった。

1970 年代後半に登場した、アーウィン・ディーワートによる最良指数 (Superlative Index) は、そうした議論に対して大きな一石を投じた。“Superlative” とはあまりなじみのない言葉であるが、もともとは指数理論における公理的アプローチの創始者アーヴィング・フィッシャー (Fisher (1922)) が様々な指数をランク付けする際に、下から Fair、Good、Very Good、Excellent、そして Superlative と 5 段階に分け、最も高く評価される指数を Superlative　Index、最良指数と名付けたことに由来する[2]。ディーワート[3]の定義する Superlative Index とは、生計費指数として位置づけられるような効用関数、あるいは費用・支出関数を有する物価指数であり、かつ、その効用関数、あるいは費用・支出関数が、柔軟であり「任意」の関数の二階の近似となるものである。そして、フィッシャー指数、ウォルシュ指数、トルンクビスト指数は Superlative Index となっている。二つの異なる Superlative Index は互いによく似た動きをすることが多く、どの指数算式を選択するかは大きな問題ではない、ということも主張している。これが正しければ、経済学的アプローチの欠点であった、「強い関数形の仮定」を回避することが可能であり、ひいては、望ましい物価指数算式の追求、というアジェンダそのものも過去のものとなる。この結果は大いに注目を集め、現代経済学の礎をつくったポール・サミュエルソン (Samuelson (1983)) は自身による『経済分析の基礎』以来、40 年近くの指数理論研究で生じた唯一最大の進展と評価している[4]。また、90 年代半ばにアメリカ合衆国政府に提出された Boskin Report は、アメリカの公式物価指数として Superlatie Index の採用を提唱した。アメリカ合衆国では、伝統的なラスパイレス指数に加えて、生計費指数に基づくものとして、2002 年以降、最良指数の一つであるトルンクビスト物価指数 (C-CPI-U) を発表している[5]。

Superlative Index の登場は、各国の統計局に、経済学的アプローチ、生計費指数を物価指数計測の際の基本的な考え方として採用するか否かの意思決定を強いることになり、特に Boskin Report 発表後の 20 世紀末から 21 世紀初頭にかけて活発な議論が交わされた。明確に生計費指数を否定する決定をしたのは英国及びユーロ圏諸国であり、ピーター・ヒル及びラルフ・ターベイが反対の論陣を張った。また、Superlative Index に対しては、アンガス・ディートンのような著名経済学者も批判的な見解を表明しており、議論は今でも継続している。

現在の指数理論にとり、ディーワートによる Superlative Index は非常に重要な存在であり、なるべく正確に理解することが望ましい。今回は、Superlative

[2]ただし、Fisher (1922) は Superlative という用語に厳密な定義を与えていない。

[3]Diewert, W. Erwin (1976), ”Exact and Superlative Index Numbers”, *Journal of Econometrics* 4: 115-145.

[4]Samuelson, Paul A. (1983), *Foundations of Economic Analysis. Enlarged Edition*, Cambridge, MA and London, England, Harvard University Press, 1983.

[5]正確には、トルンクビスと指数に基づく連鎖指数である。

Index を極力詳しく紹介した上で、どのような批判や議論が交わされているのか見ていこう。D

2 Flexible Function

Superlative Index の定義で重要な役割を果たすのは、関数が Flexible である、ということである。ここでは関数の柔軟性、Flexibility について議論する。

二つの関数 f と $f^* : \mathbf{R}^n_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ を考える。どちらも二階の微分可能性を仮定すると、両者の二階の近似が一致するためには、$x^* \in \mathbf{R}^n_{++}$ において、

$$f\left(x^*\right) = f^*\left(x^*\right) \tag{1}$$

$$\nabla f\left(x^*\right) = \nabla f^*\left(x^*\right) \tag{2}$$

$$\nabla^2 f\left(x^*\right) = \nabla^2 f^*\left(x^*\right) \tag{3}$$

である。各条件で課される方程式の数は、(1) は 1 つ。(2) は n 次元なので n 個。(3) は $n \times n$ なので n^2 である。ここで、さらに f と f^* のいずれも二階の連続微分可能性を仮定すると Young の定理が成立するため、$\nabla^2 f\left(x^*\right)$ は対称行列になる。したがって、$n \times n$ 行列であることを考慮すると、(3) の制約の数は、$n(n+1)/2$ である。したがって、制約の数は全部で $1+n+n(n+1)/2$ である。

例えば、

$$f\left(x\right) = a_0 + a'x + \frac{1}{2}x'Ax \tag{4}$$

という関数 $f\left(x\right)$ を考えると、自由なパラメターの数は $1+n+n(n+1)/2$ となる。具体的な対応は、(1)-(3) を計算し、

$$\begin{aligned} a_0 + a'x^* + \frac{1}{2}x^{*\prime}Ax^* &= f^*\left(x^*\right) \\ a + Ax^* &= \nabla f^*\left(x^*\right) \\ A &= \nabla^2 f^*\left(x^*\right) \end{aligned}$$

とすれば、A, a, a_0 を得ることが可能である。すなわち、任意の二階連続微分可能な関数 $f^*\left(x\right)$ は、(4) で定義された関数 $f\left(x\right)$ により、二階まで近似可能となっている。

経済学モデルでは、往々にして $f^*\left(x\right)$ に対し一次同次性を仮定することがある。例えば、支出関数や費用関数は価格に関する一次同次性を満たすことが仮定されている。支出関数を用いて COLI を計算する場合、全ての二階連

続微分可能な関数を考える必要はなく、あくまで二階連続可能な一次同次関数の中に限定することが可能である。すなわち、関数 $f(x)$ が近似せねばならない関数の範囲を狭くすることが可能である。ところが、一次同次性をみたす関数を二階まで近似する関数 $f(x)$ を見つけることはそれほど自明ではない。例えば、(4) で一次同次性を課すと

$$a_0 = 0, A = 0$$
$$f(x) = a'x$$

となってしまうが、これだと (3) も (1) も満たさなくなる。すなわち、(4) の形では経済学上意味のある近似にはならないのである。

関数 $f^*(x)$ が一次同次であるとき、一階、および二階の微係数については、下記の制約を課すことができる。すなわち、任意の $x \in \mathbf{R}^n_{++}$ に関して、

$$x'\nabla f(x) = f(x) \tag{5}$$

$$\nabla^2 f(x) x = 0 \tag{6}$$

$$\nabla^2 f(x) = \left[\nabla^2 f(x)\right]' \tag{7}$$

なお、オイラーの公式より、n 次同次関数を一回微分は $n-1$ 次同次になる性質を利用している。制約の数は、それぞれ $1, n, n(n-1)/2$ である

さて、二階の連続微分可能な一次同次関数、f と $f^* : \mathbf{R}^n_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ を考えよう。すると、両関数とも (5) – (7) を満たす。さらに、f が f^* の二階までの近似になるためには、

$$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x p_j} = \frac{\partial^2 f^*(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{for } 1 \le i < j \le n \tag{9}$$

を満たさねばならない。必要な制約の数は、それぞれ n と $n(n-1)/2$、すなわち、$n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ である。なお、$\nabla f(x^*) = \nabla f^*(x^*)$ であれば、両関数とも一次同次であるため、$\nabla f(x^*) x^* = \nabla f^*(x^*) x^* = f(x^*) = f^*(x^*)$ となっていることに注意されたい。また、(9) は対角成分を除外している。これは、非対角成分が定まり、かつ、$\nabla^2 f(x^*) x^* = \nabla^2 f(x^*) x^* = 0$ が成立していれば、そこから対角成分もまた決定されるためである。

3 Quadratic Mean of Order r

Walsh 指数を COLI とする効用関数の時に用いた二階連続微分可能な一次同次関数であるような下記の関数を考えよう。

$$
\begin{aligned}
f(p) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i^{r/2} p_k^{r/2} \right)^{1/r} \\
a_{ij} &= a_{ji}, r \neq 0
\end{aligned}
$$

これは、同様に二回連続微分可能な任意の一次同次関数 $f^*(x)$ の二階の近似になるだろうか?Diewert (1976) はまさにこの関数が $f^*(x)$ の二階の近似となることを示している。r を固定し、a_{ij} だけ自由に動かすとすると、対角成分を含めて、全部で $n(n+1)/2$ 個存在する。したがって、パラメターの数は十分に足りている。したがって、示すべきは、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} &= \frac{\partial^2 f^*}{\partial p_i \partial p_j} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq n \\
\nabla f(x^*) &= \nabla f^*(x^*)
\end{aligned}
$$

が成立することを示せばよい。これは、力業で、(8) と (9) を並べ、a_{ij} に関する $n(n+1)/2$ 個方程式からなる連立方程式を解き、その階がユニークに定まることを示すことで証明される。結構骨が折れるので、詳しくは Diewert (1976) を参照せよ。この $f(p)$ が Flexible ということは、$r=2$ のときの COLI である Fisher 指数、$r=1$ の時である Walsh 指数は Superlative Index であることを意味する。すなわち、Fisher 指数および Walsh 指数は、両方とも Flexible な関数に対応する COLI である。Flexible な関数ということは、一次同次かつ二回連続微分分可能な任意の関数の二階までの近似になっているということであり、背後の効用・支出関数を設定せずとも、その二階までの近似の COLI とみなすことが可能になるということでもある。

4 Translog

Törnqvist 指数を COLI として導出する際に用いた Translog 型関数は、下記で与えられていた

$$
\begin{aligned}
\ln E(p,u) &= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ln p_i \ln p_k + b_0 \ln u + \sum_{i=1}^{n} b_i \ln p_i \ln u + \frac{1}{2} b_{00} (\ln u)^2 \\
a_{ik} &= a_{ki}, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0, \sum_{i=1}^{n} b_i = 0
\end{aligned}
$$

ここで、効用に関する項を単純化し、変数名を変えると、

$$\ln f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ln x_i \ln x_k$$
$$a_{ik} = a_{ki}, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 0,$$

はたして、これが任意の関数 $f^*(x)$ の二階の近似になることを、やはりグラディエントとヘシアンを並べて両者を一致させるように a_{ik}, a_i, a_0 を選択することが可能であることで証明完了となる。この証明は、Christensen, et al. (1971)[6]で与えられている。なお、パラメターの数は、a_i 及び a_0 が $1+n$ 個。a_{ik} が n^2 個であるが、総和に関する制約より、a_i 及び a_0 は n 個となる。また、対称性の仮定より $n(n-1)/2$ 個、及び n 個がなくなり、$n^2 - n(n-1)/2 - n$ となる。両者の和は $n^2 - n(n-1)/2 = \left(n^2+n\right)/2 = n(n+1)/2$ であり、必要かつ十分な数が存在している。

Tranlog 型が flexible であるということは、Törnqvist 指数は Superlative Index になるということでもある。

Translog 及び Quadratic Mean of Order r の他に、下記の関数が Flexible であることが知られている。

$$f(p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_i^{1/2} \ln p_k^{1/2}$$
$$a_{ik} = a_{ki}$$

これは、Generalized Leontief Cost Function と呼ばれるのであり[7]、パラメターの数はやはり $n(n+1)/2$、さらに明らかに価格に関して一次同次となっている。これが任意の一次同次関数 $f^*(x)$ の二階の近似になることは容易に証明可能である。

5 Superlative Index 間の関係

Fisher, Walsh, Törnqvist 指数はいずれも Superlative Index であった。この共通性は三者の間にどのような関係を生み出すのだろうか?Diewert (1978)[8]は非常に明確な結論を導いている。それは、“ all superlative indexes closely approximate each other (Diewert (1978) p. 884)”、すなわち、任意の二つの Superlative Index は、任意の p と q において、$p_0 = p_1, q_0 = q_1$ において、

[6]Christensen, L.R., D.W. Jorgenson and L.J. Lau, (1971) “Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function,” *Econometrica* 39,255-256.

[7]Diewert, W.E. (1971) “An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function,” *Journal of Political Economy* 79, pp. 481-507.

[8]W. E. Diewert (1978) “Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation,” *Econometrica*, Vol. 46, No. 4 (Jul., 1978), pp. 883-900

互いに二階までの近似となっている。具体的には、Törnqvist 指数を PI^T、Quadratic Mean of Order r に対応する COLI、すなわち、

$$PI^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=\frac{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n}w_i^0\left(p_{i1}/p_{i0}\right)^{r/2}}}{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n}w_i^1\left(p_{i0}/p_{i1}\right)^{r/2}}}$$

さらに、Factor Reversal を用いて定義された Quadratic Mean of Order r に対応する COLI を PI^{r*}、すなわち、

$$PI^{r*}\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}p_{i1}q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n}p_{i0}q_{i0}}\right)\frac{1}{Q^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
PI^T\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)&=PI^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=PI^{r*}\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)\\
\frac{\partial}{\partial p_{it}}PI^T\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)&=\frac{\partial}{\partial p_{it}}PI^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=\frac{\partial}{\partial p_{it}}PI^{r*}\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)\quad\text{for }\forall\text{i, t=0 or 1}\\
\frac{\partial}{\partial q_{it}}PI^T\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)&=\frac{\partial}{\partial q_{it}}PI^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=\frac{\partial}{\partial q_{it}}PI^{r*}\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)\quad\text{for }\forall\text{i, t=0 or 1}\\
\frac{\partial^2}{\partial p_{it}\partial p_{jt}}PI^T\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)&=\frac{\partial^2}{\partial p_{it}\partial p_{jt}}PI^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=\frac{\partial^2}{\partial p_{it}\partial p_{jt}}PI^{r*}\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)\quad\text{for }\forall\text{i,j t=0 or 1}\\
\frac{\partial^2}{\partial p_{it}\partial q_{jt}}PI^T\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)&=\frac{\partial^2}{\partial p_{it}\partial q_{jt}}PI^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=\frac{\partial^2}{\partial p_{it}\partial q_{jt}}PI^{r*}\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)\quad\text{for }\forall\text{i,j t=0 or 1}\\
\frac{\partial^2}{\partial q_{it}\partial q_{jt}}PI^T\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)&=\frac{\partial^2}{\partial q_{it}\partial q_{jt}}PI^r\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)=\frac{\partial^2}{\partial q_{it}\partial q_{jt}}PI^{r*}\left(q_0,p_0,q_1,p_1\right)\quad\text{for }\forall\text{i,j t=0 or 1}
\end{aligned}$$

が成立することを示している。しかしながら、「全ての」Superlative Index が互いの二階近似になっているからと言って、それらが実際に常に近い値になることは意味するわけではない。Superlative という特性はあくまで局所的なものであり、大域的なものではない。そして、パラメターの値によっては、その「局所」性が非常に限定された領域にとどまってしまい、実際のデータがカバーするような範囲では相違が大きくなってしまうケースが存在しうる。実際、R. Hill (2006)[9]は Quadratic Mean of Order r に対応する生計費指数が全て Superlative Index になるということを利用し、r を様々な値に変化させながら、1977 年から 1994 年までのアメリカ合衆国の GDP データを用い、生計費指数を作成し比較した。すると、r をマイナス無限とプラス無限に設定した場合の生計費指数間の差の最大値はラスパイレスとパーシェの間の差よりもかなり高い確率で高くなり (153 項目のうち 146 個で発生)、-5 から 5 までの間に限定しても、かなり高い割合でラスパイレス-パーシェの差を超え

[9]Hill, Robert (2006) “Superlative Index Numbers: Not All of Them Are Super,” *Journal of Econometrics*, 130, pp.25-43.

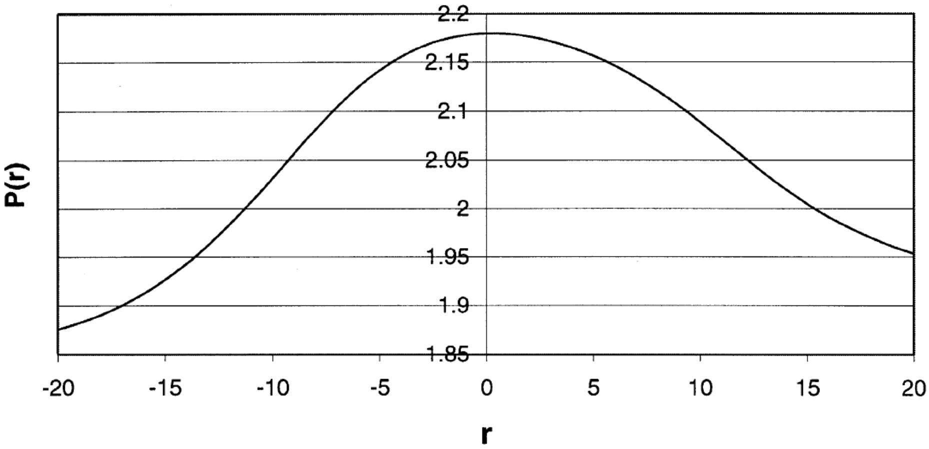

Fig. 1. Price index for 1977–1994 comparison (USA).

ていた。Hill (2006) は r をマイナス無限とプラス無限に発散させたとき、生計費指数は下記を満たすことを見出している。

$$\lim_{r\to\infty} PI^r = \lim_{r\to-\infty} PI^r = \sqrt{\min\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) \times \max\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)}$$

この右辺の値は非常に極端な指数である。すなわち、n 財のうち、もっとも価格変化が大きかったものと小さかったものの幾何平均、二つの極端な値の平均が Superlative Index になってしまうのである。

なお、Quadratic Mean of Order r 関数で、$r = 0, 1, 2$ の三種類の値はそれぞれ、Törnqvist、Walsh、 Fisher の三種類の生計費指数に対応していたことを思い出してほしい。Hill (2006) は、r が 0 と 2 の間で生成される Superlative Index は非常によく似ており、アメリカのデータを用いても、OECD 諸国の国間の物価を用いても、その差は極わずかであり、ラスパイレスとパーシェの差に比べて非常に小さく、差は最大でもコンマ数% 程度に過ぎないことを指摘している。一方、r の絶対値を非常に大きくすると、Superlative Index 間の差は拡大し、最大で 100% を超えることもある。図は Hill (2006) の Figure 1 であり、アメリカの 1977-1994 年 GDP データで、価格と数量の情報が利用可能な 64 系列に関して、r の値を変化させたときの PI^r の違いを図示している。r が 0 近辺、絶対値で 2 以内であれば、PI^r の値はほぼ水平で、非常に近い値になっていることがわかるが、r の絶対値が大きくなるにつれ乖離は大きくなり、また曲線は水平になっていく。Hill (2006) の結果から $\lim_{r\to\infty} PI^r = \lim_{r\to-\infty} PI^r$ であり、このデータでは極限値は 1.90 である。

Hill (2006) はさらに下記の定理を証明している。

(定理 1)PI^r は、もしも対数価格変分の分布が対称であり、かつ、全ての商品の weight が同一 $(w_i = 1/n)$ のとき、PI^r は r に依存しない。

(定理 2) 全ての商品の weight が同一 ($w_i = 1/n$) であり、かつ、対数価格変分が右に歪んでいる分布を X また X と対称の分布で左に歪んでいるが平均値は X と共通の分布を Y とする。さらに、X と Y に対応する PI^r がともに一つのターニングポイントを有するとする。このとき、X に基づく PI^r のターニングポイントは PI^r の最小値であり、Y に基づく PI^r のターニングポイントは PI^r の最大値となっている。

図の例では、Y、すなわち、逆 U 字型となっており、価格分布が左に歪んでいることを示唆している。Hill の結果から、Superlative Index が互いに似ているのは、相対価格の歪みが少ないか、r の絶対値が小さいときに限定されることがわかる。

Hill (2006) と Diewert (1978) の結果を総合すると、Törnqvist、Walsh、Fisher の三種類の生計費指数はいずれも代替の弾力性等の構造パラメターを推計する必要なく容易に計算可能であり、公理論的にも意味を与えることが可能であり、かつ三者の間のかい離はごくわずかであるが、それは Superlative Index によるものではなく、r の絶対値が小さいためである、ということであろう。

6 ホモセティック効用関数への批判

Superlative Index の理論は、効用関数の一次同次性、すなわちホモセティック効用関数の仮定に依存している。Diewert (1976) は、Törnqvist 指数がノンホモセティック効用関数に対応していることで、Superlative Index がノンホモセティックなケースもカバーしていると議論している。もっとも、Törnqvist 指数は、基準効用として二時点の効用の幾何平均を採用することが前提となっており、一般的な効用水準基準には対応しておらず、その点では制約が課されていることになる。Superative Index が本当に広いクラスの効用関数に対応した生計費指数であるか否かは常に論争の対象になっており、今日でも批判されることは少なくない。Breuer and Lippe (2011) は、この点を特に強く批判し、Superlative Index は強い効用関数の制約のもとに初めて成立するとしている[10]。Dumagan and Mount (1997)[11]は、ノンホモセティック効用関数を仮定し、複数財の需要と供給の関係をシミュレートした上で、基準時点の効用水準を用いた真の COLI が Fisher 指数や Törnqvist 指数と大きく乖離し、むしろ伝統的な Laspeyres 指数のほうがより真の COLI に近いことがありうることを示している。ホモセティック効用関数の場合は、所得弾力性は常に 1 となる。ノンホモセティックの場合には所得弾力性は 1 には一般にならら

[10]Claus C. Breuer and Peter M. von der Lippe (2011) “Problems of operationalizing the concept of a cost of living index”MPRA Paper No. 32902.

[11]Dumagan J., and T. Mount (1997) “Re-examining the Cost-of-Living Index and the Biases of Price Indices: Implications for the U.S. CPI,” ESA/OPD 97-5, U.S. Department of Commerece, Economics and Statistics Administration, Washington D.C.

ない。もしも真のデータがノンホモセティックである場合、所得弾力性が 1 から乖離することによる価格と数量の関係が大きく指数の結果を左右する可能性は否定できない。Dumagan and Lippe (1997) は、Diewert の Superlative Index は下位代替バイアスはないが、所得に関するバイアスが発生するとし、基準時の所得で固定する Laspeyres 指数のほうがより真の COLI に近いことがありうることを示しているのである。もっとも、真の生計費指数を計算する際には効用水準を一定と仮定しており、効用に直接大きな影響をあたえる所得効果の影響は代替効果に比べて限定的になっていることも事実であり、Dumagan and Lippe (1997) の結果がどの程度一般的に発生しうるかは明らかではない。

ホモセティック効用関数に基づく Superlaitve Index にとり、ホモセシティへの依存度の強さは、二時点の効用の幾何平均を基準とすることの適否に依存すると思われる。基準時や比較時の効用を基準とし、二時点の効用水準が大きく異なる場合 (数量指数が大きく 1 から乖離する場合)、Törnqvist 指数はそれらの生計費指数と大きく乖離することは十分にありうる。そして、Törnqvist とほぼ同様の値をとる Fiser や Walsh もまた大きく乖離することになるだろう。ただし、二時点間の COLI を測る際に、両時点での効用水準のなんらかの平均をとることは自然であり、幾何平均をとることも、それほどおかしいこととはいえず、むしろん基準時や比較時のみに依拠するほうが不自然に思われる。真の生計費指数がわからない場合、観察データのみからどの指標がより真の生計費指数に近いかの判断は不可能である。そして、シミュレーションによる場合、そのシミュレーションの仮定の適否が問われることになる。ノンホモセティックな効用関数が重要な役割を示すのは、経済発展の初期段階や貧困家庭のように、非常に所得弾力性の低い消費の割合が強い場合であろう。一方、大域的にノンホモセティックな場合、近世成長経路を考えることが困難になり、長期的に安定した消費・所得パターンがなくなってしまう。成熟した経済や代表的な個人を考える場合、すなわち標準的なマクロモデルを考え、かつ大分類を考える場合は、ホモセティック効用関数の仮定はそれほど制約的ではない可能性もあると思われる。

7 Flexibility の要請について

ある物価指数が Superlative であることを調べるには、それが Flexible な効用、あるいは支出関数のから導出される生計費指数であることを示す必要がある。そのような Flexible な効用・支出関数が見つかればよいが、見つからない場合は、ある物価指数が Superlative であるとは言えないが、一方、Superlative でない、とも言うことはできない。Sato-Vartia 指数は、実際に指数を作成すると、Fisher や Törnqvist、Walsh ときわめてよく似た動きを示すが、他の三種の指数と異なり Flexible な支出や効用関数から導出できて

いない。CES 型効用・支出関数のパラメターは $n+1$ であり、Flexible な関数に必要な $n(n+1)/2$ に比べて少なすぎ、Flexible にならないのである。

Barnett and Choi (2008)[12]は、二階の近似、の意味を拡張している。Diewert (1976) では、一階、二階の微係数が一致することを要求していたが、Barnett and Choi (2008) は

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f^*(x) - f(x))}{\|x - x_0\|^2} \to 0$$

もしくは

$$f^*(x) - f(x) = o\left(\|x - x_0\|^2\right) \tag{10}$$

を用いている。そして、$x \to x_0$ のとき、この条件は、二階連続微分可能な時には、Diewert (1976) の用いた微係数の一致と同値になることが知られている。Superlative Index であることを示すには上記をみたす $f(x)$ を探さねばならないが、Barnett and Choi (2008) は $f(x)$ の存在を示すことと、$f(x)$ の関数形を求めることは異なることを指摘している。たとえ Closed Form での関数形が存在せず、例えば spline でつながるようなものであっても、二階連続微分可能な関数は無数に存在している。そして、調べる関数の空間を拡大することで、より多くの物価指数が Supelative であることを示すことが可能であると主張している。そして、二期間の支出シェアを対称に扱う対数物価指数、すなわち、

$$\log PI^{T-S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m(w_{j,1}, w_{j,0})}{\sum_{j=1}^{n} m(w_{j,1}, w_{j,0})} \log\left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)$$
$$m(x,y) = m(y,x), m(x.x) = x$$
$$\min(x,y) \leq m(x,y) \leq \max(x,y)$$

をみたす物価指数 (Sato-Theil 指数と呼んでいる) は全て、任意の $f^*(x)$ に対し、(10) を満たすような関数 $f(x)$ が存在することを示している。この物価指数には Sato-Vatira 指数が含まれている。すなわち、Sato-Vartia 指数は、彼らの定義する Superlative Index であることになる。確かに、物価指数が事前に与えられている場合、それを Exact な生計費指数になるような支出関数、あるいは効用関数が存在していれば良く、その関数形を特定化する必要は必ずしもない。一方、効用関数や支出関数には、一次同次性以外にも満たさねばならない性質が多々ある。効用関数であれば単調性、擬凹性、支出関数であれば凹性などである。たとえ Flexible な関数 $f(x)$ が存在しても、それが効用や支出関数に課されるべき性質を満たしていないのであれば、それは生計費指数とみなすことには無理があり、Barnett and Choi (2008) の定義をそのまま Superlative Index とすることには問題がある。一方、Sato-Vartia 指数は

[12]William A. Barnett and Ki-Hong Choi, (2008) "Operational identification of the complete class of superlative index numbers: An application of Galois, theory" *Journal of Mathematical Economics* Volume 44, Issues 7–8, July 2008, Pages 603–612

CES 効用関数の下での Exact になっており、さらに拡張された関数 $f(x)$ により、Flexible になるということは、Sato-Vartia 指数が Fisher や Törnqvist とよく似た動きをすることは偶然ではないことを示しており、その意味では、Barnett and Choi (2008) の貢献は大きいと言えるだろう。

8　その他

Deaton (2010) は、国間の比較の際に Superlatie Index を利用する際に問題が生じると指摘している。Superlative Index の計算には、効用関数、もしくは支出関数が二時点、あるいは二地点で同一と仮定しする必要がある。Törnqvist の場合は、二地点あるいは二時点の支出シェアの平均を用いることになる。無論、効用関数や支出関数が同一であれば、観察される支出シェアの違いは、価格の違いのみに依存する (効用がホモセティックであれば)。これは、イギリスや日本のような先進国とアフリカの低開発諸国の間の生計費指数を計算する場合、各商品に関する支出シェアの二国の平均が Weight として単純に計算することになるが、実際には、先進国と低開発国において、各商品への支出シェアは大きく異なっており、生計費指数として解釈することには非常に無理のある指数となるであろう。これは、二国間で選好が同一と仮定することに対する強い批判である。

Superlative Index は、公理的アプローチと経済学的アプローチをつなぐ非常に強力かつ魅力的なアイディアであるが、これで物価指数理論は終焉はせず、残念ながら、当初 Diewert が 70 年代に議論していたような統合は達成できたとは言えない。Barnett and Choi (2008) のような数学的な拡張は現在でも続けられているが、Superlative index の理論は現在、急展開を見せているともいえない状況であり、関心は、むしろより実践的な方向に、例えば商品の移り変わりが激しい場合の計測手法、家計間の物価指数の違い、地域間の指数の収束など、より応用経済学的な方向に進んでいる。