2019年地域経済各論日本講義ノート
CES型効用関数とSato-Vartia指数

阿部修人

平成31年11月28日

1 Sato-Vartia指数

トルンクビストが対数変化に依拠した物価指数を発表した30年以上後、Chirstensen and Jorgenson (1970)[1]がトルンクビスト指数をアメリカ合衆国の生産性計測に用いるとともに、その指数が多くの有用な性質を有することを強調した。それを受け、様々な不平等指数の提案で名高いHenri Theil (1973)[2]はトルンクビスト指数が要素反転性を満たさないことを指摘し、1974年にはラトガース大学の佐藤和夫とTheilが、要素反転性を「ほぼ」みたす指数に関して論争を交わしている[3]。要素反転性を満たす対数変化型(乗法型)物価指数は存在するのだろうか?答えは1976年に独立した二本の論文で示された。一つはヘルシンキ大学のイェリョ・ヴァルティア(Yrjö Vartia)によるものであり、ほぼ同時に独立して佐藤和夫が同じ算式を提案した[4]。その指数は、今日、経済学の様々な分野において非常に重要な役割を果たしており、二人の貢献に敬意を表し、今日ではSato-Vartia指数と呼ばれている。現在、Sato-Vartia指数は(1)代替の弾力性一定の効用関数(Constant Elasticity of Substitution: CES)に対応する生計費指数であること、(2)要素反転性(Factor Reversal)を満たす指数であること、(3)2時点の価格と支出シェアの情報のみから計算可能であること、及び(4)貿易理論や経済成長理論で重視されている財の種類効果(Love of Variety)を容易に取り込むことができること、と

[1]Christensen, L. R. and Jorgenson, D. W. (1970) “U.S. REAL PRODUCT AND REAL FACTOR INPUT, 1929–1967,” *Review of Income and Wealth,* 16: 19-50. doi:10.1111/j.1475-4991.1970.tb00695.x

[2]Henri Theil (1973) “A New Index Number Formula,” *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 55, No. 4, pp. 498-502

[3]Sato, K. (1974). Ideal index numbers that almost satisfy factor reversal test. *The Review of Economics and Statistics*, 56, 549-552. とTheil, H. (1974). More on log-change index numbers. *The Review Economics and Statistics* 56, 552-554.

[4]Sato K. (1976). The ideal log-change index number, *The review of Economics and Statistics*, 58, n. 2, 223-228.

Vartia Y. O. (1976). Ideal log-change index numbers, *Scandinavian Journal of Statistics*, 3, 121-126.

二つの論文はほぼ同じタイトルであるが、Vartiaは複数の指数を提案しているため、“The”がついておらず、複数形になっている。

いう重要な 4 つの性質を持っている。CES 型効用関数は、Dixit and Stiglitz (1977) により、効用関数として非常に有用であることを指摘されて以降、独占的競争市場を用いる New Keynesian DSGE モデルや国際貿易モデルにおいて基本的なパーツとなっており、それに対応する生計費指数である Sato-Vartia 指数は、当然のことながら現在の経済分析においてなくてはならない重要な指数となっているのである。今回は、Sato-Vartia 指数を中心に、対数変化型物価指数について整理する。

2　幾何・対数型物価指数と対数平均

以下のような、2 時点における価格比の幾何平均で定義される物価指数を考えてみよう。m_{10}^i は幾何平均をとる際のウェイトである。

$$PI_{01} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{m_{10}^i}, m_{10}^i > 0, \sum_{i=1}^{n} m_{10}^i = 1.$$

この指数が要素反転性を満たすとき、どのような性質を有するだろうか?

要素反転性をみたすなら、数量指数を下記のように定義し、

$$QI_{01} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q_1^i}{q_0^i}\right)^{m_{10}^i}$$

物価指数と数量指数の積が Value Index に等しい、すなわち

$$\begin{aligned} PI_{01} \times QI_{01} &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{m_{10}^i} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q_1^i}{q_0^i}\right)^{m_{10}^i} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\frac{q_1^i}{q_0^i}\right)^{m_{10}^i} \\ &= \frac{\sum p_1^i q_1^i}{\sum p_0^i q_0^i} \\ &= \frac{E_1}{E_0} \end{aligned}$$

が要素反転性の定義であった。両辺の対数をとると

$$\ln PI_{01} + \ln QI_{01} = \ln(E_1) - \ln(E_0)$$

左辺は

$$\begin{aligned} &\sum m_{10}^i \left(\ln\left(p_1^i\right) - \ln\left(p_0^i\right)\right) + \sum m_{10}^i \left(\ln\left(q_1^i\right) - \ln\left(q_0^i\right)\right) \\ &= \sum m_{10}^i \left(\ln\left(p_1^i q_1^i\right) - \ln\left(p_0^i q_0^i\right)\right) \end{aligned}$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
&\sum m_{10}^i \left(\ln\left(p_1^i q_1^i\right) - \ln\left(p_0^i q_0^i\right)\right) - \ln\left(E_1\right) + \ln\left(E_0\right) \\
&= \sum m_{10}^i \left(\ln\left(p_1^i q_1^i / E_1\right) - \ln\left(p_0^i q_0^i / E_0\right)\right) \\
&= \sum m_{10}^i \ln \frac{w_{1i}}{w_{0i}} = 0
\end{aligned}
$$

$$
w_{1i} = \frac{p_1^i q_1^i}{E_1}
$$

すなわち、対数変分で表される物価指数が要素反転性をみたすための必要十分条件は、i 財の支出シェアを w_{1i}, w_{0i} とするとき、

$$
\sum m_{10}^i \ln \frac{w_{1i}}{w_{0i}} = 0
$$

である。すなわち上式をみたすようなウェイト m_{10}^i を探せばよい。

Sato-Vartia 型指数は、$m_{10}^i\left(w_0^i, w_1^i\right)$ として対数平均 (Logarithmic Mean) を用いる[5]。対数平均とは平均概念の一つであり、任意の二つの正数、a と b に関して、下記のように定義される。

$$
\begin{aligned}
L\left(a, b\right) &= \frac{a-b}{\ln\left(a/b\right)} \quad \text{if } a \neq b \\
&= a \quad \text{if } a = b
\end{aligned}
$$

この解釈は若干複雑である。連続微分可能な関数 $f : R_{++} \to R$ には中間値の定理が成立し、$a \neq b, f\left(a\right) \neq f\left(b\right)$ であれば

$$
\frac{f\left(a\right) - f\left(b\right)}{a-b} = \frac{df\left(g\right)}{dx}
$$

となる g が常に、$a < g < b$ の範囲に存在する。ここで、$f\left(x\right) = \ln x$ としよう。すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{df\left(g\right)}{dx} = \frac{1}{g} &= \frac{f\left(a\right) - f\left(b\right)}{a-b} \\
g &= \frac{a-b}{\ln a - \ln b} \\
&= \frac{a-b}{\ln\left(a/b\right)}
\end{aligned}
$$

となり、g は a と b の対数平均となる。すなわち、対数平均とは対数関数上の 2 点間にある点であり、その点における対数関数の傾きが、2 点間を結ぶ直線の傾きと一致しているのである。なお、対数平均 $L\left(a, b\right)$ は常に幾何平均以上、算術平均以下、すなわち、

$$
\left(ab\right)^{1/2} \leq L\left(a, b\right) \leq \frac{a+b}{2},
$$

[5]対数平均に関しては、 Törnqvist, Vartia, and Vartia (1985) が詳しい。

が成立することが知られている[6]。

さて、2 時点における財 i の支出シェアの対数平均は

$$L\left(w_1^i, w_0^i\right) = \frac{w_1^i - w_0^i}{\ln\left(w_1^i / w_0^i\right)},$$

である。したがって、総和が 1 になるように基準化すると、

$$s_{10}^i = \frac{L\left(w_1^i, w_0^i\right)}{\sum_{i=1}^n L\left(w_0^i, w_1^i\right)},$$

となる。そして、Sato-Vartia 物価指数は

$$PI_{01}^{SV} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{s_{10}^i}, \tag{1}$$

と定義される。

Sato-Vartia 型指数が要素反転性をみたすかどうか確認してみよう。

$$\begin{aligned}
&\sum s_{10}^i \ln \frac{w_{1i}}{w_{0i}} \\
&= \sum \frac{L\left(w_1^i, w_0^i\right)}{\sum_{i=1}^n L\left(w_0^i, w_1^i\right)} \ln \frac{w_{1i}}{w_{0i}} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n L\left(w_0^i, w_1^i\right)} \sum \frac{w_1^i - w_0^i}{\ln\left(w_1^i / w_0^i\right)} \ln \frac{w_{1i}}{w_{0i}} \\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^n L\left(w_0^i, w_1^i\right)} \sum \left(w_1^i - w_0^i\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

であり、したがって、Sato-Vartia 型指数は要素反転性が満たすことが確認できた。

2 時点の支出シェアの算術平均を用いた幾何物価指数がトルンクビスト指数であったのに対し、2 時点の支出シェアの対数平均 (総和が 1 になるように基準化している) を用いた幾何平均物価指数が Sato-Vartia 物価指数なのである。この定義では、Sato-Vartia 指数は特殊な物価指数の一つ、に過ぎないが、本指数は、要素反転性のみならず、経済学的に非常に重要な性質を有している。以下、順に見ていこう。

3 CES 型効用関数の生計費指数

Sato-Vartia 型は CES 型効用関数の生計費指数になる。これを示す前に、まず、ミクロ経済理論の標準的な手法で CES 型効用関数の生計費指数を導出してみよう。

[6] 等号は $a = b$ の時に成立する。証明については Balk (2008) の P.134-5 を参照せよ。

下記のような CES 型効用関数を考える。

$$U_t = \left(\sum_{i=1}^{n} a_t^i \left(q_t^i \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{2}$$

$$\sigma > 1, a_t^i > 0, \sum_{i=1}^{n} a_t^i = 1.$$

q_t^i は i 財の消費数量である。無論、$\sigma = 1$ の時はコブ・ダグラス型、$\sigma = \infty$ の時は線形の効用関数となる。なお、$\sigma > 1$ の仮定は、右下がりの需要曲線を導出する際に、独占企業の利潤が無限になるのを防ぐための仮定であり、効用関数が凹関数であるためには、$\sigma > 0$ であれば良い。また、σ を 0 に近づけていくと、効用関数はレオンティエフ型となる。

まず、下記の支出最小化から、費用・支出関数を求めてみよう。

$$\min \sum_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i$$

$$s.t. \left(\sum_{i=1}^{n} a_t^i \left(q_t^i \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \geq U_t.$$

一階条件は

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} a_t^i \left(q_t^i \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{1} a_t^i \left(q_t^i \right)^{\frac{-1}{\sigma}} &= \lambda^{-1} p_{it} \\ &= a_t^i U_t^{\frac{1}{\sigma}} \left(q_t^i \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \end{aligned}$$

なお、λ は支出最小化問題のラグランジュ乗数である。一階条件を整理し、

$$q_t^i = \left(a_t^i \right)_{it}^{\sigma} \left(\lambda^{-1} p_t^i \right)^{-\sigma} U_t.$$

これを予算制約式に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i &= \sum_{i=1}^{n} p_t^i \left(a_t^i \right)^{\sigma} \left(\lambda^{-1} p_t^i \right)^{-\sigma} U_t \\ &= \lambda^{\sigma} U_t \sum_{i=1}^{n} \left(p_t^i \right)^{1-\sigma} \left(a_t^i \right)^{\sigma} \\ &= I_t, \end{aligned}$$

ただし、I_t は外生で与えられる支出総額 (所得) である。したがって、

$$\lambda^{\sigma} = U_t^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(p_t^i \right)^{1-\sigma} \left(a_t^i \right)^{\sigma} \right)^{-1} I_t.$$

これを一階条件に代入して

$$
\begin{aligned}
q_t^i &= \left(a_t^i\right)^{\sigma} \left(\lambda^{-1} p_t^i\right)^{-\sigma} U_t \\
&= \frac{\left(a_t^i\right)^{\sigma} I_t p_{it}^{-\sigma}}{\sum_{i=1}^{n} \left(p_t^i\right)^{1-\sigma} \left(a_t^i\right)^{\sigma}}.
\end{aligned}
$$

得られた需要関数を効用関数に代入すると間接効用関数を得る。若干面倒な計算を経由すると、間接効用は下記のように簡単になる。

$$
\begin{aligned}
V\left(p, I\right) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_t^i q\left(p, I\right)_t^{i\,\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_t^i \left(\frac{\left(a_t^i\right)^{\sigma} I_t p_{it}^{-\sigma}}{\sum_{i=1}^{n} \left(p_t^i\right)^{1-\sigma} \left(a_t^i\right)^{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_t^i\right)^{\sigma} \left(p_t^i\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{-1}{1-\sigma}} I_t.
\end{aligned}
$$

これを整理すると、

$$
I_t = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_t^i\right)^{\sigma} \left(p_t^i\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} V_t
$$

I_t は、価格ベクトル $\left(p_t^i\right)_{i=1}^{n}$ の下で効用水準 V_t を実現する最小所得、すなわち費用・支出関数であり、下記のように書くことが可能である。

$$
E\left(p, U_t\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_t^i\right)^{\sigma} \left(p_t^i\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_t
$$

前回の連載で、選好がホモセティックの時、費用・支出関数は効用水準に関する線形関数となることを示した。CES 型効用関数もまたホモセティック選好の一つであるため、費用・支出関数は効用水準に関して比例する。ここで、単位効用当たりの支出関数を一般物価、P_t、として下記のよう定義しよう。

$$
P_t = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_t^i\right)^{\sigma} \left(p_t^i\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}.
$$

なお、財 i への需要は

$$
q_t^i = \left(\frac{a_t^i p_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} \frac{I_t}{P_t}
$$

となる。すなわち、個別財への需要量は相対価格と実質所得に依存しており、

相対価格の弾力性は $-\sigma$ となっている。これを価格に関して整理すると、

$$\begin{aligned}
\left(p_t^i\right)^{-\sigma} &= \frac{q_t^i P_t^{1-\sigma}}{I_t \left(a_t^i\right)^{\sigma}} \\
p_t^i q_t^i &= \left(q_t^i\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} P_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} a_t^i \\
\sum_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i &= P_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} \sum_{i=1}^{n} a^i \left(q_t^i\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
&= P_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} U_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
&= I_t
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\left(U_t P_t\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} I_t^{\frac{1}{\sigma}} &= I_t \\
U_t P_t &= I_t
\end{aligned}$$

これは、

$$\sum_{i=1}^{n} p_t^i q_t^i = U_t P_t$$

が成立することを意味している。

これを用いて需要関数から所得 (総支出額)I_t を消去することが可能であり、

$$\begin{aligned}
q_t^i &= \left(\frac{a_t^i p_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} \frac{I_t}{P_t} \\
&= \left(\frac{a_t^i p_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} U_t
\end{aligned}$$

とマクロ経済学の教科書や論文でよく見かける形になる。標準的な New Keynesian モデルでは全ての財に関して対称性、すなわち $a_t^i = 1$ を仮定しているため、需要曲線はさらに単純になる。

効用水準を 0 期で固定し、2 時点における支出関数の比、すなわち Laspeyres-Konüs の真の生計費指数を CES 型効用関数の場合で計算すると、下記のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{E\left(p^1, U_0\right)}{E\left(p^0, U_0\right)} &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_1^i\right)^{\sigma} \left(p_1^i\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_0}{\left(\sum_{k=1}^{n} \left(a_0^k\right)^{\sigma} \left(p_0^k\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} U_0} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(a_1^k\right)^{\sigma} \left(p_0^i\right)^{1-\sigma}}{\sum_{k=1}^{n} \left(a_0^k\right)^{\sigma} \left(p_0^k\right)^{1-\sigma}} \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}
\end{aligned}$$

ここで、一階条件を少し整理し、

$$
\begin{aligned}
q_t^i &= \left(a_t^i\right)^{\sigma}\left(\lambda^{-1}p_t^i\right)^{-\sigma}U_t \\
\left(a_t^i\right)^{\sigma}\left(p_1^i\right)^{1-\sigma} &= p_t^i q_t^i \lambda^{\sigma} U_t^{-1},
\end{aligned}
$$

を用い、かつ、選好が時間を通じて変化しない、すなわち、$a_t^i = a_0^i$ を仮定すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{E\left(p^1, U_0\right)}{E\left(p^0, U_0\right)} &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(a_1^k\right)^{\sigma}\left(p_0^i\right)^{1-\sigma}}{\sum_{k=1}^{n}\left(a_0^k\right)^{\sigma}\left(p_0^k\right)^{1-\sigma}}\left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \qquad (3) \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_0^i q_0^i \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{1-\sigma}}{\sum_{k=1}^{n} p_0^k q_0^k}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} w_0^i \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}
\end{aligned}
$$

これが通常の定義に従う Laspeyres-Konüs の真の生計費指数である。これを求めるためには、支出シェアと価格比に加え、価格弾力性 σ を用いねばならないことに注意されたい。この弾力性の値は独占企業のマークアップ率を規定するなど、非常に重要な構造パラメターであり、別途推計する必要がある。

4 生計費指数と Sato-Vartia 物価指数

次に、同じく、真の生計費指数を異なる手法、対数階差を用いて計算してみよう。まず、需要関数を変形し、$I_t = U_t P_t$ であることを用いると、

$$
\begin{aligned}
q_t^i &= \left(\frac{a_t^i p_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} U_t \\
w_t^i &= \frac{p_{it} q_{it}}{I_t} \\
&= \frac{U_t}{I_t}\left(\frac{a_t^i p_t^i}{P_t}\right)^{-\sigma} p_t^i \\
&= a_t^{i-\sigma}\left(\frac{p_t^i}{P_t}\right)^{1-\sigma}.
\end{aligned}
$$

両辺の対数をとり、

$$
\ln w_t^i = -\sigma \ln a_t^i + (1-\sigma)\ln p_t^i - (1-\sigma)\ln P_t.
$$

したがって、

$$
\ln P_t = \frac{1}{(\sigma-1)}\ln w_t^i + \frac{\sigma}{(\sigma-1)}\ln a_t^i + \ln p_t^i.
$$

ここで a_{it} を一定と仮定して、対数階差をとると、

$$\ln P_1 - \ln P_0 = \frac{1}{(\sigma-1)}\left(\ln w_1^i - \ln w_0^i\right) + \left(\ln p_1^i - \ln p_0^i\right). \tag{4}$$

左辺は生計費指数、COLI であり財の種類 i に依存しない。したがって、右辺の異なる i に関して、いかなる加重平均 (凸結合) をおこなってもも、左辺の値は不変である。

例えば、

$$\ln P_1 - \ln P_0 = \sum \beta_i \left(\frac{1}{(\sigma-1)}\left(\ln w_1^i - \ln w_0^i\right) + \left(\ln p_1^i - \ln p_0^i\right)\right)$$
$$\beta_i \geq 0, \sum \beta_i = 1$$

と定義すれば、いかなるウェイト β_i に関しても、COLI の値は一致するはずである。財の種類全てをカバーする必要もない。一つの財のみから生計費指数を構築することも可能になる。ただしこの計算を行うためには、代替の弾力性である σ を推計する必要がある。代替の弾力性は直接は観察不可能であり、なんらかの計量的な手法で推計するか、適当な値を仮定する必要が出てくる。

ここで、総和が 1 になるように基準化された対数平均、すなわち、

$$L\left(w_1^i, w_0^i\right) = \frac{w_1^i - w_0^i}{\ln\left(w_1^i / w_0^i\right)},$$

$$s_{10}^i = \frac{L\left(w_1^i, w_0^i\right)}{\sum_{i=1}^n L\left(w_0^i, w_1^i\right)}.$$

を用いてみよう。ただし、

$$\sum_{i=1}^n \left(w_1^i - w_0^i\right) = \sum_{i=1}^n w_1^i - \sum_{i=1}^n w_0^i = 1 - 1 = 0,$$

であることに注意されたい。

s_{10}^i をウェイトにして、対数階差の加重平均をとると、

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n s_{10}^i \left(\ln P_1 - \ln P_0\right)\\
&= \frac{1}{(\sigma-1)} \sum_{i=1}^n s_{10}^i \left(\ln w_1^i - \ln w_0^i\right) + \sum_{i=1}^n s_{10}^i \left(\ln p_1^i - \ln p_0^i\right)\\
&= \frac{1}{(\sigma-1)} \sum_{i=1}^n \frac{\left(w_1^i - w_0^i\right)/\ln\left(w_1^i/w_0^i\right)}{\sum_{i=1}^n \left(w_1^i - w_0^i\right)/\ln\left(w_1^i/w_0^i\right)} \left(\ln w_1^i - \ln w_0^i\right) + \sum_{i=1}^n s_{10}^i \left(\ln p_1^i - \ln p_0^i\right)\\
&= \sum_{i=1}^n s_{10}^i \left(\ln p_1^i - \ln p_0^i\right),
\end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$\ln P_1 - \ln P_0 = \sum_{i=1}^{n} s_{10}^i \left(\ln p_1^i - \ln p_0^i\right),$$

整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{P_0} &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} s_{10}^i \left(\ln p_1^i - \ln p_0^i\right)\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{s_{10}^i}\\ &= PI^{sv},\end{aligned}$$

となり、Sato-Vartia 型の物価指数を得る。ここで注目すべき点は、CES 型効用関数に対応する生計費指数 (3) は弾力性 σ に依存しているのに対し、Sato-Vartia では弾力性が出てこないことである。弾力性の推計は骨が折れる作業であるが、Sato-Vartia 物価指数では、弾力性のもつ情報は、支出シェアの中に全て体現されており、弾力性を別途推計する必要はない。これは、推計作業を著しく簡素化する素晴らしい性質である。

CES 型効用関数と Sato-Vartia 型指数の間の密接な関係を直感的に理解することは容易ではないが、数学上の関係は難しくない[7]。需要関数の中にある弾力性を含む項が消えるのは、両期間におけるその項の値が、対数平均をとることで全く同一になる。支出シェアの対数平均は、二つの対数支出シェアからの距離が等しいところにあり、二時点の対数支出シェアからの距離も等しくなるのである。

5 Sato-Vartia 物価指数と要素反転性

先にみたように、Sato-Vartia 物価指数は、要素反転性を満たす。ここでは Sato-Vartia 物価指数が要素反転性を満たすことを別の方法で示してみよう。

対数平均の定義から、2 時点の支出シェアは下記のように表すことが可能である。

$$w_1^i - w_0^i = L\left(w_1^i, w_0^i\right) \ln\left(w_1^i / w_0^i\right).$$

左辺を i に関して集計するとゼロになる。すなわち、

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left(w_1^i - w_0^i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(w_1^i / w_0^i\right) L\left(w_1^i, w_0^i\right) = 0.\end{aligned}$$

[7] ここでは CES 型効用関数から Sato-Vartia 型指数を導出したが、Sato (1976) は Sato-Vartia 型指数から偏微分方程式を用い、CES 型効用関数を導出している。

となる。支出シェアの定義から、

$$w_t^i = \frac{p_t^i q_t^i}{\sum_{i=1}^n p_t^i q_t^i} = \frac{p_t^i q_t^i}{E_t}.$$

したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \ln\left(w_1^i / w_0^i\right) &= \sum_{i=1}^n \ln\left(w_1^i\right) - \sum_{i=1}^n \ln\left(w_0^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln\left(p_1^i q_1^i\right) - \sum_{i=1}^n \ln\left(p_0^i q_0^i\right) - \ln\left(E_1\right) + \ln\left(E_0\right).\end{aligned}$$

ここから、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right) \ln\left(w_1^i / w_0^i\right) &= \sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right)\left(\ln\left(p_1^i q_1^i\right) - \ln\left(p_0^i q_0^i\right) - \ln\left(E_1\right) + \ln\left(E_0\right)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\ln\left(I_1\right) - \ln\left(I_0\right) &= \frac{\sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right)\left(\ln\left(p_1^i q_1^i\right) - \ln\left(p_0^i q_0^i\right)\right)}{\sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right)\left(\ln\left(p_1^i\right) - \ln\left(p_0^i\right)\right)}{\sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right)} + \frac{\sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right)\left(\ln\left(q_1^i\right) - \ln\left(q_0^i\right)\right)}{\sum_{i=1}^n L\left(w_1^i, w_0^i\right)}.\end{aligned}$$

これを整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{E_1}{E_0} &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{s_{10}^i} \prod_{i=1}^n \left(\frac{q_1^i}{q_0^i}\right)^{s_{10}^i} \\ &= PI^{sv} QI^{sv}.\end{aligned}$$

となり、Sato-Vartia 物価指数が要素反転性を満たすことがわかる。また、Fattore (2007) は、Geo-Logarithmic 型と彼が定義するの物価指数の中では、Sato-Vartia が唯一、要素反転性を満たすものであることを証明している。

6 単調性の欠如

Sato-Vartia 型物価指数はトルンクビスト型物価指数と同様に、単調性を有さないことが知られている[8]。以下は、Lippe (2007) による例である。2 財 2 期間モデルで、1 期における第二財の価格 p_2^1、x が 1, 5, 10 の 3 ケースを考える。

	p_0	p_1	q_0	q_1
1	30	40	50	20
2	80	x	4	40

[8]Reinsdorf, M.B., Dorfman, A.H. (1999) を見よ。

すると、各種物価指数は下記のようになる。

p_2^1	Las	Paashce	Tornqvist	SV
1	1.101	0.221	0.791	0.837
5	1.110	0.263	0.750	0.751
10	1.121	0.316	0.730	0.740

ラスパイレスやパーシェは単調性をみたすが、トルンクビストも Sato-Vartia も価格が上昇すると共に、指数は低下していくことがわかる。無論、この例では非現実的と言ってよいような、非常に大きな価格変化を仮定しており、現実に単調性の欠如が問題になることは少ないと思われる。

7 要素反転性を満たす対数変化物価指数

先にみたように、対数変化型の物価指数

$$PI_{01} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_1^i}{p_0^i} \right)^{m_{10}^i}, m_{10}^i > 0, \sum_{i=1}^{n} m_{10}^i = 1 \tag{5}$$

が要素反転性を満たすための必要十分条件は

$$\sum m_{10}^i \ln \frac{w_{1i}}{w_{0i}} = 0 \tag{6}$$

であった。この (6) は、一本の方程式である。一方、(5) はパラメター m_{10}^i が財の種類 n から adding up 条件を除いた $n-1$ だけの自由度が存在する。すなわち、要素反転性を満たす対数変化型物価指数は無数に存在する。いままで、要素反転性を満たす物価指数はフィッシャー指数、Stuvel 指数及び Sato-Vartia 指数のみ紹介してきたが、特に要素反転性だけで物価指数が特定されるわけではない。ただし、財が二種類しかないときは、要素反転性を満たす対数変化型物価指数は Sato-Vartia 型のみである。Abe and Rao (2019)[9]に従って、二財のケースをみてみよう。

$$m \ln \left(\frac{w_{12}}{w_{11}} \right) + (1-m) \ln \left(\frac{w_{22}}{w_{21}} \right) = 0$$

これを m について解くと、

$$\begin{aligned} mx + (1-m)\, y = 0, \\ m &= \frac{-y}{x-y} \\ &= \frac{\ln(w_{22}) - \ln(w_{21})}{\ln(w_{11}) - \ln(w_{12}) - \ln(w_{21}) + \ln(w_{22})}. \end{aligned}$$

[9]Naohito Abe and Prasada Rao (2019) "Multilateral Sato–Vartia index for international comparisons of prices and real expenditures," *Economics Letters*, Volume 183, 108535, ISSN 0165-1765, https://doi.org/10.1016/j.econlet.2019.108535.

S.V. ウェイトの定義は

$$sv = \frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} / \left(\frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} + \frac{w_{21}-w_{22}}{\ln(w_{21})-\ln(w_{22})} \right).$$

この、正規化のための分母を取り出し、支出シェアの和が 1 であることを利用すると

$$\begin{aligned}
&\frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} + \frac{w_{21}-w_{22}}{\ln(w_{21})-\ln(w_{22})} \\
&= \frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} + \frac{1-w_{11}-(1-w_{12})}{\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12})}.
\end{aligned}$$

整理すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} + \frac{(1-w_{11})-(1-w_{12})}{\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12})} \\
&= \frac{w_{11}-w_{12}}{(\ln w_{11}-\ln w_{12})(\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12}))} (\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12})-\ln w_{11}+\ln w_{12}).
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned}
sv &= \frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} * \frac{(\ln w_{11}-\ln w_{12})(\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12}))}{(w_{11}-w_{12})(\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12})-\ln w_{11}+\ln w_{12})} \\
&= \frac{(\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12}))}{(\ln(1-w_{11})-\ln(1-w_{12})-\ln w_{11}+\ln w_{12})} \\
&= \frac{\ln(w_{21})-\ln(w_{22})}{\ln(w_{21})-\ln(w_{22})-\ln w_{11}+\ln w_{12}}.
\end{aligned}$$

すなわち、二財のときの Sato-Vartia のウェイトは

$$\begin{aligned}
&\frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} / \left(\frac{w_{11}-w_{12}}{\ln(w_{11})-\ln(w_{12})} + \frac{w_{21}-w_{22}}{\ln(w_{21})-\ln(w_{22})} \right) \\
&= \frac{\ln(w_{21})-\ln(w_{22})}{\ln(w_{21})-\ln(w_{22})-\ln w_{11}+\ln w_{12}}
\end{aligned}$$

と単純化できるのである。この値は、先に求めた m の値と同一である。したがって、

$$m = sv.$$

すなわち、二財の時、要素反転性を満たす対数変化型物価指数は Sato-Vartia 指数のみであることが示された。

三財以上の存在する時、要素反転性を満たす対数変化型物価指数は Sato-Vartia 以外に存在する。Abe and Rao (2019) は下記の例を提示している。

$(w_{i2} - w_{i1})$ が正の財を N_+、負の値をとる財を N_- に分類する。次に、

$$\kappa = \frac{\sum_{i \in N_+} \lambda_i \left(w_{i2} - w_{i1}\right)}{\left|\sum_{i \in N_-} \lambda_i \left(w_{i2} - w_{i1}\right)\right|},$$

$$\lambda_i = \ln\left(\frac{w_{i2}}{w_{i1}}\right) \frac{w_{i2} + w_{i1}}{2\left(w_{i2} - w_{i1}\right)}$$

と定義する。すると、

$$\begin{aligned}
\phi_i &= \frac{\frac{w_{i2}+w_{i1}}{2}}{\sum_{i \in N_+} \left(\frac{w_{i2}+w_{i1}}{2}\right) + \sum_{i \in N_-} \kappa \left(\frac{w_{i2}+w_{i1}}{2}\right)} \quad \text{for } i \in N_+ \\
&= \frac{\kappa \left(\frac{w_{i2}+w_{i1}}{2}\right)}{\sum_{i \in N_+} \left(\frac{w_{i2}+w_{i1}}{2}\right) + \sum_{i \in N_-} \kappa \left(\frac{w_{i2}+w_{i1}}{2}\right)} \quad \text{for } i \in N_-
\end{aligned}$$

とした ϕ_i をウェイトとする物価指数

$$PI_{01} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_1^i}{p_0^i}\right)^{\phi_i}$$

は要素反転性をみたし、かつ

$$\phi_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \phi_i = 1$$

となることを示している。なお、$n = 2$ の時には、この指数は Sato-Vartia 指数となる。これも確認してみよう。一般性を失わすに下記の関係を仮定しよう。

$$\begin{aligned}
w_{12} - w_{11} &> 0, \\
w_{22} - w_{21} &< 0.
\end{aligned}$$

すると、Abe-Rao (2019) のウェイトは

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{\frac{w_{12}+w_{11}}{2}}{\kappa \frac{w_{22}+w_{21}}{2} + \frac{w_{12}+w_{11}}{2}}, \\
\phi_2 &= \frac{\kappa \frac{w_{22}+w_{21}}{2}}{\kappa \frac{w_{22}+w_{21}}{2} + \frac{w_{12}+w_{11}}{2}},
\end{aligned}$$

ただし、

$$\kappa = \frac{\sum_{i \in N_+} \lambda_i \left(w_{i2} - w_{i1}\right)}{\left|\sum_{i \in N_-} \lambda_i \left(w_{i2} - w_{i1}\right)\right|}.$$

分子は

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N_+} \lambda_i \left(w_{i2} - w_{i1}\right) = \lambda_1 \left(w_{12} - w_{11}\right) \\
&= \frac{\ln w_{12} - \ln w_{11}}{w_{12} - w_{11}} \frac{w_{12} + w_{11}}{2} \times \left(w_{12} - w_{11}\right) \\
&= \left(\ln w_{12} - \ln w_{11}\right) \frac{w_{12} + w_{11}}{2}.
\end{aligned}$$

分母は

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i \in N_-} \lambda_i \left(w_{i2} - w_{i1}\right)\right| = \left|\lambda_2 \left(w_{22} - w_{21}\right)\right| \\
&= \left|\left(\ln w_{22} - \ln w_{21}\right) \frac{w_{22} + w_{21}}{2}\right|.
\end{aligned}$$

$w_{22} - w_{21} < 0$ だから、κ は

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\left(\ln w_{12} - \ln w_{11}\right) \frac{w_{12} + w_{11}}{2}}{\left|\left(\ln w_{22} - \ln w_{21}\right) \frac{w_{22} + w_{21}}{2}\right|} \\
&= \frac{-\left(\ln w_{12} - \ln w_{11}\right)\left(w_{12} + w_{11}\right)}{\left(\ln w_{22} - \ln w_{21}\right)\left(w_{22} + w_{21}\right)}.
\end{aligned}$$

整理すると、

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \left(\frac{w_{12} + w_{11}}{2}\right) \frac{2\left(\ln w_{22} - \ln w_{21}\right)}{\left(w_{12} + w_{11}\right)\left(\ln w_{22} - \ln w_{21}\right) - \left(\ln w_{12} - \ln w_{11}\right)} \\
&= \frac{\left(\ln w_{22} - \ln w_{21}\right)}{\left(\ln w_{22} - \ln w_{21}\right) - \left(\ln w_{12} - \ln w_{11}\right)}.
\end{aligned}$$

これは、以前に示したように、二財の時の Sato-Vartia のウェイトに他ならない。

8 Vartia I

Vartia (1976) は、いわゆる Sato-Vartia 以外に、現在 Vartia I と呼ばれている、要素反転性を満たす物価指数を提案している。

$$
\begin{aligned}
\ln PI^{V1} &= \sum_{i=1}^{n} \phi_i \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) \\
\phi_i &= \frac{L\left(v_{i1}, v_{i0}\right)}{L\left(\sum v_{i1}, \sum v_{i0}\right)} \\
v_{i1} &= p_{i1} q_{i1} \\
L\left(a, b\right) &= \frac{a-b}{\ln a - \ln b}
\end{aligned}
$$

すなわち、対数平均を用いる点で Sato-Vartia 型と似ているが、求める対数平均は支出シェアではなく、支出額である。また基準化するための分母も、総支出の対数平均となっている。なぜ Vartia (1976) はこのような指数を提案したのだろうか?もともとは Montogomery が 1929 年に見出した[10]次の式展開による。まず対数平均の定義より、

$$
\ln\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = \frac{E_1 - E_0}{L\left(E_1, E_0\right)}
$$

これを財単位に分割すると、

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{E_1}{E_0}\right) &= \frac{\sum\left(v_{i1} - v_{i0}\right)}{L\left(E_1, E_0\right)} \\
&= \frac{\sum L\left(v_{i1}, vi_0\right) \ln\left(v_{i1}/v_{i0}\right)}{L\left(E_1, E_0\right)} \\
&= \frac{\sum L\left(v_{i1}, vi_0\right) \ln\left(p_{i1}/p_{i0}\right)}{L\left(E_1, E_0\right)} + \frac{\sum L\left(v_{i1}, vi_0\right) \ln\left(q_{i1}/q_{i0}\right)}{L\left(E_1, E_0\right)}
\end{aligned}
$$

これは、左辺の Value Index が右辺のように価格と数量の情報に分割可能であることを示している。それぞれ物価指数および数量指数とすると、その物価指数が Vartia I となる。したがって、Vartia I は要素反転性を満たす。さらに、Vartia (1976) は、Vartia I が Aggregation Consistency を満たすことを示している。すなわち、財の種類数のみが異なる、同一の指数算式で、多段階の物価指数と、一段階の物価指数が同じ値となることを示している。これは、現在、他にはラスパイレス、パーシェ、及び Stuvel の 3 つの指数しか知られていない性質である[11]。しかしながら、Vartia I は、一次同次ではないという欠点がある。すなわち、

[10] J. K. Montgomery, Is there a Theoretically Correct Price Index of aGroup of Commodities?, International Institute of Agriculture, Rome, 1929 であるが、私は未読である。

[11] Aggregation Consistency の定義を弱めると、Marshall -Edgeworth の物価指数も Aggregation Consistency を満たすことが知られている。詳しくは Auer and Wengenroth (2017) “Consistent AggregationWith Superlative and Other Price Indices” material for Otawa Meeting を参照せよ。

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i \neq 1$$

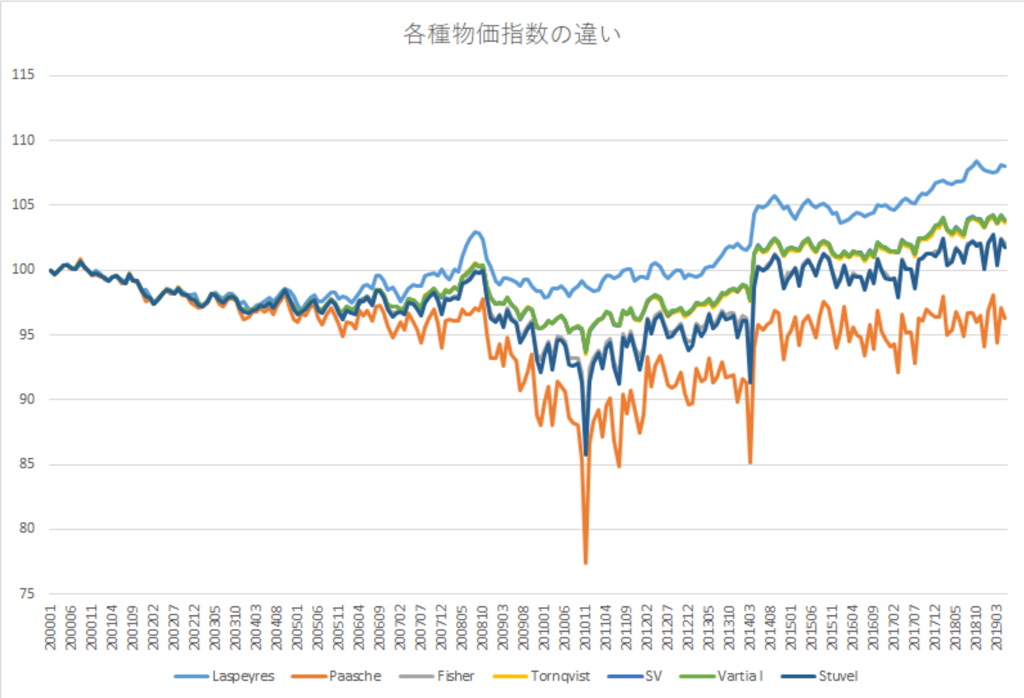
となってしまうのである。一次同次性の欠如は Stuvel 指数と共通するものであり、Aggregation Consistency を有し、かつ一次同次性を要求すると、残るは Laspeyres か Paasche とかなくなってしまう。また、Vartia I は、生計費指数としてはコブダグラス型の選好を仮定する必要があることが Diewert (1978) により指摘されている[12]。CES 型であった Sato-Vartia 型よりもさらに強い仮定を選好にしていることになってしまう。

実際に Vartia I を計算すると、Sato-Vartia や Tornqvist との乖離はごく僅かである。総務省家計調査の月次データと全国消費者物価指数を用い、2000 年 1 月を基準とし、20019 年 5 月までのデータを用いて図を描くと、この三種類の物価指数はほぼ同一曲線上に位置し、識別できない。主要物価指数間の相関行列は下記のようになる。

$Vartia1$	$Laspeyres$	$Paasche$	$Fisher$	$Tornqvist$	SV	$Vartia1$
$Laspeyres$	1					
$Paasche$	0.0668	1				
$Fisher$	0.6735	0.7824	1			
$Tornqvist$	0.9068	0.4697	0.9131	1		
SV	0.914	0.4556	0.9072	0.9995	1	
$Vartia1$	0.9144	0.4543	0.9066	0.9994	0.9999	1

現在、Vartia I が計算されることは少ない。Sato-Vartia に比べ、制約が強く、一方利点である Aggregation Consistency に関して要求しない場合は、あえて Vartria I を選択する理由が見つからない。しかも、現実の指数は Vartia 1 と Sato-Vartia はほとんど区別がつかないほど似た値となる。一方、Stuvel 指数は、日本の物価指数ではフィッシャー指数とほぼ同一になる。算術平均の Laspeyres をベースとする Stuvel と幾何平均の Vartia の違いだと思われる。。

[12]Diewert, W. (1978). Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation. Econometrica, 46(4), 883-900. doi:10.2307/1909755


各種物価指数の違い
115
110
105
100
95
90
85
80
75
200001
200006
200011
200104
200109
200202
200207
200212
200305
200310
200403
200408
200501
200506
200511
200604
200609
200702
200707
200712
200805
200810
200903
200908
201001
201006
201011
201104
201109
201202
201207
201212
201305
201310
201403
201408
201501
201506
201511
201604
201609
201702
201707
201712
201805
201810
201903
Laspeyres
Paasche
Fisher
Tornqvist
SV
Vartia I
Stuvel