2019年地域経済各論(日本)
指数理論(5)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成31年10月31日

概 要

対数変分に基づく指数:Törnqvist 指数

1 対数変分と変化率の関係

通常、変数 $x_t(>0)$ の変化率は

$$g_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} = \frac{\Delta x_t}{x_{t-1}}$$

で定義される。この変化率はごく一般的に用いられているが、注意すべき特徴がある。$(x_1, x_2, x_3) = (10, 11, 10)$ と $x_1 = x_3$ となったとしよう。すると、

$$g_1 = \frac{1}{10} = 0.1$$
$$g_2 = \frac{-1}{11} = -0.09090909...$$

となり、$g_1 + g_2$ はゼロにならない。すなわち、1期から3期にかけての変化率はゼロであるが、2期間の変化率を足してもゼロにならないのである。これは、実質GDP等の前期比で計算した場合、ある期に10% 上昇し、翌期に10% 下落した場合、元の水準よりも低い値になり、2期間を通じての変化率はマイナスになってしまうなど、現実の経済データを解釈する際に注意しておかねばならない重要な性質である。より一般的には、変化率には対称性がない、すなわち、

$$\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \neq -\frac{-x_t + x_{t-1}}{x_t}$$

であり、かつ、変化率の和や差に意味がないのである。

この点、対数を用いると、様々な利点がある。対数変分 (logarithmic difference) は下記のように定義される。

$$\Delta \ln x_t = \ln(x_t) - \ln(x_{t-1})$$

また、対数平均 (logarithmic mean) は $x_t \neq x_{t-1}$ の時、下記のように定義される[1]。

$$\begin{aligned} L\left(x_t, x_{t-1}\right) &= \frac{x_t - x_{t-1}}{\ln\left(x_t\right) - \ln\left(x_{t-1}\right)} \text{ if } x_t \neq x_{t-1} \\ &= x_t \text{ if } x_t = x_{t-1} \end{aligned}$$

対数変分は対称性をみたす。すなわち、

$$\ln\left(x_t\right) - \ln\left(x_{t-1}\right) = -\left(\ln\left(x_{t-1}\right) - \ln\left(x_t\right)\right)$$

先の例に即して考えると

$$(\ln 10 - \ln 11) + (\ln 11 - \ln 10) = 0$$

となり、前期と今期の対数差分の和が全期間の対数変分と一致する。すなわち、対数変分の和や差には明確な意味があり、変化率のような調整は必要ない。

対数変分を $(x_0 = 0)$ ゼロでテイラー展開 (マクローリン展開) すると、

$$\begin{aligned} \ln\left(1+x\right) &= \ln\left(1+x_0\right) + \frac{1}{1+x_0}\left(x - x_0\right) - \frac{1}{2\left(1+x_0\right)^2}\left(x-x_0\right)^2 + ... \\ &= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + ... \end{aligned}$$

したがって、絶対値が十分に小さい x に関しては、

$$\ln\left(1+x\right) \sim x$$

となる。すなわち、

$$\ln\left(x_t\right) - \ln\left(x_{t-1}\right) = \ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right)$$

だから、

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x_t}{x_{t-1}}\right) &= \ln\left(\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} + 1\right) \sim \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \\ \ln\left(x_t\right) - \ln\left(x_{t-1}\right) &\sim \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \end{aligned}$$

となり、対数変分は、x が十分に小さいときは通常の変化率 (比) の近似となっている。

対数変分を用い、物価指数を作成することが可能である。　　最も古典的な指数は Jevons 指数であり

$$PI^J = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{1/n}$$

[1] $x_t = x_{t-1}$ の時には、単にどちらかの値が対数平均の値となる。

Logarithmic Laspeyres は

$$\ln\left(PI^{LL}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) w_{i0}$$
$$PI^{LL} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{w_{i0}}$$
$$w_{i0} = \frac{p_{i0}q_{i0}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}}$$

対数を用いると、物価指数としての解釈が一般の人々にに困難になるという欠点がある。また、価格がゼロになるような時には、その支出シェアがどんなに小さくとも、物価全体がゼロになってしまうという性質を有する。しかしながら、数学的には非常に魅力的な性質を多く有しており、この対数変分に基づく非常に有名な指数が存在する。

2 Törnqvist 指数

フィンランド銀行の統計学者 Leo Törnqvist[2]は 1936 年に、フィンランドにおける物価指数表[3]を発表する際、通常の固定ウェイトの幾何平均ではウェイトの変化の効果を反映できないとし、下記の指数を提案した[4]。

$$PI^{T} = \prod_{i=0}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)^{\overline{w_i}}$$
$$\overline{w_i} = \frac{1}{2}\left(w_{i0} + w_{it}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p_{i0}q_{i0}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_{i0}q_{i0}} + \frac{p_{it}q_{it}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_{it}q_{it}}\right)$$

もしくは

$$\ln\left(PI^{T}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\sum_{i=0}^{n} w_{i0}\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) + \sum_{i=0}^{n} w_{it}\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\right]$$

である。

$$PI^{LL} = \sum_{i=0}^{n} w_{i0}\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)$$

[2]Linux で有名な Linus Torvalds の祖父にあたる。

[3]Leo Törnqvist (1936) “The Bank of Finland’s Consumption Price Index,” *Bank of Finland Monthly Bulletin* 10, 1-8.

[4]もっとも、そこに書かれている式は通常の Törnqvist 指数とは若干異なり曖昧であり、CPI Manural によれば、正確な表記は翌年の Törnqvist & Törnqvist (1937) にあるらしいが、スウェーデン語で書かれており私は内容を確認していない。

は Laspeyres 指数の対数版であり、Logarithmic Laspeyres Price Index と呼ばれる。同様に右辺第二項は Logarithmic Paasche Price Index と呼ばれる。

Törnqvist 指数は Time Reversal を満たす。すなわち、

$$PI_{0t}^{T} PI_{t0}^{T} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right)^{\overline{w_i}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i0}}{p_{it}} \right)^{\overline{w_i}} = 1$$

なお、Laspeyres や Paasche のように、Weight が基準時と比較時で対称になっていない場合、Time Reversal は満たされないことに注意せよ。ちなみに、Walsh、Marshall-Edgeworth, Fisher, Stuvel および Sato-Vartia は Time Reversal を満たす。

Logarithmic Laspeyres Index は、残念ながら、通常の Laspeyres 程には望ましい性質を有していない。すなわち、

$$QI^{LL} = \sum_{i=0}^{n} w_{i0} \ln \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} \right)$$
$$PI^{LP} = \sum_{i=0}^{n} w_{it} \ln \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right)$$

とし、両者を乗じて、

$$QI^{LL} PI^{LP} = \left(\sum_{i=0}^{n} w_{i0} \ln \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} \right) \right) \left(\sum_{i=0}^{n} w_{it} \ln \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right) \right)$$

は Value Index にはならない。したがって、その関数である Törnqvist 指数で数量指数を作成しても、Factor Reversal は満たさない。この点において、Törnqvist 指数は Fisher 指数に劣ることになる。

ところで、

$$PI^{LL} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right)^{w_{i0}}, PI^{LP} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right)^{w_{it}}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \ln \left(PI^{T} \right) &= \left(\frac{1}{2} \right) \left[\ln PI^{LL} + \ln PI^{LP} \right] \\ &= \sqrt{DP^{L} \times DP^{P}} \end{aligned}$$

となり、Törnqvist 指数は幾何平均版の Laspeyres と Paasche 物価指数の Fisher 指数とみなすことも可能である。

3 Törnqvist 指数の公理的背景

Fisher 指数が Factor Reversal といくつかの公理を同時にみたす唯一の指数であったように、Törnqvist 指数にもそのような公理の組み合わせがある

だろうか?まず Balk and Diewert (2001)[5]の結果を紹介しよう。

まず、

$$\ln PI\left(p^1,q^1,p^0,q^0\right)=\sum m_i\left(w_{i0},w_{i1}\right)\ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)$$

の形の物価指数 PI を考える。p^t,q^t は t 期の価格、数量ベクトルであり、$m_i\left(w_{i0},w_{i1}\right)$ は二期における i 財への支出シェアにのみ依存する Weight 関数であり、$m_i:[0,1]\rightarrow[0,1]$,$m_i\left(0,0\right)=0,\sum m_i\left(w_{i0},w_{i1}\right)=1$ である。

この指数は比較時の価格に関して一次同次、すなわち linear homogeneity を満たすとする。すなわち、

$$PI\left(\lambda p^1,q^1,p^0,q^0\right)=\lambda PI\left(p^1,q^1,p^0,q^0\right)$$

次に、Time Reversal もみたす、すなわち、

$$PI\left(p^1,q^1,p^0,q^0\right)=\frac{1}{PI\left(p^0,q^0,p^1,q^1\right)}$$

を満たすとする。ある i 財以外の全ての価格が二時点で同一であるとすると、

$$\begin{aligned}\ln PI\left(p^1,q^1,p^0,q^0\right)&=m_i\left(w_{i0},w_{i1}\right)\ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)\\ PI\left(p^1,q^1,p^0,q^0\right)&=\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{m_i\left(w_{i0},w_{i1}\right)}\end{aligned}$$

したがって、Time Reversal を常に満たすためには、

$$\begin{aligned}\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{m_i\left(w_{i0},w_{i1}\right)}&=\left(\frac{p_{i0}}{p_{i1}}\right)^{-m_i\left(w_{i1},w_{i0}\right)}\\&=\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{m_i\left(w_{i1},w_{i0}\right)}\end{aligned}$$

したがって、

$$m_i\left(w_{i0},w_{i1}\right)=m_i\left(w_{i1},w_{i0}\right)$$

が成立する。これは、ウェイト関数が期間に関して対称になっていることを意味する。ところで、関数方程式に関し、下記の定理が存在する[6]。

定理 1 *Azcel (1987)*

下記の関係式が成立するとする。

[5] B.M. Balk and W.E. Diewert (2001) "A Characterization of the Törnqvist Price Index," *Economics Letters*, 72, 279-281.

[6] Aczel (1987) *A Short Course on Functional Equations.* Reidel, Dordrecht. の Section 1 Theorem 2 より。

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = s \in \mathbf{R}_+$$

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = \mathbf{s} = (s, s, ..., s) \in \mathbf{R}_+^n$$

$$f_j : [0, s]^n \to \mathbf{R}_+$$

$$\sum_{j=0}^{n} f_j (x_j) = s$$

$$f_j (0) = 0$$

この性質をみたす関数 f_j は

$$\begin{aligned} f_1 (x_1) = f_2 (x_2) = ... = f_m (x_m) \\ = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$$

に限られる。

例えば s として 1 を想定し、n 期間、m 種類の財の存在を考える。x_{ij} を i 期における j 財の支出シェア、x_i を i 期における財の支出シェアベクトルと考え、f_j は j 財の n 期間における支出シェア、例えば 0 期と 1 期の支出シェア変数とする関数で、ある種のシェアを生み出すものである。このような、f_j は単純な正のパラメターからなる凸結合に限定されるのである。

この定理を利用すると、$\sum w_{it} = 1$ と $\sum m_i (w_{i0}, w_{i1}) = 1$ をみたす方程式は下記に限定される。

$$m_i (w_{i0}, w_{i1}) = \alpha_1 w_{i0} + (1 - \alpha_1) w_{i1}, 0 \leq \alpha_1 \leq 1$$

さらに、対称性より、

$$\alpha_1 w_{i0} + (1 - \alpha_1) w_{i1} = \alpha_1 w_{i1} + (1 - \alpha_1) w_{i0}$$

が常に成立するので、$\alpha_1 = 1/2$ となる。したがって、

$$\ln PI \left(p^1, q^1, p^0, q^0\right) = \sum \left(\frac{w_{i0} + w_{i1}}{2}\right) \ln \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)$$

となり、Törnqvist 指数を得る。まとめると、Törnqvist 指数は、対数価格比率に依存する物価指数で、Linear Homogeneity と Time Reversal を満たす指数としてユニークに定まることになる。

次に、Fisher 指数のように、関数計を特定せず、一般の公理体系から Törnqvist 指数を導いてみよう。

まず、物価指数の定義域を $\left(p^0, q^0, p^1, q^1\right)$ から、$\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right)$ と、数量から支出ベクトルに変更し、下記の 17 の公理を導入する。

(T-1)　Positiveness

$$PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right) > 0$$

(T-2)　Continuity

$PI\left(p^1, q^1, p^0, q^0\right)$ は各要素に関する連続関数である。

(T-3)　Identity

$$PI\left(p^0, v^0, p^0, v^1\right) = 1$$

(T-4)　Linear Homogeneity

$$PI\left(p^0, v^0, \lambda p^1, v^1\right) = \lambda PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right)$$

(T-5)　Minus one linear homogeneity

$$PI\left(\lambda p^0, v^0, p^1, v^1\right) = \frac{1}{\lambda} PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right)$$

(T-6)　Invariance to proportional changes in current period values

$$PI\left(p^0, v^0, p^1, \lambda v^1\right) = PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right)$$

(T-7)　Invariance to proportional changes in base period values

$$PI\left(p^0, \lambda v^0, p^1, v^1\right) = PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right)$$

すなわち、現在、基準時どちらの支出額についてもゼロ次同次になっている。価格が変わらず、数量のみが変化している状況なので、この公理は自然であろう。この二つが満たされているとすると、

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^1}$$

として (T-6) を使うと、

$$PI\left(p^0, v^0, p^1, w^1\right) = PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right)$$

同様に、

$$\lambda=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}v_i^0}$$

としてさらに (T-7) を使うと

$$PI\left(p^0,w^0,p^1,w^1\right)=PI\left(p^0,v^0,p^1,v^1\right)$$

をえる。すなわち、支出ベクトルはシェアベクトルに置き換えることが可能である。

(T-8)　Commodity Reversal

$$PI\left(p^{0*},v^{0*},p^{1*},v^{1*}\right)=PI\left(p^0,v^0,p^1,v^1\right)$$

ただし、p^{i*},v^{i*} は、ベクトル要素の順番を並べ替えたものである。財の並び順に指数の値が依存してはならないという意味であり、これも自然な要請であろう。

(T-9) Invariance to Changes in the Units of Measuremennt

任意の $\alpha_1>0,\alpha_2>0,...,\alpha_n>0$ に対して

$$\begin{aligned}&PI\left(\left(\alpha_1p_1^0,\alpha_2p_2^0,...,\alpha_np_{1n}^0\right),v^0,\left(\alpha_1p_1^1,\alpha_2p_2^1,...,\alpha_np_{1n}^1\right),v^1\right)\\&=PI\left(p^0,v^0,p^1,v^1\right)\end{aligned}$$

これは、単位に依存しないという自然な要請である。これが成立しているとき、

$$\alpha_1=\frac{1}{p_1^0},\alpha_2=\frac{1}{p_2^0},...,\alpha_n=\frac{1}{p_n^0}$$

とすると、

$$PI\left(1,v^0,r^1,v^1\right)=PI^*\left(v^0,r^1,v^1\right)=PI\left(p^0,v^0,p^1,v^1\right)$$

$$r=\left(\frac{p_1^1}{p_1^0},\frac{p_2^1}{p_2^0},...,\frac{p_n^1}{p_n^0},\right)$$

すなわち、物価指数は、二期間の相対価格のみに依存するように書くことが可能になる。

(T-10) Time Reversal

$$PI\left(p^0,v^0,p^1,v^1\right)=\frac{1}{PI\left(p^1,v^1,p^0,v^0\right)}$$

基準時と現在時をひっくり返すと物価は逆数となることを意味する。

(T-11) Transitivity in Prices for Fixed Value Weights

$$PI\left(p^0,v^r,p^1,v^s\right)PI\left(p^1,v^r,p^2,v^s\right)=PI\left(p^0,v^r,p^2,v^s\right)$$

支出ベクトルが一定で、しかし価格ベクトルが変化するというこの要請はずいぶん不自然であり、コブダグラス型のような強い効用関数を想定しないと生じそうにないが、もしもこのような状況が発生したら、物価指数は推移性を満たさねばならない、というのは当然であろう。

(T-12) Quantity Weights Summetry

$$PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right) = PI\left(p^0, v^1, p^1, v^0\right)$$

すなわち、二つの支出ベクトルを取り換えても結果に影響を与えない。この要請は、指数算式で、支出ベクトルは対称に入る必要があることを意味する。

(T-13) Mean Value for Prices

$$\min_i \left[\frac{p_i^1}{p_i^0}\right] \le PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right) \le \max_i \left[\frac{p_i^1}{p_i^0}\right]$$

物価指数がなんらかの意味で「平均」を示すためには必要な要請である。

(T-14) Monotonicity in Current Prices

$$PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right) < PI\left(p^0, v^0, p^2, v^1\right) \text{ if } p^1 < p^2$$

すなわち、基準価格の単調増加関数である。

(T-15) Monotonicity in Base Prices

$$PI\left(p^0, v^0, p^1, v^1\right) > PI\left(p^2, v^0, p^1, v^1\right) \text{ if } p^0 < p^2$$

すなわち、現在価格の単調減少関数である。なお、二つの単調性公理については補足が必要である。ここでは、支出額が不変と仮定している。これまでの公理では数量を不変としていた。数量が不変で価格が変化れば支出も変化せざるを得ない。ここでは、価格が変化するとそれにあわせて数量が変化していることを暗に仮定している。

以上、16 の公理 (test) を並べたが、これらは、Walsh 指数及び Törnqvist 指数の両方が満たす。したがって、Törnqvist 指数一つを必要条件として導くにはさらに公理 (test) を追加せねばならない。

(T-16)　Own Share Price Weighting

$$\begin{aligned} & PI\left(\left(p_1^0, 1, 1, ..., 1\right), v^0, \left(p_1^1, 1, 1, ..., 1\right), v^1\right) \\ & = f\left(p_1^0, p_1^1, \frac{v_1^0}{\sum_{i=1}^{n} v_i^0}, \frac{v_1^1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^1}\right) \end{aligned}$$

すなわち、ほかの財価格が一定であれば、物価の値は、変化のあった財の価格およびその支出シェアのみに依存する。

(T-17)　Irrevance of Price Changes with Tiny Value Weights

$$PI\left(\left(p_1^0,1,1,...,1\right),\left(0,v_2^0,v_3^0,..,v_n^0\right),\left(p_1^1,1,1,...,1\right),\left(0,v_2^1,v_3^1,..,v_n^1\right)\right)=1$$

もしも、一財を除きすべての価格に変化がなく、かつ、唯一価格変化のある財への支出額がゼロであれば、物価指数は不変である。

以上の公理 (T-1) から (T-17) 全てを満たすものとして、Törnqvist 指数を導くことができる。

まず、(T-1), (T-6), (T-7),(T-9) より

$$PI\left(p^0,v^0,p^1,v^1\right)=P^*\left(r,w^0,w^1\right)$$

(T-11) より

$$P^*\left(r^{01},w^0,w^1\right)P^*\left(r^{12},w^0,w^1\right)=P^*\left(r^{02},w^0,w^1\right)$$

これは、

$$P^*\left(x,w^0,w^1\right)P^*\left(y,w^0,w^1\right)=P^*\left(\left(x_1y_1,x_2y_2,...x_ny_n\right),w^0,w^1\right)$$

を意味する。また

$$P^*\left(1,w^0,w^1\right)=1$$

である。ここで Eichhorn (1978) の p.66、Production and Utility Theory: The Role of the Equation の Theorem 3.6.4. を用いると、この関数方程式を満たす $P^*\left(r,w^0,w^1\right)$ はコブダグラス型、すなわち

$$\ln P^*\left(r,w^0,w^1\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(w^0,w^0\right)\ln r_i$$

のみであることを示すことができる。

(T-4) より

$$\begin{aligned}\ln P^*\left(\lambda r,w^0,w^1\right)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(w^0,w^1\right)\ln\lambda r_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(w^0,w^1\right)\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(w^0,w^0\right)\ln r_i\\&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(w^0,w^1\right)\ln\lambda+\ln P^*\left(r,w^0,w^1\right)\\&=\ln\lambda P^*\left(r,w^0,w^1\right)\end{aligned}$$

したがって、$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(w^0,w^1\right)=1$ でなければならない。(T-16) と (T-8) を用いると、

$$\begin{aligned}&PI\left(\left(1,..p_i^0,1,1,...,1\right),v^0,\left(1,1,...,p_i^1,1,1,...,1\right),v^1\right)\\&=f\left(p_i^0,p_i^1,\frac{v_i^0}{\sum_{i=1}^{n}v_i^0},\frac{v_i^1}{\sum_{i=1}^{n}v_i^1}\right)\end{aligned}$$

したがって、

$$P^*\left((1,1,...,r_i,..,1),w^0,w^1\right)=f\left(1,r_i,\frac{v_i^0}{\sum_{i=1}^{n}v_i^0},\frac{v_i^1}{\sum_{i=1}^{n}v_i^1}\right)$$

これを用いると、

$$\begin{aligned}P^*\left((1,1,...,r_i,..,1),w^0,w^1\right)&=\alpha_i\left(w^0,w^0\right)\ln r_i\\&=f\left(1,r_i,\frac{v_i^0}{\sum_{i=1}^{n}v_i^0},\frac{v_i^1}{\sum_{i=1}^{n}v_i^1}\right)\end{aligned}$$

これは、$\alpha_i\left(w^0,w^1\right)$ が w_i^0 と w_i^1 のみに依存していることを示している。すなわち、

$$\alpha_i\left(w^0,w^1\right)=\beta_i\left(w_i^0,w_i^1\right)$$

とする関数 β_i が存在する。以上より、

$$\ln P^*\left(r,w^0,w^1\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(w_i^0,w_i^1\right)\ln r_i$$

さらに、、$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(w^0w^0\right)=1$ が成立していたから、

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(w_i^0,w_i^1\right)=1$$

さらに (T-17) より

$$\beta_i\left(0,0\right)\ln\frac{p_i^1}{p_i^0}=0$$

これが任意の p_i^0,p_i^1 について成立していたので、

$$\beta_i\left(0,0\right)=0$$

ここで、財の種類 n が 3 以上だとする。ここで、前回と同様に Aczel (1987) による定理 1 を用いると、

$$\beta_i\left(w_i^0, w_i^1\right) = \gamma w_i^0 + (1-\gamma) w_i^1$$
$$0 < \gamma < 1$$

となる。ここで (T-12) もしくは (T-10) を用いると、

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

となり、Törnqvist 指数が導出される。すなわち、

$$\ln P^*\left(r, w^0, w^1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i^0 + w_i^1}{2}\right)\ln\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)$$

3.1 Törnqvist 指数に関するまとめ

Törnqvist 指数は、二期間の支出額 Weight を用いる幾何平均の一種である。Fisher 指数に比べ、数量指数と物価指数を乗じても Value Index にならず、その意味で Fisher 指数よりも劣っているとみなされている。また、ある一つの商品価格がゼロに近づくと、指数全体がゼロになってしまうという欠点も有している。さらに Törnqvist 指数に関しては、単調性をみたさないという結果も報告されている[7]。一見、Törnqvist 指数が単調性を満たすのは明らかに見えるが、問題は Weight であり、相対価格が変化すると Weight も変化していく。本講義ノートでは支出を一定と考えていたので単調性を満たしていたが、支出ではなく数量を不変として価格だけ変化させると、Weight は変化せねばならない。この変化次第で、Törnqvist 指数は単調性を満たさなくなってしまうのである。Diewert(1995) は、Törnqvist 指数は Fisher 指数がみたす 9 個の公理を満たさないことを指摘し、Fisher 指数の有意性を指摘している。一方、近年、大量のデータ処理をする場合、Laspeyres と Paashce を作成してからその幾何平均をとる Fisher よりも Törnqvist のほうがはるかに計算が容易であるという利点もある[8]。

Törnqvist 指数には、生計費指数及び、Diewert による一連の Superlative index の理論において何度となく出てくる理論的に重要な指数であり、さらに、現在、アメリカ合衆国の連鎖消費者物価指数 (Chained Consumer Price Index) で採用されるなど、実用性の点からも特に重要な指数となっている。

[7] Reinsdorf, M.B., Dorfman, A.H., 1999. The Sato?Vartia index and the monotonicity axiom. *Journal of Econometrics* 90, 45-61 には、Törnqvist 指数が単調性を満たさない例が示されている。

[8] Dumagan (2002), “Compaparing the Superlative Törnqvist and Fisher Ideal Indexes,” Economics Letters, 70, 2, pp.251-258. は、Törnqvist と Fisher 指数がほぼ同じ情報を有する一方、変化率に対する寄与度を計算する際には、前者は後者に比べて計算量が圧倒的に少なく、大規模なデータを用いる際には Törnqvist 指数を用いるメリットが大きいことを強調している。