2019 年度一橋大学経済学研究科地域経済各論 (日本)

指数理論　(5)

阿部修人
一橋大学経済学研究科

2019 年 10 月 16 日

概要

Lowe、Young、and Stuvel 指数

1　Fisher 指数以外の指数算式

Value Index、すなわち二期間の支出額の比は下記のように定義されていた。

$$V_{0t} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_j p_{j0} q_{j0}} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0}$$

二時点の数量が同一のベクトルでない限り、価格変化比で集計する場合、総和が 1 の Weight にならず、また物価が変わらずに数量が変わるだけでも Value Index は変動するため、物価指数とみなすことはできない。そこで、Laspeyres は基準時の、Paashce は比較時の数量ベクトルで固定することで、「平均」的な物価変動を価格比によって捉えようとしている。もしも両時点での情報を利用可能なのであれば、二期で共通の Weight とし二つの数量のなんらかの平均 $m(q_{i0}, q_{i1})$ を用いることが可能であろう。Value Index をベースとする物価指数は下記のような形で一般的に表記することが可能である。

$$PI = \frac{\sum_i p_{it} m(q_{i0}, q_{i1})}{\sum_j p_{j0} m(q_{i0}, q_{i1})}$$

数量の指標として、算術平均を用いるのが下記の Marshall -Edgeworth 指数であり、

$$m(q_{i0}, q_{i1}) = \frac{q_{i0} + q_{i1}}{2}$$

$$PI^{ME}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} \left(\frac{q_{i0}+q_{i1}}{2}\right)}{\sum_{j=1}^{n} p_{j0} \left(\frac{q_{j0}+q_{j1}}{2}\right)}.$$

数量の指標として、幾何平均を用いるのが下記の Walsh 指数である。

$$m\left(q_{i0}, q_{i1}\right) = \sqrt{q_{i0} q_{i1}}$$

$$PI^{W}\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i1} \sqrt{q_{i0} q_{i1}}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{j0} \sqrt{q_{j0} q_{j1}}},$$

これらの二つの指数はよく似ているが、数量に関する不変性 (前回の講義ノートの (T-7), (T-8)、すなわち、$\lambda > \mathbf{0}$ に関して、

$$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = PI\left(\lambda \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \lambda \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right)$$

を満たすのは Walsh 指数のほうであり、Marshall -Edgeworth 指数は $\mathbf{q}_t$ に関してゼロ次同次ではないため、この性質を満たさない。この違いは、物価指数を異なる国間の比較に応用すると意味が明確になる。0 期を超大国、1 期を小国と仮定しよう。ここで超大国の数量を定数倍し、一斉に数百分の一に縮小し、小国と同じような規模にしたと考える。Walsh 指数はそのような変換に対して物価指数は変わらないが、Marshall-Edgeworth 指数は変化する。すなわち、大国と小国の物価水準を考える際、Marshall -Edgeworth 指数は大国の値に引きずられる傾向があり、もしも片方の Weight、すなわち大国の大きさを無限に拡大していくと、物価指数は大国の物価にほぼ等しくなってしまうのである。

数量情報がなくとも、支出シェアの情報から Walsh 指数は計算可能である。多少複雑だが下記のようになる。

$$PIW(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_{i1}\sqrt{q_{i0}q_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n}p_{j0}\sqrt{q_{j0}q_{j1}}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\sqrt{p_{i0}p_{i1}}\sqrt{q_{i0}q_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_{j0}}{\sqrt{p_{j0}p_{j1}}}\right)\sqrt{p_{j0}p_{j1}}\sqrt{q_{j0}q_{j1}}}$$

$$右辺分子=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\frac{\sqrt{p_{i0}q_{i0}p_{i1}q_{i1}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_{i0}q_{i0}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_{i1}q_{i1}}}$$

$$右辺分母=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_{j0}}{\sqrt{p_{j0}p_{j1}}}\right)\frac{\sqrt{p_{j0}q_{j0}p_{j1}q_{j1}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_{i0}q_{i0}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}p_{i1}q_{i1}}}$$

$$PIW(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_{j0}}{\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i0}}}{\sqrt{p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}}}$$

分母と分子の価格比の 0 と 1 の位置が逆になっていることに注意する必要がある。

Walsh 指数は Factor Reversal、すなわち要素転逆性を満たさない。Factor Reversal は

$(T-5)$　要素転逆性 $(FactorReversal)$ 価格と数量を入れ替えた場合、価格指数と数量指数も入れ替わり、その積は Value Index と一致する。すなわち、

$$PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)\,PI(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1)=\frac{\mathbf{q}_1'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}$$

であった。すなわち、価格と数量を入れ替えた値と、物価指数を乗じると Value Index となり、価格と数量を入れ替えたものは数量指数をみなすことが可能となる。Walsh 指数で価格と数量を入れ替えると、

$$QIW(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)=PI(\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1)$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}q_{i1}\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n}q_{j0}\sqrt{p_{j0}p_{j1}}}$$

そして、

$$QIW\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) PI\left(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1}\sqrt{p_{i0}p_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n} q_{j0}\sqrt{p_{j0}p_{j1}}} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\sqrt{q_{i0}q_{i1}}}{\sum_{j=1}^{n} p_{j0}\sqrt{q_{j0}q_{j1}}}$$

支出シェア公式を用いると

$$右辺分子 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}} \times \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{q_{i1}}}{\sqrt{q_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}$$

$$右辺分母 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i0}}}{\sqrt{p_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}} \times \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{q_{i0}}}{\sqrt{q_{i1}}}\right)\sqrt{s_{j0}s_{j1}}$$

ここで、もしも Walsh の物価・数量指数の積が

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{q_{i1}}}{\sqrt{q_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{p_{i1}}}{\sqrt{p_{i0}}}\right)\left(\frac{\sqrt{q_{i1}}}{\sqrt{q_{i0}}}\right)\sqrt{s_{i0}s_{i1}}$$

を見たせばよいのだが、残念ながら成立せず、そのため Walsh の数量・物価指数の積は Value Index と一致しない。下記のような価格と数量の組み合わせを考えてみよう

時期	p1	p2	q1	q2	支出
0	10	10	10	20	300
1	20	10	5	25	350

この場合の各主要物価・数量指数は下記のようになる

Walsh Price	1.29
Walsh Quantity	0.939
Las Price	1.333
Las Quantity	1
Paa Price	1.167
Paa Quantity	0.875
Fisher Price	1.247
Fisher Quantity	0.935
Value Index	1.1667
Walsh Price×Quantity	1.214
Fisher Price×Quantity	1.1667

Fisher 指数は、数量指数と物価指数を乗じると Value Index と一致するが、Walsh の場合は一致しないことがわかる。

1.1 Young 指数

ここまでは、基準時を 0、比較時を 1 とし、そこにおける数量、価格の情報を用いてきたが、価格比を計算する二時点と数量を調査する時点が異なることがある。たとえば、詳細な家計調査をある年に行い、それを

Weight として採用するが、物価の変化は他の時点を基準に考えたいときである。去年に比べて物価が何パーセント変化したかを、4 年前の数量を用いて計算することは実際には頻繁に行われている。基準時点として、0 でも 1 でもない、b という時点を想定し、そこにおける支出シェアをまず下記のように定義する

$$s_{ib} = \frac{p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ib}q_{ib}}$$

この支出シェアを用いた物価指数は、18 世紀から 19 世紀にかけて活躍したイギリスの農業経済学者 (政治算術)、Young が 1812 年に考案したため、Young 指数と呼ばれる。

$$PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) s_{ib}$$

同じように、基準時とも比較時とも異なる、ある時点の数量を固定した指数が Lowe 指数であった。すなわち、

$$PI^{Lowe}\left(\mathbf{q}_b, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1\right) = \frac{\mathbf{q}_b'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_b'\mathbf{p}_0}$$

Lowe 指数と Young 指数の発想はよく似ているが、その値は異なるものなる。Lowe 指数をシェアを用いて記述すると、

$$\begin{aligned} PI^{Lowe} &= \frac{\sum_{i} p_{it}q_{ib}}{\sum_{i} p_{i0}q_{ib}} \\ &= \frac{\sum_{i} p_{i0}q_{ib}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)}{\sum_{i} p_{i0}q_{ib}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) s_{ib}^{0} \end{aligned}$$

ここで、s_{ib}^{0} は hybrid 支出シェアをと呼ばれるものであり、実際には観察不可能な下記で定義される仮想的な支出シェアである。

$$s_{ib}^{0} = \frac{p_{i0}q_{ib}}{\sum_{i} p_{i0}q_{ib}}$$

Lowe 指数と Young 指数の間の差は下記で描写可能である。

$$
\begin{aligned}
PI^{Lowe} - PI^{Y} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) \left(s_{ib}^{0} - s_{ib}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PI^{Y}\right) \left(s_{ib}^{0} - s_{ib}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PI^{Y}\right) \left(\frac{s_{ib}^{0}}{s_{ib}} - 1\right) s_{ib} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PI^{Y}\right) \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ib} q_{ib}}{\sum\limits_{i} p_{i0} q_{ib}} - 1\right) s_{ib} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PI^{Y}\right) \left(PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right) \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ib} q_{ib}}{\sum\limits_{i} p_{i0} q_{ib}} - PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right)\right) \frac{s_{ib}}{PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right)}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&PPI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right) \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ib} q_{ib}}{\sum\limits_{i} p_{i0} q_{ib}} - PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right) \\
&= \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) \frac{p_{ib} q_{ib}}{\sum\limits_{i} p_{ib} q_{ib}}\right) \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ib} q_{ib}}{\sum\limits_{i} p_{i0} q_{ib}}\right) - PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right) \\
&= \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) \frac{p_{ib} q_{ib}}{\sum\limits_{i} p_{i0} q_{ib}}\right) - PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right) \\
&= \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i0} q_{ib}}{\sum\limits_{i} p_{i0} q_{ib}}\right) - PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right) \\
&= \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}}\right) - PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right)
\end{aligned}
$$

を用いると、

$$
PI^{Lowe} - PI^{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PI^{Y}\right) \left(\frac{p_{i0}}{p_{ib}} - PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right)\right) \frac{s_{ib}}{PI^{Y}\left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0\right)}
$$

と表すことが可能である。右辺の第一括弧は、0 期から 1 期までの価格変化の Young 指数からの乖離であり、第二括弧は支出シェア計測時から基準時への価格変化とその Young 指数からの乖離であり、第三括弧内は

weight である。すなわち、これは、三時点間の価格変化の共分散と解釈可能である。もしも相対価格の動向に正の系列相関、あるいはトレンドがあれば、この値は正になるだろう。すなわち、Lowe 指数は Young 指数よりも高くなる傾向にある[*1]。

基準時とは異なる時期の数量で CPI を計算する時、例えば基準時が 2000 年の 1 月であるが、数量は 2000 年の一年間の平均数量を用いる場合、その物価指指数を Lowe 指数となる。

実際の公式 CPI では数量ではなく支出シェアがなんらかの時期で固定されているので、Lowe 指数ではなく Young 指数となっていることに注意されたい。

Laspeyres 指数と Lowe 指数の関係も同様の操作により、下記のように書くこと可能である。

$$
\begin{aligned}
PI^L - PI^{Lowe} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ib} q_{ib}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{ib}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PI^L \right) \left(\frac{q_{i0}}{q_{ib}} - QI^P \left(\mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0 \right) \right) \frac{s_{ib}}{QI^P \left(\mathbf{s}_b, \mathbf{p}_b, \mathbf{p}_0 \right)}
\end{aligned}
$$

ここで、QI^P は b 期から 0 期までの Paasche 数量指数であり、価格と数量の間に負の相関があるなら、上記の式は負、すなわち、ラスパイレス指数よりも Lowe 指数の方が大きくなる。すなわち、一般に、価格と数量の間に負の相関があるならば、

$$
PI^P \leq PI^L \leq PI^{Lowe}
$$

の関係があることがわかる。そして、相対価格の変動にトレンドがある場合は、

$$
PI^Y \leq PI^{Lowe}
$$

の関係がある。最後に、Young 指数と Laspeyres 指数の関係については、

$$
\begin{aligned}
PI^L - PI^Y &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} \right) (s_{i0} - s_{ib}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}} - PI^Y \right) (s_{i0} - s_{ib})
\end{aligned}
$$

この大小はこれまでのようには明確にならない。通常、b 時点は 0 時点よりも前に設定されている。もしも相対価格にトレンドがあり、価格弾力性が 1 以下、すなわち価格上昇が支出シェアを増加させなるならば、上記の関係式は正、すなわち Young 指数は Laspeyres よりも大きくなるだろう。これは、例えば 2000 年を基準とする公式 CPI で、2001 年から 2002 年までの物価指数を計算する時には、必需品に関しては Laspeyres 指数よりも大きくなっている可能性が高いことを意味している。

[*1] Huagn, N. , W. Wimalaratne, and B.Pllard (2015) “ Choice of index number formula and the upper-level substitution bias in the Canadian CPI,” 14th Otawa Group Meeting はカナダのデータを用い、実際に Lowe 指数が Young 指数よりも高くなる傾向にあることを示している。

1.2 Stuvel 指数

Factor Reversal、すなわち数量指数と価格指数が数量と価格ベクトルに関して対象に定義され、さらに乗じると Value Index になる、という公理、あるいは要請は非常に厳しく、Fisher 指数が数多い指数の中で望ましいと言われる最大の要因である。Stuvel (1957)[*2]は、Factor Reversal を重視し、Fisher とは異なるアプローチを提唱した。

まず、i 財のレベルで考える。t 期での i 財への支出額を v_{it} とすると、

$$v_{it} = p_{it} q_{it}$$

となる。支出額の変分は

$$\begin{aligned} \Delta v_{it} &= v_{it} - v_{i0} \\ &= p_{it} q_{it} - p_{i0} q_{i0} \\ &= p_{i0} q_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - p_{i0} q_{i0} \\ &= v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0} \\ &= v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0} + v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) - v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \\ &= v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1\right) + v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1\right) \end{aligned} \tag{1}$$

と書くことができる。また、価格と数量を逆にして

$$\begin{aligned} \Delta v_{it} &= v_{it} - v_{i0} \\ &= v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0} \\ &= v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0} + v_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) - v_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) \\ &= v_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1\right) + v_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1\right) \end{aligned} \tag{2}$$

とも書くことができる。すなわち、同じ値をとるべき下記の二式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta v_{it} &= v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1\right) + v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1\right) \\ &= v_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right) \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1\right) + v_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1\right) \end{aligned}$$

[*2] Stuvel (1957) "A New Index Number Formula" *Econometrica*, Vol. 25, No. 1, pp. 123-131

Stuvel は、この両式の単純平均をとり

$$
\begin{aligned}
\Delta v_{it} &= \frac{1}{2}\left(v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)+v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)\right)+\frac{1}{2}\left(v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right)\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)+v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)+\frac{1}{2}v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}\right)\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)+\frac{1}{2}v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)+\frac{1}{2}v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right) \\
&= \frac{1}{2}v_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}+1\right)+\frac{1}{2}v_{i0}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right)\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}+1\right) \\
&= A_i + B_i \\
A_i &= v_{i0}\frac{\frac{p_{it}}{p_{i0}}+1}{2}\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-1\right) \\
B_i &= v_{i0}\frac{\frac{q_{it}}{q_{i0}}+1}{2}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-1\right)
\end{aligned}
$$

という式を導出する。Stuvel は A_i は数量変化が引き起こす平均的な支出額の変化であり、B_i は価格変化が引き起こす平均的な支出額変化と解釈している。もしも数量に変化がなければ A_i はゼロであり、価格に変化がなければ B_i がゼロになるためである。A_i 及び B_i がゼロであることは、数量もしくは価格に変化があることの必要十分条件となっている。

これを i に関して集計すると、

$$\sum_{i=0}^{n}\Delta v_{it}=\sum_{i=0}^{n}A_i+\sum_{i=0}^{n}B_i$$

$V_0=\sum_{i=0}^{n}v_{i0}$、$A=\sum_{i=0}^{n}A_i, B=\sum_{i=0}^{n}B_i$ とすると

$$V_1-V_0=A+B$$

となる。Stuvel は、望ましい物価指数 PI と数量指数 QI は A_i と B_i の定義式のアナロジーで

$$
\begin{aligned}
A &= V_0\frac{PI+1}{2}(QI-1) \\
B &= V_0\frac{QI+1}{2}(PI-1)
\end{aligned}
$$

をみたすものと定義する。問題は、この関係式をみたす PI と QI を見つけることである。両式を足すと

$$
\begin{aligned}
A+B &= V_0\frac{PI+1}{2}(QI-1)+V_0\frac{QI+1}{2}(PI-1) \\
&= V_0\frac{PI+1}{2}QI-V_0\frac{PI+1}{2}+V_0\frac{QI+1}{2}PI-V_0\frac{QI+1}{2} \\
&= \left(\frac{V_0}{2}\right)(PI\times QI+QI-PI-1+QI\times PI+PI-QI-1) \\
&= \left(\frac{V_0}{2}\right)(2PIQI-2) \\
&= V_0(PIQI-1)
\end{aligned}
$$

両式の差をとると、

$$
\begin{aligned}
A - B &= V_0 \frac{PI + 1}{2} (QI - 1) - V_0 \frac{QI + 1}{2} (PI - 1) \\
&= \left(\frac{V_0}{2} \right) (PI \times QI + QI - PI - 1 - QI \times PI - PI + QI + 1) \\
&= V_0 (QI - PI)
\end{aligned}
$$

さらに、

$$
\begin{aligned}
V_1 - V_0 &= A + B \\
&= V_0 (PI \times QI - 1) \\
&= V_0 PI \times QI - V_0
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
PIQI = \frac{V_1}{V_0}
$$

が成立する。これは、物価指数と数量指数を乗じると Value Index になることを示しており、望ましい性質である。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
A - B &= V_0 \left(QI - \frac{1}{QI} \frac{V_1}{V_0} \right) \\
&= V_0 QI - \frac{V_1}{QI}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
(A - B) QI = V_0 QI^2 - V_1
$$

$$
QI^2 + (B - A) \frac{QI}{V_0} - \frac{V_1}{V_0} = 0
$$

これは数量指数に関する二次方程式であり、非負の階は

$$
QI = \frac{A - B}{2V_0} + \sqrt{\left(\frac{(B - A)}{2V_0} \right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}
$$

同様に物価指数も導出可能であり、

$$
PI = \frac{B - A}{2V_0} + \sqrt{\left(\frac{(B - A)}{2V_0} \right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}
$$

残るは A と B である。

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=0}^{n} v_{i0} \frac{\frac{p_{it}}{p_{i0}} + 1}{2} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{n} v_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} + 1 \right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{n} p_{i0} q_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} + 1 \right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - 1 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{n} (p_{it} + p_{i0}) (q_{it} - q_{i0})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{i=0}^{n} v_{i0} \frac{\frac{q_{it}}{q_{i0}} + 1}{2} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{n} v_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} + 1 \right) \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{n} p_{i0} q_{i0} \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} + 1 \right) \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - 1 \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{n} (q_{it} + q_{i0}) (p_{it} - p_{i0})
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\frac{A - B}{V_0} &= \left(\frac{1}{2V_0} \right) \sum_{i=0}^{n} \left((p_{it} + p_{i0}) (q_{it} - q_{i0}) - (q_{it} + q_{i0}) (p_{it} - p_{i0}) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2V_0} \right) \sum_{i=0}^{n} (-2 p_{it} q_{i0} + 2 p_{i0} q_{it}) \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n} p_{i0} q_{it}}{\sum_{i=0}^{n} p_{i0} q_{i0}} - \frac{\sum_{i=0}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=0}^{n} p_{i0} q_{i0}} = QI^L - PI^L
\end{aligned}
$$

すなわち、Laspeyres の数量指数と物価指数の引き算に等しい。したがって、Stuvel の数量・物価指数は下記のようになる。

$$
\begin{aligned}
QI^{SV} &= \frac{QI^L - PI^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{QI^L - PI^L}{2} \right)^2 + \frac{V_1}{V_0}} \\
PI^{SV} &= \frac{PI^L - QI^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{QI^L - PI^L}{2} \right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}
\end{aligned}
$$

Nomura and Samuels (2003) は日米間の賃金の違いを様々な指数算式を用いて (アメリカを基準としている) 計算しており、その中には Stuvel 指数も含まれている。

彼らの計算結果を見る限り、Stuvel 指数は Tornqvist や Fisher とよく似た動きをしているが、違いもまた存在している。Stuvel 指数が他の指数とどのような関係にあるかは明示的な結果は知られていない。

さて、Stuvel 物価指数をみると、Laspeyres 物価・数量指数と Value Index の関数となっているが、なぜこれが物価指数と解釈できるのかはっきりしない。まず全ての価格が二期間でまったく変わっていないときのことを考えよう。このとき、当然ながら $PI^L = PI^P = 1$ となり、Value Index は QI^L に等しくなる。した

Table. 4 Comparison of Indices for Relative Price

	1960	1970	1980	1985	1990	1995	2000
Theil-Törnqvist	0.139	0.246	0.581	0.498	0.797	1.289	0.973
Laspeyres	0.158	0.257	0.595	0.506	0.806	1.300	0.983
Paasche	0.127	0.236	0.567	0.488	0.785	1.272	0.960
Fisher	0.140	0.246	0.581	0.497	0.795	1.286	0.972
Stuvel	0.131	0.242	0.580	0.496	0.797	1.291	0.975
Simple	0.116	0.220	0.563	0.478	0.762	1.203	0.917

図 1　Nomura and Samuels (2003) より

がって、

$$
\begin{aligned}
PI^{SV} &= \frac{1-QI^L}{2} + \sqrt{\left(\frac{QI^L-1}{2}\right)^2 + QI^L} \\
&= \frac{1-QI^L}{2} + \sqrt{\frac{QI^{L2}+2QL+1}{4}} \\
&= \frac{1-QI^L}{2} + \frac{1+QI^L}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となり、恒等性 (Identity) を満たすことがわかる。次に、比較時の価格が基準時に比べ上昇し、しかし数量は全く変わらないとしよう。このとき、$QI^L = QI^P = 1$ となる。したがって、Value Index は PI^L に一致する。すなわち、

$$
\begin{aligned}
PI^{SV} &= \frac{PI^L-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-PI^L}{2}\right)^2 + PI^L} \\
&= \frac{PI^L-1}{2} + \frac{1+PI^L}{2} \\
&= PI^L
\end{aligned}
$$

よって、これは比較時価格の上昇関数、基準時価格の減少関数であり、単調性 (Monotonicity) を満たす。次に、Stuvel 物価・数量指数は Laspeyres 物価・数量指数と Value Index のみの関数であり、両者は次元性 (Dimensionality)、および位無差別性 (Commensurability) を満たす。すなわち、Stuvel 物価指数や数量指数は各指数が満たすべき望ましい性質をかなり兼ね備えていることがわかる。さらに、Fisher 指数の最大の利点であった要素転逆 (反転性、Factor Reversal) を満たすことも明らかである。これがゆえに、Stuvel は自ら

の指数に自信を持ち、1989 年には刺激的なタイトルの本を出版し、自らの指数の宣伝を行っている[*3]。しかしながら、やはりこの物価指数は、Laspeyres や Fisher と異なり、直感的にその性質を理解するのが難しい。Vogt(1981)[*4]は下記のような性質を指摘している。

まず、Stuvel の数量指数と物価指数の引き算をとると、

$$PI^{SV} - QI^{SV} = PI^L - QI^L$$
$$QI^L - QI^{SV} = PI^L - PI^{SV}$$

となる。すなわち、Laspeyres 数量、物価指数との差が等しいという性質がある。この $QI^L - QI = PI^L - PI$ と Factor Reversal、すなわち、$PI \times QI = V_1/V_0$ をみたす PI と QI を考えてみよう。PI を消去すると、

$$PI = QI + PI^L - QI^L$$
$$QI\left(QI + PI^L - QI^L\right) = V_1/V_0$$
$$QI^2 + (PI^L - QI^L)QI - V_1/V_0 = 0$$

最後の二次方程式の非負の解は

$$QI = \frac{(QI^L - PI^L)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(QI^L - PI^L)}{2}\right)^2 + \frac{V_1}{V_0}}$$

となり、Stuvel 数量指数と一致する。同様に Stuvel 物価指数も導出可能である。すなわち、Stuvel の物価・数量指数は Factor Reversal を満たし、かつ、Laspeyres 数量および価格指数とのかい離の大きさが等しい指数と定義することも可能である。ある指数が、Laspeyres を基準として、そこからのかい離の幅が数量と価格のいずれも同じ程度のものであるような、そして数量と価格指数がうまく定義されているような指数が Stuvel 指数であるということができる。

Stuvel 指数が他の指数と大きく異なるのは、議論の出発点を変化率でなく、変化量、$\Delta v_{it} = v_{it} - v_{i0}$ にしている点にある。支出変化の割合ではなく、の絶対額の変分である。そしして、支出の変化を価格変化によるものと数量変化によるものの二つの和、$V_1 - V_0 = A + B$ と、A を価格変化によもの、B を数量変化によるもの、と解釈するのである。支出総額の変化を加法で分解するとした場合、確かに Stuvel 指数は自然な方法である。(1) と (2) の単純平均をとっている点は不自然であるが、それを加重平均として一般化することは容易である。また、その場合、(1) のみを用いると Laspeyres に、(2) のみを用いると Paasche に、そして様々な Weight を用いると、Fisher 指数などと同じになることが知られている[*5]。Stuvel 指数は、指数が満たすべき多くの公理を満たす[*6]。しかしながら、Stuvel 指数の最大の欠点としてよく指摘されるのが、linear Homogeneity を満たさないことである。これは、価格ベクトルに関して線形になっていないことから明らかである。また、数学的には望ましい性質を有するとしても、Stuvel 指数の直感的な解釈が非常に困難であることも普及の大きな妨げとなっている。Stuvel(1957) は、その指数が Laspeyres および Value Index という、経済学的解釈が非常に明快な変数のみに依存していることを強調しているが、なぜ平方根なのか、数学の展開なしにその意味を理解することは困難である。Paashce や Fisher 物価指数は、数量が基準時よりも大きく変化すると、物価指数の値も大きく変化する。その意味では、物価指数は価格のみでなく、数量の変化の関数で

[*3] G.Stuvel (1989) *The Index Number Problem and Its Solution*, Intl Specialized Book Service, Inc.
[*4] A. Vogt (1981) “Characteizations of Indices, Especially of the Stuvel and the Banerjee Index,” *Statistishce Hefte* 21, 66-71.
[*5] 興味があるものは Lippe (2007) の p.157 を参照せよ。
[*6] Circularity、循環性もみたす、とする論文もときおり見かけるが、おそらく間違いである。

もある。としたら、Stuvel 物価指数が数量指数に依存していることも、それほど不自然なことではないかもしれない。Value Index の変化を下方に分解するという点では非常に優れており、かつ多くの公理をみたしている点では注目に値するが、直感にアピールしないこと、および Linear Homogeneity を満たさないことからも 1960 年以降の指数理論の展開においては、Stuvel 指数はほとんど議論されることはなかった。

しかしながら、Stuvel 指数に対する関心は近年復活しつつある。Balk (1997)*7は、GDP 等の多くのカテゴリーを含む指数を念頭におき下記の三要件をまず挙げる。

(1) 各カテゴリーにおける物価指数と数量指数の積は Value Index に等しくなければならない (Factor Reversal)

(2) カテゴリー毎に計算し、そのうえで集計した場合と、全てを Pool して集計した場合で、その値は一致しなければならない。

(3) もしも全てのカテゴリーにおける値が同じであれば、総合値も同じにならねばならない。

そして、Balk (1997) は、これら三つの性質を同時にみたすのは Stuvel 指数しかないことを証明している。なお、Fisher 指数は (2) を満たさない。すなわち、サブカテゴリーに関して Fisher 指数を計算し、第二段階でサブカテゴリーへの支出総額や Fisher 指数を変数としても、総合での Fisher 指数を得ることはできない。Laspeyres や Paasche 指数、及び Stuvel 指数はこの性質をみたす (無論、Laspeyres と Paashce は Factor Reversal を満たさない)。非常に多様な商品を含む指数を作成する際には、そして Factor Reversal が重要である場合 (マクロ経済学では往々にしてとても重要である) は、Stuvel 指数は一考の価値があると思われる。近年では、POS データなど多くの価格、数量情報が利用可能になり、コンピューターの計算能力も飛躍的に向上しているため、一つの指数ではなく、様々な指数を計算し比較されることは珍しくない。実際、Fisher や Walsh と並び、Stuvel 指数の計算結果も報告されることもある*8。特に、国民経済計算等、集計性という性質を重視する場合は、Stuvel 指数や Varita I 等の集計性を有する指数は魅力的なものだろう。とはいえ、一次同次性をみたさない Stuvel 指数は、けっして利用しやすいものではない。集計可能性および要素反転性という性質をどこまで重視するかにより、本指数の評価は大きく変わることになる。

*7 B.M. Balk (1997) “CONSISTENCY-IN-AGGREGATIONAND STUVEL INDICES”,*Review of Income & Wealth*, 42, 3, pp.353-363.

*8 Koji Nomura and Jon D. Samuels (2003) “Wage Differentials and Structure in the U.S. and Japan, 1960–2000 — Purchasing Power Parities for Labor Input”等