2019年地域経済各論日本
講義ノート(4)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成31年10月17日

概 要

公理アプローチ 2 標準的物価指数の公理的アプローチ

1 数量・価格の両方に依存する場合の物価指数理論

本講義ノートでは、Laspeyres や Fisher 等の、標準的な物価指数、すなわち、購入数量の情報にも依存する物価指数に対する公理的 (テスト) アプローチについて説明する。今回の内容は、指数理論における公理的アプローチの到達点の一つである、Irving Fisher が提示したいくつかの公理 (テスト) の整合性 (一致性) および Fisher 指数の公理的特徴を明らかにすることを目標とする。前回と同様、証明の多くは Eichhorn and Voeller (1976) に依拠しているが、一部、Diewert (1992)、消費者物価指数マニュアルや Lippe (2007) も参照している。

講義ノート (3) と同様、物価指数を関数とみなしたときの変数、今回は価格と数量、は厳密に正の実数値をとると仮定する。すなわち、マイナスやゼロの価格、数量は想定しない。財空間は時間を通じて一定であり、財の種類は n 個で固定されているとする。

2 基本公理

前回同様、物価指数が満たすべき、最も基本的な公理を導入する。まず、物価指数となる関数、すなわち、二期間の数量と価格に依存する正の実数値をとる関数

$$PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$$
$$(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \to PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$$

を考える。

- (B-1)　単調性

  PI は、$\mathbf{p}_1$ に関して厳密に増加関数、$\mathbf{p}_0$ に関して厳密に減少関数、すなわち、

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) > PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}) \ \ if \ \mathbf{p}_1 \geq \mathbf{p}$$
$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) < PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \ \ if \ \mathbf{p}_0 \geq \mathbf{p}$$

  ただし、$\mathbf{p}_1 \geq \mathbf{p}$ は $\mathbf{p}_0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_n^0\right), \mathbf{p}_1 = \left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1\right)$ とした時、すべての i に関して $p_i^1 \geq p_i^0$ で、少なくとも一つの i に関して、$p_i^1 > p_i^0$ が成立する状況を示している。

- (B-2)　一次同次性

  $\mathbf{p}_1$ が正の実数値で λ 倍された場合、PI の値も λ 倍となる、すなわち、

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \lambda\mathbf{p}_1) = \lambda PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \quad \text{for } \forall\ \lambda \in \mathbf{R}_{++}$$

- (B-3)　恒等性

  全ての価格が一定であれば、数量の水準に依存せず、PI は 1 になる、すなわち、

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0) = \mathbf{1}$$

- (B-4)　次元性

  通貨単位の変更は、物価に影響を与えない、すなわち、

$$PI(\mathbf{q}_0, \lambda\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \lambda\mathbf{p}_1) = PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \quad \text{for } \forall\lambda \in \mathbf{R}_{++}$$

- (B-5)　位無差別性 (通約可能性、単位変換性、Commensurability)

  数量単位の変更は物価に影響を与えない、すなわち、数量単位を λ_i 倍し、価格を $1/\lambda_i$ 倍 ($p'q$ は不変) しても物価は変わらない。すなわち、

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}_{++}^n, , \upsilon = \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\right) \in \mathbf{R}_{++}^n$$
$$PI(\lambda'\mathbf{q}_0, \upsilon'\mathbf{p}_0, \lambda'\mathbf{q}_1, \upsilon'\mathbf{p}_1) = PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$$

前回と同様に、これら五つの公理は互いに独立、すなわち、一つを除きほかの四つの公理のみを満たす指数が存在する。

定理 1 公理 *(B-1)* から *(B-5)* まではそれぞれ互いに独立である。

証明

- 単調性をみたさず、ほかを満たす例　(前回の講義ノート同一である)

$$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}\right)^{\alpha 2}\left(\frac{p_{3,1}}{p_{3,0}}\right)^{\alpha 3}\cdots\left(\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)^{\alpha n}$$
$$\alpha_1 < 0, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n > 0, \sum \alpha_i = 1$$

- 一次同次性をみたさず、ほかは満たす例

$$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \sqrt{\frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}}$$

- 恒等性のみを満たさない例

$$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \frac{\mathbf{q}'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}$$
$$\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_0$$

- 次元性のみを満たさない例・

$$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0 + 1}\frac{1}{n}\times\sum\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} + \frac{1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{P}_0 + 1}\max\left[\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}..., \frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right]$$

すべての価格が 0 期と 1 期で同一なら、

$$\begin{aligned} PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0\right) &= \frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0 + 1}\frac{1}{n}\times n + \frac{1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{P}_0 + 1} \\ &= \frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0 + 1} + \frac{1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{P}_0 + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\mathbf{p}_1$ が λ 倍されると、

$$\begin{aligned}PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\lambda\mathbf{p}_1\right) &= \frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0+1}\frac{1}{n}\times\sum\frac{\lambda p_{i,1}}{p_{i,0}}+\frac{1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{P}_0+1}\max\left[\frac{\lambda p_{1,1}}{p_{1,0}},\frac{\lambda p_{1,1}}{p_{1,0}}...,\lambda\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right]\\ &= \lambda\left(\frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0+1}\frac{1}{n}\times\sum\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}+\frac{1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{P}_0+1}\max\left[\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}},\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}...,\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right]\right)\end{aligned}$$

他は明らかであろう。

- 位無差別性のみを満たさない例

$$\begin{gathered}PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=\frac{\alpha'\mathbf{p}_1}{\alpha'\mathbf{p}_0},\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...\alpha_n>0\end{gathered}$$

無論、基本的な Lasypers, Paashce, Fisher 等の指数は上記の 5 公理をすべて満たしている。また、前回と同様、下記の性質がある。

定理 2 $PI_i, \quad (i=1,2,3.,,k)$ が *(B-1)* から *(B-5)* の *5* つの公理を満たすとする。このとき、下記の二つの物価指数もまた *(B-1)* から *(B-5)* の *5* つの公理を満たす。

$$\begin{aligned}PI\_1 &= \left(\alpha_1 PI_1^\delta+\alpha_2 PI_2^\delta+...+\alpha_k PI_k^\delta\right)^{1/\delta}\\ PI\_2 &= PI_1^{\alpha_1}PI_2^{\alpha_1}...PI_k^{\alpha_1}\\ \delta &\neq 0,\alpha_i\geq 0,\sum\alpha_i=1\end{aligned}$$

これは、5 つの基本公理をみたす指数があれば、そこから異なる物価指数で、基本公理をみたす指数を容易に作成可能であることを示している。さらに、5 つの公理を満たす指数は、下記の公理も満たす。

- (B-6)　もしも基準時価格が λ 倍された値が比較時点の価格であれば、指数の値は λ となる。すなわち、

$$PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\lambda\mathbf{p}_0\right)=\lambda$$

- (B-7) マイナス一次同次性

$$PI\left(\mathbf{q}_0,\lambda\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=\frac{1}{\lambda}PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)\quad for\quad\forall\lambda\in\mathbf{R}_{++}$$

- （B-8）中間値性
  物価指数 PI が与えられたとき、その値は、構成要素の価格変化率の最小値と最大値の間に存在する、すなわち、

  $$\min\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, ...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right) \leq PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) \leq \max\left(\frac{p_{1,1}}{p_{1,0}}, \frac{p_{2,1}}{p_{2,0}}, ...\frac{p_{n,1}}{p_{n,0}}\right)$$

  公理 (B-1), (B-2) および (B-3) をみたす PI は、前回の講義ノートと同様、中間値性をみたすことを示すことが可能である。

3 Fisher の公理体系

Fisher (1922) 以降、下記の公理体系が重視されてきた。これまでの公理と重複するが、Fisher の公理体系として新たに定義する。

- (T-1) 比例性 (B-6)
- (T-1') 弱い比例性 もしも数量が変化しない場合、基準時価格が λ 倍された値が比較時点の価格であれば、指数の値は λ となる。すなわち,

  $$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \lambda\mathbf{p}_0\right) = \lambda$$

- (T-2) 循環性 (推移性) 時間が 0,1,2 と 3 時点あるとする。無論、時間の流れは数値の大きさ通り、0<1<2 である。このとき、

  $$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) PI\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right) = PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right)$$

- (T-2') 基準性
  価格と数量の組み合わせが $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \rightarrow (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \rightarrow (\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$ と変化したとき、下記をみたす関数 R が存在する。

  $$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) R\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right) = PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right)$$
  $$R\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) PI\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right) = PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right)$$

- (T-3) 決定性
  PI の構成要素のうちの任意の一つがゼロに収束する場合、PI はある特定の正の実数値に収束する。
- (T-4) 位無差別性 (B-5)
- (T-5) 要素転逆性、要素反転性 (Factor Reversal)
  価格と数量を入れ替えた場合、価格指数と数量指数も入れ替わり、その積は Value Index と一致する。すなわち、

  $$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) PI\left(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1\right) = \frac{\mathbf{q}_1'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}$$

これは、価格と数量が対称に扱われていることを意味する。

- (T-5')　乗法性

  数量指数 $QI:\mathbf{R}^{4n}_{++}\to\mathbf{R}_{++}$ が存在し、下記をみたす

$$PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)QI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)=\frac{\mathbf{q}_1'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}$$

(T-1) は (T-1') の、(T-2) は (T-2') の、そして (T-5) は (T-5') の十分条件となっている。しかし必要十分ではない。例えば、Value Index、$\frac{\mathbf{q}_1'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0}$ は (T-1') を満たすが、(T-1) は満たさない。

定理 3 *PI が (T-1') と (T-2') を満たす場合、(T-2) も満たされる。*

証明
(T-2') より

$$PI\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right)=\frac{PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right)}{R\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)}$$

さらに、g,h を

$$\begin{aligned}PI\left(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right)&=g\left(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right),\\ R\left(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)&=\mathbf{h}\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)\end{aligned}$$

と定義する。すると、

$$PI\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right)=\frac{g\left(\mathbf{q_2},\mathbf{p}_2\right)}{\mathbf{h}\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)}$$

ここで、PI が (T-1') も満たすなら、

$$PI\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1,\lambda\mathbf{p}_1\right)=\frac{g\left(\mathbf{q}_1,\lambda\mathbf{p}_1\right)}{\mathbf{h}\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)}=\lambda$$

したがって、$\lambda=1$ とすると、関数 g は常に h と等しくなる。したがって、

$$\begin{aligned}PI\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right)&=\frac{g\left(\mathbf{q_2},\mathbf{p}_2\right)}{\mathbf{h}\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)}\\&=\frac{g\left(\mathbf{q_2},\mathbf{p}_2\right)}{\mathbf{g}\left(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)}\\&=\frac{PI\left(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right)}{PI\left(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)}\\&=\frac{PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2\right)}{PI\left(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1\right)}\end{aligned}$$

これは (T-2) である。

3.1 Fisher の不一致性

公理の集合

$F = ((T-1),)\,(T-1'),(T-2),(T-2'),(T-3),(T-4),(T-5),(T-5'))$

を考える。もしも、この F の部分集合、$F^* \subset F$ をすべて満たすような関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ が果たして存在するのかどうか、が大きな問題となる。もしもそのような関数が存在しないような公理の組み合わせがあれば、そのような公理アプローチは失敗することになる。

定理 4 公理 *(T-1), (T-2)* および *(T-5')* を同時にみたす関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ は存在しない

証明　4 期間、$(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0) \to (\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1) \to (\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2) \to (\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3)$ を考える。さらに、

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3, \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3$$

とする。もしも関数 PI に (T-1) が成立しているなら、

$$PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2) = PI\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3) = 1,$$
$$QI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1) = QI\,(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3) = 1$$

さらに、(T-5') を満たすならば、

$$PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)\,QI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1) = PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1) = \frac{\mathbf{q}_1'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0} = \frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_3}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0},$$
$$PI\,(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3)\,QI\,(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3) = PI\,(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3) = \frac{\mathbf{q}_3'\mathbf{p}_3}{\mathbf{q}_2'\mathbf{p}_2} = \frac{\mathbf{q}_3'\mathbf{p}_3}{\mathbf{q}_3'\mathbf{p}_0}$$

もしも (T-2) を満たすならば、

$$PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)\,PI\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3) = PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2)\,PI\,(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3)$$

ところで、$PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2) = PI\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3) = 1$ だから、$PI\,(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3) = PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)$

したがって、

$$PI\,(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1) = PI\,(\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{p}_3)$$
$$\frac{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_3}{\mathbf{q}_0'\mathbf{p}_0} = \frac{\mathbf{q}_3'\mathbf{p}_3}{\mathbf{q}_3'\mathbf{p}_0}$$

ところが、$\mathbf{q}_0$ と $\mathbf{q}_3$、$\mathbf{p}_0$ と $\mathbf{p}_3$ は正の実数値をとる任意の n 次元ベクトルであり、上式は成立しないように選ぶことが可能である。これは矛盾であり、そのような関数 PI は存在しない。

もう一つ、重要な定理を紹介しておく。

定理 5 恒等性、循環性 *(T-2)* および要素反転性 *(T-5)* を同時にみたす関数 $PI:\mathbf{R}^{4n}_{++}\to\mathbf{R}_{++}$ は存在しない

証明: 循環性が成立していれば 1 期から 0 期、さらに 0 期から 2 期に移行することを考えると、

$$PI(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0)\,PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2)=PI(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2)$$
$$PI(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0)=\frac{PI(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2)}{PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2)}$$

この左辺は 2 期の情報に依存していないため、

$$PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)=\frac{g(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)}{g(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0)}$$
$$g(x,y)=PI(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2)$$

と書くことが可能になる。恒等性が成立しているため、

$$\begin{aligned}PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_0)&=\frac{g(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_0)}{g(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0)}\\&=1\end{aligned}$$
$$g(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_0)=g(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0)$$

これは任意の $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_0$ に関して成立するので

$$g(p,x)=h(p)$$

と書くことが可能である。したがって、

$$PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)=\frac{h(\mathbf{p}_1)}{h(\mathbf{p}_0)}$$

ここで、要素反転性が成立していると、

$$\frac{h(\mathbf{p}_1)}{h(\mathbf{p}_0)}\frac{h(\mathbf{q}_1)}{h(\mathbf{q}_0)}=\frac{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{q}_1}{\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{q}_0}$$

したがって、

$$\begin{aligned}h(\mathbf{p}_1)\,h(\mathbf{q}_1)&=h(\mathbf{p}_0)\,h(\mathbf{q}_0)\times\frac{\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{q}_1}{\mathbf{p}_0\cdot\mathbf{q}_0}\\&=b\times\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{q}_1\end{aligned}$$

b は任意の正の値をとりうる。ここで、$h(1_n)=\alpha$ としよう。このとき、価格と数量がすべて 1 であるとすると、、

$$\begin{aligned}h(\mathbf{p}_1)&=b\times\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{q}_1\frac{1}{\alpha}\\&=b\times\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{1}_n\frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

$$h(\mathbf{q}_1) = b \times \mathbf{1}_n \cdot \mathbf{q}_1 \frac{1}{\alpha}$$

これを $h(\mathbf{p}_1)\,h(\mathbf{q}_1) = b \times \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1$ に代入すると

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}_1)\,h(\mathbf{q}_1) &= b \times \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{1}_n \frac{1}{\alpha} \times \left(b \times \mathbf{1}_n \cdot \mathbf{q}_1 \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \frac{b^2}{\alpha^2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{1}_n) \times (\mathbf{1}_n \cdot \mathbf{q}_1) \\ &= b \times \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1 \end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{\alpha^2} (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{1}_n) \times (\mathbf{1}_n \cdot \mathbf{q}_1) &= \frac{b^2}{\alpha^2} \left(\sum \mathbf{p}_{1i} \right) \times \left(\sum \mathbf{q}_{1i} \right) \\ &= b \times \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1 \end{aligned}$$

したがって、、

$$\frac{b}{\alpha^2} \left(\sum \mathbf{p}_{1i} \right) \times \left(\sum \mathbf{q}_{1i} \right) = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1$$

これは $n \geq 2$ の時には一般に成立しない。

さらに、証明は省くが、下記のように、多くの同様の定理が成立する。証明に興味のあるものは、Eichhorn and Voeller (1976) を参照せよ。

定理 6 公理 *(T-1'), (T-2'), (T-3), (T-4)* および *(T-5')* を同時にみたす関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ は存在しない

定理 7 公理 *(T-1), (T-2), (T-3), (T-4)* を同時にみたす関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ は存在しない

定理 8 公理 *(T-1), (T-2'), (T-3), (T-4)* を同時にみたす関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ は存在しない

定理 9 公理 *(T-1), (T-2'), (T-5')* を同時にみたす関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ は存在しない

定理 10 公理 *(T-1), (T-2'), (T-5)* を同時にみたす関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ は存在しない

4 Fisher 指数

Laspeyres と Paashce の幾何平均である Fisher 指数は、(T-1), (T-3), (T-4), (T-5) を満たすが、(T-2) は満たさない。しかしながら、下記の定理が知られている。

定理 11 公理 *(T-5)* をみたす関数 $PI : \mathbf{R}_{++}^{4n} \to \mathbf{R}_{++}$ が、

$$\frac{PI(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)}{PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)} = \frac{Laspeyre's\ Quantity\ Index}{Laspeyre's\ Price\ Index}$$

をみたすための必要十分条件は、PI が *Fisher* 指数であることである。
証明は簡単であり省略する。

Diewert (1992)[1]は、さらに下記の公理を追加した。

- (T-6) 基準時点価格における-1 次同次性

$$(B-7)$$

- (T-7) 比較時点での数量の比例変化の無効性

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \lambda\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) = PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \quad \text{for } \forall\ \lambda \in \mathbf{R}_{++}$$

- (T-8) 基準時点での数量の比例変化の無効性

$$PI(\lambda\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) = PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) \quad \text{for } \forall\ \lambda \in \mathbf{R}_{++}$$

- (T-9) 財反転性　財の並べ方を変えても、指数の値は変化しない

$$PI(\widetilde{\mathbf{q}_0}, \widetilde{\mathbf{p}_0}, \widetilde{\mathbf{q}_1}, \widetilde{\mathbf{p}_1}) = PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$$

- (T-10)　時間反転性

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) = \frac{1}{PI(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)}$$

- (T-11)　数量反転性

$$PI(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) = PI(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1)$$

これは、数量を基準時と比較時で入れ替えても物価指数に影響は与えないというものであり、経済学的にはなかなか正当化をすることは難しい。これは、物価指数算式において、二時点間の数量は対称に入っていることを意味する。当然 Laspeyres と Paasche 物価指数は満たさないし、Törnqvist 物価指数も支出額が変化してしまうため満たさない。一方、Walsh と Marshall-Edgeworth 指数は満たす。

[1]Diewert, W.E. (1992)“Fisher Ideal Output, Input, and Productivity Indexes Revisited” Journal of Productivity Analysis, Vol.3., No. 3. pp. 211-248.

- (T-12)　価格反転性

$$\frac{\mathbf{q}_1{}'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0{}'\mathbf{p}_0 \times PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right)} = \frac{\mathbf{q}_1{}'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0{}'\mathbf{p}_1 \times PI\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0\right)}$$

これは、数量指数 QI における価格反転性とみなすことができる、すなわち、

$$QI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = QI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0\right)$$

- (T-13)　中間値性

$$(B-8)$$

- (T-14)　数量に関する中間値性
数量指数 QI が与えられたとき、その値は、構成要素の価格変化率の最小値と最大値の間に存在する、すなわち、

$$\min\left(\frac{q_{1,1}}{q_{1,0}}, \frac{q_{2,1}}{q_{2,0}}, \ldots \frac{q_{n,1}}{q_{n,0}}\right) \leq QI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) \leq \max\left(\frac{q_{1,1}}{q_{1,0}}, \frac{q_{2,1}}{q_{2,0}}, \ldots \frac{q_{n,1}}{q_{n,0}}\right)$$

- (T-15)　Paashce-Laspeyres による上下限性

$$\frac{\mathbf{q}_1{}'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_1{}'\mathbf{p}_0} \leq PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) \leq \frac{\mathbf{q}_0{}'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0{}'\mathbf{p}_0}$$

- (T-16)　数量指数における単調性

PI は、$\mathbf{q}_1$ に関して厳密に増加関数、$\mathbf{q}_0$ に関して厳密に減少関数、すなわち、

$$QI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) > QI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}, \mathbf{p}_1\right) \;\; if \;\; \mathbf{q}_1 \geq \mathbf{q}$$
$$QI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) < QI\left(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) \;\; if \;\; \mathbf{q}_0 \geq \mathbf{q}$$

定理 12 *Diewert (1992)*　公理 *(T-1), (T–3)-(T-16)* を満たす関数 $PI : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ は *Fisher* 指数のみである。

証明

Fisher 指数が指定された公理を満たすことは明らかである。必要性を示す。

価格反転性より、

$$\frac{\mathbf{q}_1{}'\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0{}'\mathbf{p}_0 \times PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right)} = \frac{\mathbf{q}_1{}'\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0{}'\mathbf{p}_1 \times PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0\right)}$$

$$\frac{\mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_1 \times \mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_0 \times \mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_0} = \frac{PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)}{PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_0)}$$

数量反転性より

$$\frac{\mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_1 \times \mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_0 \times \mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_0} = \frac{PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)}{PI(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0)}$$

時間反転性より

$$\frac{\mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_1 \times \mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_0 \times \mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_0} = PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)\,PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)$$

両辺の二乗根をとり整理すると、

$$\sqrt{\frac{\mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_0}}\sqrt{\frac{\mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_0}} = PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)$$

なお、

$$\sqrt{\frac{\mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_1\prime\mathbf{p}_0}} = \sqrt{Paashce \quad Index}$$
$$\sqrt{\frac{\mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0\prime\mathbf{p}_0}} = \sqrt{Laspeyres \quad Index}$$

である。証明終わり。

Diwert (1992) は、20 の公理をならべ、それらが Fisher 指数を導くための必要十分条件としている。実際に Fisher 指数を導くための最小の公理は、価格反転性、数量反転性及び時間反転性であり、20 の公理の中にはリダンダントなものが多く含まれている。Diewert (1992) の力点は、Fisher 指数が非常に多くの公理をみたすことを示すことにあり、確かに、ほかの指数、Tornqvist や Walsh 指数よりも多くの公理を Fisher 指数はみたす[2]。しかしながら、最大の問題は、公理 (T-2) の 循環性　$PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1)\,PI(\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2) = PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_2,\mathbf{p}_2)$ が成立しないことにある。Fisher (1922) は、循環性をあきらめ、そのかわりに反転性を導入したのである。

Balk (1995)[3]は、さらに下記の公理を導入している。

(T-17)　価値依存性　　下記をみたす関数 $f : \mathbf{R}^{4n}_{++} \to \mathbf{R}_{++}$ が存在する。

$$PI(\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0,\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1) = f(\mathbf{p}_0'\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_0'\mathbf{q}_1,\mathbf{p}_1'\mathbf{q}_0,\mathbf{p}_1'\mathbf{q}_1)$$

定理　物価指数 PI が一次同次 (B-2)、要素逆転性 (T-5) 及び価値依存性 (T-17) をみたす必要十分条件は、PI が Fisher 指数であることである。

証明は Balk (1995) を参照されたい。Balk(1995) はこの他にも、これまでに知られている Fisher 指数と同値となる公理の組み合わせを多数紹介している。

[2]他の指数と公理に関しては次の講義ノートで説明する予定である。

[3]詳しくは、Fisher 指数に関する素晴らしいサーベイ、Balk, B.M. (1995) “Price Index Theory: A Survey,” International Statistical Review Vol. 63, No. 1. pp.69-93. を参照せよ。

5 循環性の意義

定理 13 *Funke, Hacker, and Voeller (1979)*[4]、$PI : \mathbf{R}_{++}^{4n} \to \mathbf{R}_{++}$ で、単調性 *(B-1)*、一次同次性 *(B-2)*、恒等性 *(B-3)*、位無差別性 *(B-5)*、と循環性をみたすものは、下記のコブダグラス型、

$$PI\left(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^{\alpha_i}, \alpha_i > 0, \sum \alpha_i = 1$$

に限られる。

証明*:* オリジナルの *Funke* 達の証明は難解だが、*Balk(2008)* が容易な別証を示しているので、それに従う。循環性が成立していれば

$$PI\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \frac{PI\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0\right)}{PI\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0\right)}$$

この左辺は *0* 期の情報に依存していないため、

$$PI\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \frac{g\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right)}{g\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right)}$$
$$g\left(x, y\right) = PI\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0\right)$$

と書くことが可能になる。すると、

$$PI\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) = \frac{g\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2\right)}{g\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right)}$$

恒等性が成立しているため、

$$\begin{aligned} PI\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) &= \frac{g\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1\right)}{g\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right)} \\ &= 1 \\ g\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1\right) &= g\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1\right) \end{aligned}$$

これは任意の $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ に関して成立するので

$$g\left(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1\right) = g\left(\mathbf{p}_1\right)$$

と書くことができる。さらに、*Commensurability* を課すと、価格ベクトルにある正のベクトルを乗じても物価は変化しないため、

$$\frac{g\left(\Lambda \mathbf{p}_2\right)}{g\left(\Lambda \mathbf{p}_1\right)} = \frac{g\left(\mathbf{p}_2\right)}{g\left(\mathbf{p}_1\right)}$$

[4]Funke, H., G. Hacker, and J. Voeller (1979) "Fisher's Circular Test Reconsidered", *Swiss Journal of Economics and Statistics*, 115, IV, pp. 677-688.

ここで、価格に乗じる正のベクトルとして、$\left(\frac{1}{p_{11}}, \frac{1}{p_{21}}, ..., \frac{1}{p_{n1}}\right)$ を考えると、

$$
\begin{aligned}
\frac{g\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{g\left(1_n\right)} &= \frac{g\left(\mathbf{p}_2\right)}{g\left(\mathbf{p}_1\right)} \\
&= \frac{g\left(\mathbf{p}_2\right)/g\left(1_n\right)}{g\left(\mathbf{p}_1\right)/g\left(1_n\right)}
\end{aligned}
$$

ここで、関数

$$
h\left(p\right) = g\left(p\right)/g\left(1_n\right)
$$

を考えると、これは

$$
h\left(p_2/p_1\right) = h\left(p_2\right)/h\left(p_1\right)
$$

であることを示している。$Aczel$ の定理を用いると、この関数方程式を満たすのはコブダグラス型であることを示すことが可能である

コブダグラス型ということは、各商品価格変化率の (幾何平均の)Weight が時間を通じて一定であることを意味している。この結果は、循環性、あるいは推移性を物価指数に課した瞬間に、価格変化に伴う数量の変化、という経済学的な行動を反映することができなくなることを意味する。したがって、多くの指数論者は、循環性の公理を必要ないものとみなしている。しかしながら、それをみたす公式がほとんどないがゆえに意味がない、という理屈はどこまで説得的であろうか?為替レートに循環性、あるいは推移性がなければ、そこに裁定機会が残っていることを意味する。遠く離れた期間の物価を測る際、例えば江戸時代と平成の物価を測る際、両時代で共通する商品はほとんどない。しかしながら、江戸と明治、明治と大正、大正と昭和、昭和と平成、のように期間を分割すれば、それぞれの期間の物価は比較的高精度に計測できるとしたら、江戸時代と平成の物価は、それぞれのサブ期間の物価指数の掛け算で定義したくなるが、標準的な物価指数ではそれが不可能となっている。これができるようにするため、連鎖指数という概念が提案されている。連鎖指数については後の回で議論する。

循環性は、地域間の物価比較の際に特に問題となる。日本、アメリカ、イギリスの三か国の物価比較を考えよう。このとき、物価指数な循環性が成立しないということは、日本とアメリカの物価比率を計算し、アメリカが何パーセント日本に比べて割高かを調べ、次にアメリカとイギリスの物価比率を計算し、イギリスがアメリカに比べ何パーセントを割高かを計算したとして、その二つの割高率を足し合わせても日本とイギリスの割高率にならないことになる。時間の場合は、近い時間と遠い過去、遠い将来というように、距離の大小が明確であるが、国際比較の場合、近い国、遠い国という地理的情報に対した意味はなく、どの国を経由するかで物価指数の値が変化していくことは避けるべきであろう。このような視点から、国際比較の場合は循環性、あるいは推移性は

特に重視されており、それに対応した Geary-Kahmis や Elteto-Koves-Szulc 等の指数が考案されている。