2019年度一橋大学経済学研究科 地域経済各論日本講義ノート (2)

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成31年9月17日

概 要

基本指数算式の紹介

1 はじめに

代表的な物価指数で、今日でも公式統計で最も頻繁に採用されているのはLaspeyres指数であり、SNAでは連鎖のPaasche指数が用いられている。両者はいずれも19世紀に考案されたものであり、その後、多くの指数が提案され、両指数の問題点は繰り返し指摘されているものの、いまだ今日でも主流の立場は崩れていない。指数理論の大家、Yrjo Vartiaは、2018年の論文を次のような強烈な言葉で締めくくっている。

“Let us say farewell with thanks to the dear Laspeyres, which has been the prototype of decent index numbers. It has a number of good properties, but a single drawback: it is inaccurate.[1]”

このように言われているにかかわらず、なぜLaspeyres指数、およびそのカウンターパートとも言えるPaasche指数は、いまだに主流の指数なのであろうか?本講義ノートでは、両指数の及び、その幾何平均版のGeometric Laspeyres, Geometric Paasche指数について、その基本的な特徴を議論する。

2 Laspeyres指数とPaasche指数の基本

指数理論の最初として、学部教科書でも触れられており、最もよく用いられるLaspeyres指数とPaasche指数について復習し、その特徴をみてみよう

[1] Vartia, Yrjo and Suopera Antti (2018):“Contingently biased, permanently biased and excellent index numbers for complete micro data”,[Online] Accessedby http://www.stat.fi/static/media/uploads/meta_en/menetelmakehitystyo/contingently_biased_vartia_suopera_updated.pdf

まず、t 期における i 財の数量を q_{it}、価格を p_{it} とする。この時、t 期の総支出額は $\sum_i p_{it}q_{it}$ と表すことが出来る。0 期と t 期の総支出額の比は Value Index と呼ばれる。なお、特に説明がない場合、価格と数量はすべて正の値をとる実数であると仮定する (数量のゼロを除外することには実際上は非常に大きな問題であるがゼロからの変化率を求めることはできないので、ゼロを扱うためには追加の仮定が必要となる。また、負の価格は、産業廃棄物のような bads では生じうるものであるが、通常の消費者問題では頻繁に生じるものではないとここでは考える。Value Index は内積により下記のように記すことができる。

$$V_{0t} = \frac{\sum_i p_{it}q_{it}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}} = \frac{\mathbf{p}_t'\mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0'\mathbf{q}_0}$$

ここで、太字 $\mathbf{p}_t$ は $\mathbf{p}_t =(p_{i0}, p_{1t}, p_{2t}, ...p_{nt})$' の価格ベクトルであり、$\mathbf{p}_t'$ はその転値ベクトルである。Value Index は、下記のような価格比の加重平均として示すことも可能である。

$$V_{0t} = \sum_i w_{it}^* \frac{p_{it}}{p_{i0}},$$

$$w_{it}^* = \frac{p_{i0}q_{it}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}}$$

ただし、重み w_{it}^* は、分母と分子の数量の時期が異なるため、その総和は 1 にならない。総和が 1 になるなためには、数量を評価する時期を統一せねばならない。具体的には、数量から時間に関する subscript を除去し、

$$P_{0t} = \frac{\sum_i p_{it}q_i}{\sum_i p_{i0}q_i} = \frac{\mathbf{p}_t'\mathbf{q}}{\mathbf{p}_0'\mathbf{q}} = \sum_i w_i \frac{p_{it}}{p_{i0}}$$

$$w_i = \frac{p_{i0}q_i}{\sum_i p_{i0}q_i}, \sum_i w_i = 1$$

とする必要がある。数量の時期を 0 にしたとき、Laspeyres Index を得る。すなわち、

$$P_{0t}^L = \frac{\sum_i p_{it}q_{i0}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}}$$

一方、数量の時期を t にすると、Paashce Index、すなわち

$$P_{0t}^{P} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{it}}$$

を得る。通常、それぞれの指数を以下のように記される。

$$P_{0t}^{L} = \frac{\sum_i p_{it} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} = \sum_i \frac{p_{it}}{p_{i0}} \left(\frac{p_{i0} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} \right)$$

$$\left(P_{0t}^{P} \right)^{-1} = \sum_i \frac{p_{i0}}{p_{it}} \left(\frac{p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{it} q_{it}} \right)$$

もしくは

$$P_{0t}^{P} = \frac{1}{\sum_i \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right)^{-1} \left(\frac{p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{it} q_{it}} \right)}$$

Laspeyres Index は価格指数の加重平均、Paashce 指数は価格変化率の加重調和平均 (Harmonic Mean) となっている。

2.1 (復習) 調和平均

$x_1, x_2, ...x_n$ の単純調和平均 (Harmonic Mean) h は

$$\frac{n}{h} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n},$$
$$h = \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \right)}$$

で定義される。すなわち、逆数の平均の逆数である。この調和平均の解釈としてよく知られているのが、平均時速を求める問題である。例えば、100 キロメートル離れた目的地に向かうのに、行きは時速 100 キロの急行で、帰りが時速 200 キロの新幹線を使った場合の平均時速を求めてみよう。すると、所要時間は行きは 1 時間で、帰りは 30 分となる。一時間 30 分で 200 キロの道を行ったことになるので、平均時速は 133.33 キロである。これは、二つの速度の調和平均 2/((1/100) + (1/200)) と一致する。

一般に、x_1 と x_2 の調和平均を考えてみよう。すると、

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{2}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}\right)} \\
&= \frac{2x_1x_2}{x_2+x_1} \\
(x_2+x_1)\,h &= 2x_1x_2 \\
x_2h+x_1h &= 2x_1x_2 \\
x_2h-x_1x_2 &= x_1x_2-x_1h \\
x_2\,(h-x_1) &= x_1\,(x_2-h) \\
\text{もしも } x_1 &\neq x_2\text{なら} \\
\frac{x_2}{x_1} &= \frac{(x_2-h)}{(h-x_1)}
\end{aligned}
$$

すなわち、調和平均からのかい離値の比が、もとの比に等しいように作られている。

3 幾何 Laspeyres, Paasche 指数

上記の Laspeyres 及び Paasche 指数は価格比の加重算術平均、あるいは加重調和平均としてあらわすことが可能であった。Weight を基準時の支出シェアを用いるのが Laspeyres 指数である。ここで、算術平均ではなく、幾何平均を用いる下記の Geometric Laspeyres 指数を考えることが可能である。

$$
\begin{aligned}
PI^{GL} &= \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{w_{i0}}\,, \\
w_{i0} &= \frac{p_{i0}q_{i0}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}}.
\end{aligned}
$$

これに対応する Geometric Paasche 指数は

$$
\begin{aligned}
PI^{GP} &= \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{w_{it}}\,, \\
w_{it} &= \frac{p_{it}q_{it}}{\sum_i p_{it}q_{it}}
\end{aligned}
$$

である。

3.1 (復習) 幾何平均

$x_1, x_2, ...x_n$ の幾何平均 (Geometric Mean) とは

$$
\begin{aligned}
gm &= \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{1/n}
\end{aligned}
$$

である。幾何平均とよばれる理由は、二辺の長さが a と b である長方形と同じ面積の正方形の一片の長さはが幾何平均で与えられるためと言われている。幾何平均は経済学、特に動学分析と相性が良い。例えば、ある変数の年間成長率が一年目は 100% 、すなわち 2 倍。二年目は 50% 、すなわち 1.5 倍になったとする。この二年間の平均年間成長率を計算してみよう。算術平均だと、$(2+1.5)/2 = 3.5/2$ となる。しかし、実際の変数は、当初が 100 であれば、一年後に 200、二年後は 300 になっており、100 から 300 までの三倍になっている。すなわち、二年したら三倍になるような年間成長率は、$x^2 = 3$ すなわち、$x = \sqrt{3}$ である。一方、幾何平均をとると、$\sqrt{2 \times 1.5} = \sqrt{3}$。すなわち、複利計算が発生するような成長率の平均を計算する際には、幾何平均を用いるのが便利である。

3.2 基本不等式

幾何平均、算術平均、および調和平均の間には、

$$
\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i}\right)} \leq \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i
$$

が成立することが知られている。まず、

$$
\prod_{i=1}^{n} (x_i)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i
$$

を示してみよう。まず、準備として、

$$
e^x - 1 - x \geq 0
$$

を示す。1 次元実数空間上の関数 f を

$$
f(x) = e^x - 1 - x
$$

と定義すると、

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x - 1 \\
f'(x) &> 0 \quad \text{if } x > 0 \\
f'(x) &< 0 \text{ if } x < 0 \\
f'(0) &= 0 \\
f(0) &= 0
\end{aligned}
$$

　$x > 0$ の領域を考える。すると、

$$f'(x) > 0$$

なので、

$$f(x) > 0$$

が成立する。次に、$x < 0$ の領域を考えると、

$$f'(x) < 0$$

となり、x の単調減少関数となる。$f(0) = 0$ であるので、それよりも小さい x の時には、$f(x)$ は 0 より大きくなければならない。したがって、

$$f(x) > 0$$

　これは、

$$
\begin{aligned}
e^x - 1 - x &> 0 \quad \text{if } x \neq 0 \\
&= 0 \text{ if } x = 0
\end{aligned}
$$

　を示している。
　次に、

$$v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

と v を定義しよう。そして、

$$x = \frac{m_i}{v} - 1$$

とし、今示した不等式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\frac{m_i}{v} - 1\right) - \left(\frac{m_i}{v} - 1\right) - 1 &\geq 0 \\
\exp\left(\frac{m_i}{v} - 1\right) &\geq \frac{m_i}{v}
\end{aligned}
$$

これを $i=1,,,n$ に関して乗じていくと、

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i}{v}-1\right)\right)\geq\prod_{i=1}^{n}\frac{m_i}{v}$$

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i}{v}\right)-n\right)\geq\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}m_i}{v^n}$$

ところで、

$$v=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$$

であったから、

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i}{v}\right)-n\right)=1$$

したがって、

$$\prod_{i=1}^{n}m_i\leq v^n$$

$$\prod_{i=1}^{n}m_i^{1/n}\leq v$$

$$\prod_{i=1}^{n}m_i^{1/n}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$$

であり、この不等式を導くことが出来た。

次に、

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}\leq\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{1/n}$$

を示そう。これは簡単であり、先に示した不等式、

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

に対し、

$$m_i=\frac{1}{x_i}$$

とすると、

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

この逆数をとると、

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}\leq\frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{1/n}}$$

整理すると、

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leq \prod_{i=1}^{n}(x_i)^{1/n}$$

であり、　証明が終了した。

4　算術、調和平均に関する注意

一般に、あるベクトル $x = (x_{1,}x_2, ..., x_n)$ の平均に関しては、調和平均 ≦ 幾何平均 $\leq$ 算術平均、という関係があり、等号が成立するのは、x_i の値が全て等しいときに限定される。これは、指数算式に関してどういう意味があるだろうか?まず、全ての数量が 0 期と 1 期で変化がないとき、明らかに Paashce 指数と Laspeyres 指数は一致する。しかしながら、それを算術加重平均、あるいは算術調和平均の式に変換すると、ある財の価格比に対する Weight はその財の支出シェアであるため、価格が変化しても数量が一定の場合、その財の支出シェアは変化する。したがって、数量が変化しない場合、支出シェアの加重平均に変換した二つの物価指数は、異なる Weight、したがって異なるベクトルの平均値となってしまい、直接大小は比較できなくなってしまう。無論、数量が一定の場合は両指数は一致するが、これは算術平均や調和平均からの公式からは自明なものではない。

次に、価格が変化しても支出シェアが一定であると仮定しよう。この時、Laspeyre と Ppasche 両指数は同じ Weight となるため、上記の不等式が成立し、Paashce≤Laspeyres となる。価格が変化しても支出シェアが一定、すなわち選好がコブダグラス型であるとき、価格が下落した財の数量は増加し、逆に価格が上昇した財の数量は減少する。このような、価格と数量の間の負の相関を前提とすると、Paasche 指数は Laspeyres 指数よりも一般に小さくなる。これは、上記の不等式の結果と考えることも可能であるが、価格変化によらず支出シェアが一定となる、コブダグラス型の選好はかなり特殊なケースである。したがって、上記の不等式は、加重平均を前提におくと、実際の経済分析ではあまり意味をもたない。しかしながら、加重をともなわない、単純平均を考える場合、これは指数を計算する際、非常に小さい商品カテゴリーの指数を計算する際にはよく用いられる、上記の関係は常に念頭におく必要がある。

5　支出シェア公式の重要性

Laspeyres (1871) や Paasche (1874)、あるいは Drobisch (1871) のどこを探しても、指数算式を価格比の加重平均であらわす公式は出てこない。彼らが、この便利な変形について知っていた形跡はない。加重平均の発想は、古くは Fleetwood (1707) や Lowe (1823) にあるが、現代の起源になっているの

は、雑誌、*The Economist* の記者であった Sir Robert Harry Inglis Palgrave である[2]。彼は、下記の、今日では Palgrave 指数とたまに呼ばれる指数算式を用い、イギリスの物価指数を発表した。

$$PI^{PL} = \sum_i w_{it} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} \right)$$
$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{it} q_{it}}$$

この、一見 Paasche 指数と見間違う指数は、今日ではあまり用いられないが、直観的には説得力のある公式である。この公式に関しては、Paasche 指数と同じ変数となるので、調和平均の Paasche 指数よりは大きくなることがわかる。今日、Laspeyres 指数や Paashce 指数を作成する際、もとの公式に従って計算されることはほとんどない。それは、数量の情報を集めるのが困難であるためである。例えば、統計局の立場にたって、魚の物価指数を構築することを考えてみればその問題は明らかである。まず、魚に関する価格を集めねばならない。しかし、鯵の価格だけをとっても、同一店舗の同じ時間帯であっても、高級鯵、特売の鯵、切り身、刺身等さまざまである。結局、何かしら代表的な鯵の価格を一つか二つ選ぶしかないであろう。魚には、ほかにもサンマや鮪、鮭等がある。それらの価格の相対的な重要性を知るには、それぞれの魚の販売数量が必要となるが、鯵の刺身と切り身、一匹の数量をどう集計すればよいのだろうか?また、その取引数量の情報収集そのものもとても難しい。鯵が一匹単位で売り切れなかった場合、途中で切り身にするかもしれないが、売り手側もそこまで詳細な数量情報の記録はしていないだろう。しかし、もしも支出シェアで十分な情報になるのであれば、刺身だろうが切り身だろうが、鯵への支出額、あるいは売上高を計算し、それに対応する「代表的」な鯵の価格を紐づけることで、鯵への支出シェアと価格変化率を乗じた $w_t^i \left(\frac{p_t^i}{p_0^i} \right)$ を得ることができる。無論、厳密には、調査している価格と支出シェアの範囲が完全には一致しないが、十分にその近似になると期待するのである[3]。こうした、支出シェアを用いた公式に変換が可能であることから、Laspeyres 及び Paasche 指数は今日において頻繁に使用される重要な指数公式となっているのである。

[2] Palgrave, R. H. I. (1886), Currency and Standard of Value in England, France and India and the Rates of Exchange Between these Countries, Memorandum submitted to the Royal Commission on Depression of trade and Industry, Third Report, Appendix B, s. 312-390.

[3] この、支出シェアと価格の範囲の齟齬を解決するには、販売情報を全て記録する Point of Sales (POS) データの登場を待たねばならない。

6　その他の代表的な物価指数算式

ボックスダイアグラム等、多くの独創的な発想で経済学の諸側面に貢献したFrancis Ysidro Edgeworthは、Alfred Marshall[4]による示唆を基に下記の指数算式を用いた研究を発表した[5]。

$$PI^{ME} = \frac{\sum_i p_{it}\left(q_{it} + q_{i0}\right)/2}{\sum_i p_{i0}\left(q_{it} + q_{i0}\right)/2}$$

この算式は、かなり強引な変形であるが、下記のようにも表現可能である。

$$PI^{ME} = \sum_i w_{it}^{ME}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)$$

$$w_{it}^{ME} = \frac{w_{i0} + w_{it}\left(w_{it}/\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\right)}{\sum_i \left[w_{i0} + w_{it}\left(w_{it}/\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)\right)\right]}$$

また、大著をしるしたWalsh (1901)は、下記の指数を提案している。

$$PI^{WAL} = \frac{\sum_i p_{it}\sqrt{q_{i0} \times q_{it}}}{\sum_i p_{i0}\sqrt{q_{i0} \times q_{it}}}$$

これは、やはりかなり強引であるが、下記のように変形可能である。

$$PI^{WAL} = \sum_i w_{it}^{WAL}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)$$

$$w_{it}^{WAL} = \frac{\sqrt{\left(w_{i0} \times w_{it}\right)/\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)}}{\sum_i \sqrt{\left(w_{i0} \times w_{it}\right)/\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}\right)}}$$

7　数量指数

これまでは価格に関する集計を考えていたが、数量についても指数を作成することが可能である。数量指数Qとすると、LaspeyresとPaashce数量指数はそれぞれ

[4]Marshall, A. (1887) "Remedies for Fluctuations of Genral Prices," *Contemporary Review* 51, pp. 355-375.

[5]Edgeworth, E.Y. (1925) "Index Numbers" in *Palgrave's Dictionary of Political Economy*, Vol 2. Ed by H. Higgins (Macmillan, London).

$$Q_{0t}^{L} = \frac{\sum_i p_{i0} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} = \frac{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0}$$

$$Q_{0t}^{P} = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{it} q_{i0}} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_0}$$

ここで、重要な性質がある。Laspeyres と Paashce は、それぞれの Price Index と Quantity Index を乗じても、Value Index にはならない。すなわち、

$$\begin{aligned} Q_{0t}^{L} P_{0t}^{L} &= \frac{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0} \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_0}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0}, \\ Q_{0t}^{P} P_{0t}^{P} &= \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_0} \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_t} \end{aligned}$$

はそれぞれ解釈不能な数値であるが、それぞれを互い違いにとると、

$$\begin{aligned} Q_{0t}^{L} P_{0t}^{P} &= \frac{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0} \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_t} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0} = V_{0t} \\ Q_{0t}^{P} P_{0t}^{L} &= \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_0} \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_0}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0} = \frac{\mathbf{p}_t' \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_0' \mathbf{q}_0} = V_{0t} \end{aligned}$$

となる。このような関係にある Q_{0t}^{P} を P_{0t}^{L} の Cofactor とを呼ぶ (Q_{0t}^{L} は P_{0t}^{P} の cofactor である)。

8 Laspeyres、Paasche 両指数の関係

Laspeyres、Paasche 両指数の間には密接な関係がある。両価格指数の差、

$$g = \frac{P_{0t}^{P} - P_{0t}^{L}}{P_{0t}^{L}}$$

は Lasperyes-Paashce ギャップと呼ばれる。g は下記のように分解することが可能である。

$$g = \frac{\sum_i w_{i0} \left(\frac{p_{it}}{p_{i0}} - P_{0t}^{L} \right) \left(\frac{q_{it}}{q_{i0}} - Q_{0t}^{L} \right)}{P_{0t}^{L} Q_{0t}^{L}}$$

(証明)

$$\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-P^L_{0t}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-Q^L_{0t}\right)=\sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\frac{q_{it}}{q_{i0}}-\sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}Q^L_{0t}-\sum_i w_{i0}\frac{q_{it}}{q_{i0}}P^L_{0t}+\sum_i w_{i0}P^L_{0t}Q^L_{0t}$$

$$\sum_i w_{i0}=1,\sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}Q^L_{0t}=P^L_{0t}Q^L_{0t}$$

$$\sum_i w_{i0}\frac{q_{it}}{q_{i0}}P^L_{0t}=P^L_{0t}Q^L_{0t}$$

$$w_{i0}=\frac{p_{i0}q_{i0}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}}$$

$$\sum_i w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\frac{q_{it}}{q_{i0}}=\sum_i\frac{p_{it}q_{it}}{\sum_i p_{i0}q_{i0}}=V_{0t}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-P^L_{0t}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-Q^L_{0t}\right)&=V_{0t}-P^L_{0t}Q^L_{0t}=P^P_{0t}Q^L_{0t}-P^L_{0t}Q^L_{0t}\\ g&=\frac{P^P_{0t}Q^L_{0t}-P^L_{0t}Q^L_{0t}}{P^L_{0t}Q^L_{0t}}\\ &=\frac{\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-P^L_{0t}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-Q^L_{0t}\right)}{P^L_{0t}Q^L_{0t}}.\end{aligned}$$

$\sum_i w_{i0}\left(\frac{p_{it}}{p_{i0}}-P^L_{0t}\right)\left(\frac{q_{it}}{q_{i0}}-Q^L_{0t}\right)$ は、価格変化率と数量変化率の、それぞれのラスパイレス指数からのかい離の共分散とみなすことができる。この値を Cov と表記すると、価格と数量の共分散が負の時、すなわち、価格が高いときに数量が減少する関係にあれば、Lasperyes-Paashce ギャップは負、すなわち、Paashce Price Index は Laspeyres Price Index よりも低い値になることがわかる。この関係は、最初に導出した Bortkiewicz (1923)[6] に敬意を表し、Bortkiewicz Decomposition とも呼ばれる。また、

$$\begin{aligned}Cov&=V_{0t}-P^L_{0t}Q^L_{0t}=P^L_{0t}Q^P_{0t}-P^L_{0t}Q^L_{0t}\\&=P^L_{0t}\left(Q^P_{0t}-Q^L_{0t}\right)\end{aligned}$$

すなわち、共分散が負の時には、Paasche Quantity Index が Laspeyres Quantity Index よりも小さくなることがわかる。

[6] Bortkiewicz, L.v. (1923)"Zweck und Struktur einer Presiindexzahl," Nordisk Statisitik Tidsskrift 2, pp. 398-408.　が CPI Manural 等で引用されるが、私は未読である。

基準年	比較年	Laspeyres	Paasche	(L-P)/L
1990	1995	106.4	106.2	0.002
1995	2000	101	99.9	0.011
2000	2005	97.3	94.9	0.025
2005	2010	99.7	93.1	0.066
2010	2015	104.6	103.8	0.008

図 1: 総務省統計局によるパーシェ・チェックの結果

9 Laspeyres-Paasche Gap の大きさ

日本において、Laspeyres 指数と Paasche 指数の間の Gap は実際にはどれだけ大きいのだろうか?総務省統計局は 5 年に一度、両者のチェックを行い、公表している。

図から直ちにわかるのは、両者の Gap は一定ではないことである。1990 年から 1995 年にかけては、両者の違いはほとんど無視できる。しかし、2010 年から 2015 年にかけては非常に大きなギャップが発生している。Bortkiewicz Decomposition をみると、もしも財間で価格変化が全て同じであれば、ギャップは発生しない。ということは、ギャップが大きい期間は、相対価格の変化が大きかった時期である可能性が高い。中分類の総務省統計局の消費者物価指数の 83 種類の中分類指数を用い、前年からの変化比の対数をとった上 (この操作により、平均値の変動の効果を除去可能になる) で、その標準偏差をみると、やはり、同時期に標準偏差が上昇していることがわかる。この時期は、世界金融危機、いわゆるリーマンショックが生じた時期でもあり、資源価格や為替レートの変化により相対価格が大きく変化し、それに伴い消費者の需要も変化したことを、パーシェチェックの結果は示している。

なお、家計調査中分類 83 種類の品目を集計して計算した主要物価指数の推移も図示しておく。2000 年 1 月を基準月にしており、消費の季節性を反映してしまうパーシェ指数の変動が大きくなっているが、指数間での時系列変動が大きく異なることがわかるだろう。

Bortkiewicz Decomposition から、もしも価格変化が一切数量変化を引き起こさなければ、例えば Leontief 型の Preference であれば Laspeyres 指数と Paashce 指数の乖離はないことがわかるが、これは元々の Laspeyres 及び Paasche 算式から自明である。共分散項からは、もしも商品間の代替効果が大きければ、両者の gap もまた大きくなることが示唆される。商品間の代替は、商品の属性が近いほど大きくなることが想定される。ミカンと衣類よりも、ミカンとオレンジの方が代替効果は大きくなる可能性が高い。とすると、

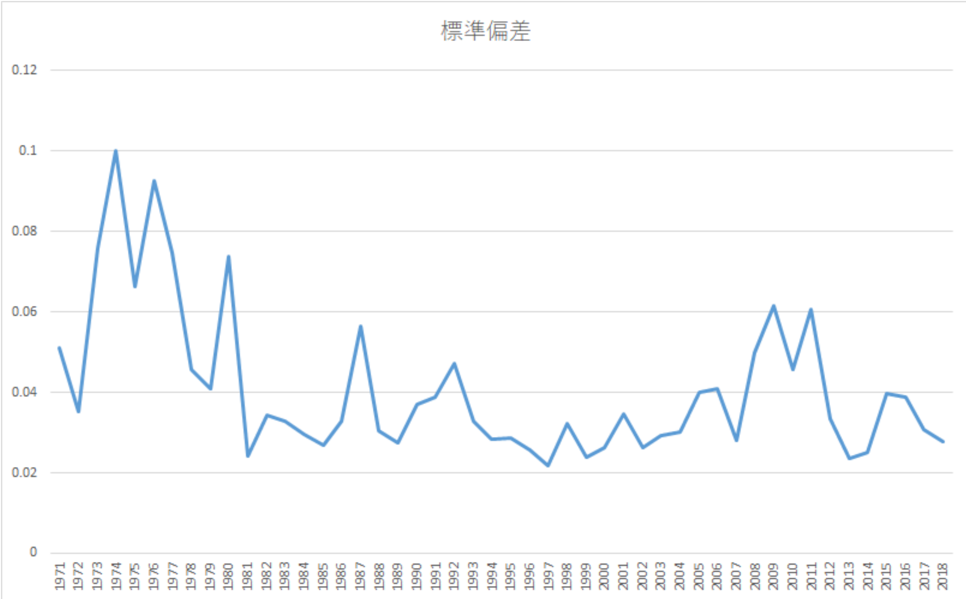

図 2: 消費者物価指数、83 種類の前年比の対数標準偏差の推移

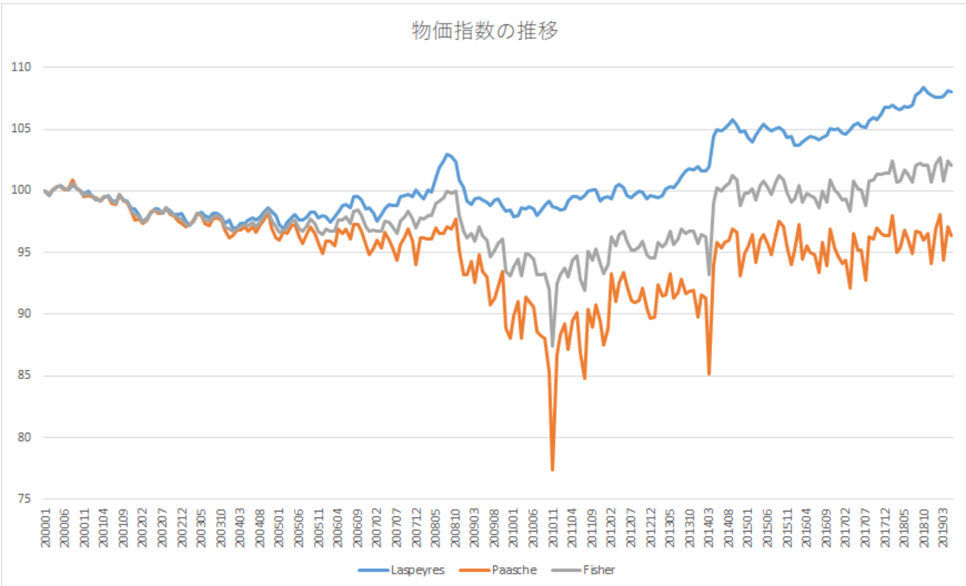

図 3: 家計調査を用い、消費者物価指数中分類の集計を各指数算式で行った結果 (2000 年 1 月基準)

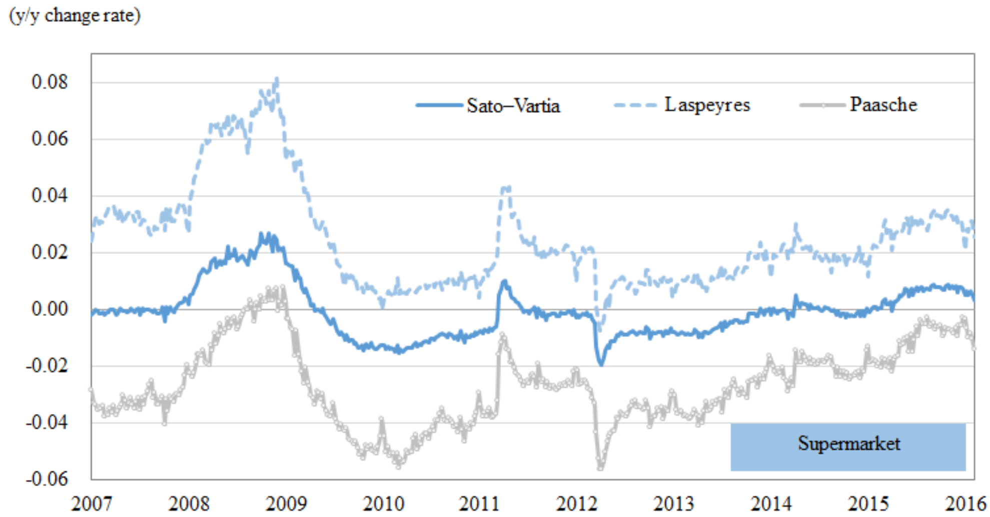

図 4: SRI 一橋大学消費者購買指数から計算した、前年同週からの各連鎖指数算式の変化率の推移

gap は、中分類などのカテゴリー単位ではなく、商品単位のデータでみるほうが大きくなる可能性が高い。商品・店舗レベルで財を識別可能な Point of Sales (POS) データで gap を計算すると、図のようになる。ただし、これは週次データであり、図は前年同週からの変化比を連鎖で図示したものである。両者の gap が非常に大きいことがわかるだろう。より細かいデータでみると、Laspeyres と Paasche の gap は大きくなる傾向がある。

10 Aggregation Consistency

Laspeyres 指数および Paasche 指数が今でも頻繁に用いられている理由の一つは、その算式の単純さ、特に Laspeyres 指数は基準時の支出シェアから Weight を計算可能という簡便さが大きな理由となっているが、もう一つの理由は、両指数が Aggregation Consistency を有しているからである。

国民経済計算における GDP、あるいは消費者物価指数を構築する際、数百、数千の財・サービスの情報を集計する。その中には、生鮮食料品、家電製品、衣服、医療・福祉サービス等、全く異なるカテゴリーに属する商品がある。また、GDP を計算する際には、設備投資、在庫投資、政府消費支出など、やはり異なるカテゴリーが存在する。これまで議論してきた物価指数算式では、そうしたカテゴリーの相違を考えず、全ての財・サービスを一気に集計することを念頭においてきた。しかしながら、物価指数を議論する際、

常に経済全体に興味があるとは限らず、例えば食料価格の推移はどうなっているか、医療・教育などのサービス価格の動向は他の財とどう異なるのか、など、カテゴリー単位での動向に関心が向くことは頻繁にある。実際、家計消費需要関数を推計する際には、数百もの異なる財・サービスに関する需要システムを推計するよりも、食料品、日用品、耐久財、等の大雑把なカテゴリー単位で分析したいことは多い。また、マクロ生産関数を考える際、一国全体を集計した資本ストックと、各産業に分割した資本ストック、さらには一国全体の付加価値と産業に分割した付加価値の間に齟齬があるのは大きな問題となる。このような場合、やはり、多段階で推計したものと、一段階で一気に推計した結果は一致することが望ましい。

では、経済全体の財・サービスを例えば 10 種類に区分けし、それぞれ物価指数を作成したとする。その 10 カテゴリーを一つの商品とみなし、10 種類の価格および支出データから物価指数を構築することは可能である。問題は、そのように、二段階、あるいは三段階のステップを踏んで作成された物価指数は、そのような段階を踏まずに、一気に推計した物価指数と同じ結果になるのだろうか?

Aggregation Consistency という概念は Vartia (1976)[7] により導入されたが、ここでは、Balk (2008) に従い、Aggregation Consistency について議論しよう。

財の集合を A とし、それが K 個のカテゴリーに分割される、としよう。数学的には

$$A = \bigcup_{k=1}^{K} A_k, A_k \cap A_i = \phi \quad (k \neq i)$$

各 k カテゴリーには、N_k 個の種類の財があるとしよう。明らかに、経済全体の財の種類が N であれば、

$$N = \sum_{k=1}^{K} N_k,$$

が成立する。カテゴリー k の二時点における価格と数量のベクトルを $\left(p_k^1, q_k^1, p_k^0, q_k^0\right)$ と書くことにする。そして、k における t 期の総支出額を

$$v_k^t = p_k^{t\prime} \cdot q_k^t$$

経済全体の総支出を

$$V_k^t = \sum_{k=1}^{K} v_k^t$$

と書くことにする。

さて、いま、ある指数算式 PI を考える。この指数算式を経済全体の価格、数量ベクトルで計算した価格指数を PI_N 、価格と数量を入れ替えて計算した

[7] Y.O. Vartia (1976) "Ideal Log-Change Index Numbers," *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol.3. pp. 121-126.

数量指数を QI_N と書くことにしよう。同一の指数算式を各カテゴリーに限定して得られる価格、数量指数を、PI_{N_k}, QI_{N_k} と書くことにする。PI_{N_k}, QI_{N_k} はいずれも非負の値をとる実数であり、あたかも一つの価格、数量とみなすとが可能である。したがって、それらを変数として、あらためて指数算式 PI に代入して得られる値、すなわち、

$$PI_N^* = PI_K \left(PI_{N_1}, QI_{N_1}, PI_{N_2}, QI_{N_2}, ..., PI_{N_K}, QI_{N_K} \right)$$

を二段階指数 (A Two Stage Index) と呼ぶ。もしも Laspeyres 指数を用いるならば、二段階指数は

$$PI_N^{*L} = \sum_{k=1}^{K} \frac{v_k^0}{V_k^0} \times PI_{N_k}^L$$
$$PI_{N_k}^L = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{p_{ki}^0 q_{ki}^0}{v_k^0} \times \frac{p_{ki}^1}{p_{ki}^0}$$

と定義することが可能である。同様に、Paasche 指数を用いた二段階指数や数量指数も定義することが可能である。Laspeyres 指数と Paasche 指数は、いずれも二段階指数と通常の指数が一致することを示すことが可能である。特に Laspeyres 指数の場合は自明であろう。すなわち、これら二つの指数は Aggregation Consistent である。しかしながら、Fisher 指数や Tornqvist 指数等、知られているほとんどの指数は一致しない[8]。Laspeyres と Paashce が例外的な指数となっている。これら二つ以外で、今日、Aggregation Consistency を満たす指数として知られているのは、Stuvel 指数と Varita I 指数の二つのみである。この二つの指数、特に後者の指数は Sato-Vartia 指数という経済学的アプローチと密接な関係を有する指数によく似たものであり、後の講義ノートで説明する予定である。

[8]Balk (2008) は、Fisher 指数などが、二段階で推計すると大きな誤差が生じうることを示している。興味のあるものは、Vartia による一連の論文と共に、Balk(2008) を参照せよ。