# 2019年度地域経済各論日本
# 指数の確率的アプローチ

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成31年12月28日

**概 要**

**Stochastic Approach**

## 1 Introduction

19世紀後半から20世紀前半、指数理論が構築される中で、物価の二点の性質について激しい論争が繰り広げられた。第一は、物価の単調性に関するものである。多数ある財の中で、一つの価格だけ増加した、としよう。このとき、物価は増加したのだろうか?もしくは、物価指数は上昇するべきであろうか、という問題である。第二の点は、果たして、物価指数は確率変数、すなわち、物価という概念あるいは物価指数の値には、我々がよくわからない変動、あいまいさが含まれているか否か、というものである。21世紀の我々は、これら二つの問いに対して、かなりの程度一致した見解を有している。第一の問題に関しては、我々が想定する「物価」が何を目的としているかに答えは依存する。もしも、消費者にとっての生計費として物価をとらえるならば、一つの商品価格の増加は、他の商品価格が不変であっても、消費者にとっては費用の増加になるので、物価は上昇すべきである。しかしながら、もしも「物価」が金融政策のターゲットとして、すなわち貨幣価値の変動の指標であるならば、生鮮食料品やエネルギー価格のような、他の商品とかなり異なる変動を示すような商品価格の変動は、多くの国では、コアインフレやコアコアインフレと呼ばれる物価指標からは除かれる。従って、答えは、貨幣価値の計測としては「No」になるだろう。第二の問題に関しては、確率的動学一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibirum, DSGE) モデルがマクロ経済学における標準的なツールとなっている今日では、国内総生産や家計消費、設備投資などのマクロ諸変数と同様に、物価指数もまた確率変数として扱うことがごく一般的に行われている。すなわち、第二の問題に対する回答は「Yes」になるだろう。しかしながら、20世紀初頭の指数研究に

おいては、第一の問題に対して「Yes」、第二の問題に対しては明確に「No」という回答が支配的であった。これら二つに対して、現在と同じ回答を用意したのは Jevons と Edgeworth の二人であり、今日、物価指数の確率的アプローチ (Stochastic Approach) と呼ばれる指数理論の帰結である。それに対し真っ向から対立したのは、当時の指数理論において絶大な影響力をもった Walsh であり、当時もっとも高名な経済学者であった Keynse であり、さらに、その後の指数理論の展開において重要な役割を担い、第一回ノーベル経済学賞を受賞した Frisch であった。そして、1925 年に Edgeworth が死去すると、確率的アプローチは指数理論の歴史から消え去り、復活するのは 20 世紀の後半、1980 年代以降のことなる。それも、80 年代に復活した確率的アプローチ、特にコアインフレをめぐる一連の研究の多くは、そのエッセンスが Jevons や Edgeworth により 100 年以上前に提唱されていたものとほぼ同じものでありながら、昔の先行研究とは独立に見いだされ、展開されていった。1995 年に Diewert[1]が当時のコアインフレの議論と Edgeworth 達による議論の類似性が指摘されるまで、多くのコアインフレの研究者が、そうした歴史に関して十分な知識はなかったようである。こうした確率的アプローチの歴史は、リカードによる国債の負担に関する等価定理を 150 年以上後にバローが再発見したことを髣髴させる。

物価指数の確率的アプローチ (Stochastic Approach) は、本格的な物価研究の始まりとなる Jevons (1863) の中で議論されている。Jevons の物価指数は二時点の価格比の単純幾何平均として今日では広く知られている。しかしながら、その本の中で展開されている指数の議論は、単純幾何平均の提唱に留まるものではなく、各商品価格の推移およびその変動の背後の要因に関して、多方面から分析を行う包括的なものであった。Jevons は数式を用いて展開していないが、現在の言葉で彼の議論を思い切って単純に要約するならば、下記のようになるだろう。

いま、5 種類の商品、A, B, C, D, E が存在するとする。そして、財 A は貨幣であり、財 A との相対価格が、そのまま各商品の相対価格となる。財 B と財 C の相対価格は、各財の需要と供給により決定され、その変動の要因は多岐にわたる。財 A と財 B の間の相対価格、すなわち財 B の価格もまた、A 財と B 財の需要と供給により決定される。いま、我々の関心が、財 A の需給、すなわち貨幣の変動による他の商品価格への影響にあるとしよう。すると、貨幣価値の変動は、他の全ての財に対して共通の影響を与えるはずである。各商品の価格は実に様々な理由によって変動しうる。我々はその変動要因を十分に知らないので、様々な商品価格は確率変数となる。貨幣価値の変動は、様々な商品価格、すなわち確率変数間の共通要素であり、貨幣価値の計測とは、その共通要素を抽出することに他ならない。本ノートの最初に提示

[1]Diewert, W. Erwin (1995), "On the Stochastic Approach to Index Numbers," University of British Columbia, Department of Economics Discussion Paper no. 95–31 (Vancouver, September).

した問題に関しては、ある商品価格の変動は、たとえそれがどんなに大きなものであっても、貨幣価値の変動と関係ないもの (独立したもの) であれば、それは物価は反映されないことになる。

上記の確率的アプローチのエッセンスは、下記の簡単なモデルで示すことが可能である。いま、商品 $i$ の価格変化が、全商品で共通の要素 $\pi_t$ と、各商品固有の要素 $\varepsilon_{it}$ に分解可能であると仮定しよう。最も単純なケースでは、下記のようになる。

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \pi_t + \varepsilon_{it}$$

我々の主な関心は、共通要素 $\pi_t$ の識別にある。もしも固有の要素 $\varepsilon_{it}$ がどのような分布に従っているか知っていれば、容易に $\pi_t$ を推計可能である。例えば、$\varepsilon_{it}$ の平均がゼロであり、$\pi_t$ と独立ならば、$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)$ の単純平均は $\pi_t$ の不偏推定量となる。すなわち、

$$\widehat{\pi}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)$$

である。また、各商品価格を確率変数として扱うことにより、標準誤差を求めることも可能になる。もしも $\varepsilon_{it}$ の分散が各商品に関して等しく $\sigma^2$ であれば、この推定量の分散は

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{\pi}_t\right) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\right) \\
&= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\pi_t + \varepsilon_{it}\right)\right) \\
&= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\left(\varepsilon_{it}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=t}^{n}\left(\varepsilon_{it}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sigma_t^2
\end{aligned}$$

また、$\sigma_t^2$ は

$$\widehat{\sigma_t}^2 = \frac{\sum_{i=t}^{n}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}} - \widehat{\pi}_t\right)^2}{n-1}$$

で不変推定量を得ることが可能である。

さらに、各商品で固有の一定の価格変化に関するトレンドがあると仮定すると、

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \pi_t + t_i + \varepsilon_{it}$$

となる。この場合、$\pi_t$ は対数価格比を商品ダミーと時間ダミーに回帰したときの、時間ダミーの係数として得ることが可能になる。各価格系列としてどのような確率過程を考えるかにより、推定手法は異なってくる。しかし、一貫してるいのは、確率的アプローチにおいて指数の計算とは、商品価格の様々な変動から共通要素、すなわちシグナルを抽出することに他ならないことである。

21 世紀の現在、以上の議論は、特に的外れであるようには感じられない。しかしながら、Jeonvs および Edgeworth という、経済学の歴史において不朽の名声を得ている二人が提唱したにも関わらず、ウォルシュとフィッシャーという指数理論を体系的に、ほぼ網羅的に整理した指数理論家には全く評価されず、ケインズにより強烈な批判を浴び、さらには指数理論の経済学的アプローチを確立し、後の指数理論の展開に決定的な役割を果たしたフリッシュにより事実上引導を渡されることになる。

本講義ノートでは、古典的な確率的アプローチとケインズ・フリッシュによる批判。その後の、Clements, Izan, Rao 達による、いわゆる新確率的 (New Stochastic) アプローチを紹介し、最後に、各種コアインフレの推計に関して紹介する。コアインフレの計測は現在のマクロ経済学における最重要課題の一つであり、非常に多くの研究が進行している。したがって、その分析においては、カルマンフィルターや多変量自己回帰 (Vector Autoregression)、さらには様々な粘着性を取り込んだ動学一般均衡モデル等、最先端の手法が駆使されており、各手法を紹介するだけでかなりのスペースが必要となる。そのため、コアインフレについては、ごく簡単に、要点だけ紹介することになる。また、地域間物価指数は、独立した講義ノートで議論する。なお、確率的アプローチ全般に関しては、少し古くなったが Selvanathan and Rao (1994) が教科書として有名であり、その後の展望論文としては Clements, et al. (2006) がある。また、Lippe (2007) には批判的な観点からの確率的アプローチの議論がある。コアインフレに関しては、アカデミックな視点では Wynne (2008) が、実務的視点からのサーベイとしては Silver (2006) がある。

## 2 Classical Stochastic Approach

Jevons が 1863 年に発表した物価に関する研究は、19 世紀半ばの、カリフォルニアとオーストラリアにおける大規模な金鉱発見と金の流通量拡大がイギリスの物価にどのような影響を与えたかを調べることを目的としていた。1844 年以降のイギリスにおける様々な商品価格の変動の表および図を示しながら、Jevons は、商品価格の変動が多様であるとし、個別商品の変動が平均をとることで打ち消され、共通部分、すなわち当時の基軸通貨として採用されていた金の変動による変化が残る (Jevons (1863) p. 26) と議論している。さらに、Jevons は金鉱発見以外にも、戦争等により、貨幣価値、すなわち商品価

格変動における共通部分の動きには短期と長期のものがあり、両者を区別する重要性を指摘する。そして、長期変動として六年間の変動の平均値を採用している。

Jevons の影響を強くうけた Edgeworth は、今日、1925 年に出版された彼の著作集の中に集められている論文 (19 世紀に発表されてる) において、Jevons の議論をさらに進めている。ラスパイレスとドロービッシュの間の平均値論争を踏まえ、当時の指数計算においては、Walsh (1901) で紹介されているように、多くの場合支出シェアによる加重平均が用いられていたが、Edgeworth はそこに疑問を投げかける。物価指数が貨幣価値の変動を計測するためのものであり、かつ、貨幣価値の変動が全ての商品に等しく影響を与えるのであれば、加重平均をとる必要はない。1887 年に発表した論文の中で、Edgeworth は、商品価格のデータを木に見立て、風に翻弄され激しく揺れ動く木と、安定している木がある場合、安定している木の情報がより重視されるべき (p.246) と議論する。そして、「平均からの乖離が激しい商品には小さいウェイトを与えるべきである」とする。また、商品価格に上限はないが、0 よりも小さくなることはできないため、商品価格比の分布は左右で非対称になるとし、算術平均よりも幾何平均、あるいは中央値のほうがより、「正しい」分布の平均になると主張する (p.239)。この Edgeworth の議論は、今日のシグナル抽出法のエッセンスに他ならない。因子分析やカルマンフィルター、分散・共分散行列を用いた一般化最小二乗法のアイディアと言ってよいだろう。

しかしながら、Jevons と Edgeworth によるこうしたアプローチ、商品価格変動を共通部分と個別変動部分に分離する、という手法は当時の指数理論研究者達には全く受け入れられなかった。まず、1901 年に出版された Walsh による、600 ページ近い指数理論の大著の中で、Jevons と Edgeworth は単純幾何平均の提唱者という位置づけになっており、彼らの議論の中にあった確率的な側面は明確に否定されてしまっている。著作の最初 (Walsh (1901) p.38) で、価格変動要因に貨幣価値以外のものを考え、貨幣価値と区別することは、コペルニクスのシンプルな地動説に対し、プトレマイオスによる複雑な天動説を採用するようなものであると Walsh は一刀両断する。さらに、本ノートの最初で提示した問題、すなわち、ある一商品のみの価格が変化し、他の商品価格は全く変わらないとき、貨幣価値が変化したか否かを Walsh は問い、それは明確に貨幣価値が変化したはずである、と断言する[2]。

確率的アプローチに対するさらなる厳しい批判はケインズよりなされる[3]。ケインズは、Jevons と Edgeworth による物価指数では、全体の物価水準と相対価格が区別され、相対価格変動が無視すべき存在となっていることを強く

[2]Walsh と Edgeworth の論争は、時に激しい言葉が用いられている。例えば、下記の二つの論文を見てもらいたい。Edgeworth (1901) "Mr. Walsh on the Measurement of General Exchange Value," The Economic Journal, Volume 11, Issue 43, 1 September 1901, Pages 404–416, および、Walsh, C.M., (1924) "Professor Edgeworth's Views on Index-Numbers," *Quarterly Journal of Economics* 38, 500–519.

[3]Keynes, J.M., (1930). Treatise on Money, Vol. 1, London: Macmillan.

批判する。ケインズによれば、相対価格の変化は物価の水準にも影響を与える (Keynes (1930) p.87) ものであり、相対価格が変化しないときに生じるであろう物価水準の変化、という概念そのものが無意味なものになる[4]。ケインズの論調は激しく、理解するのは容易ではないが、現在の言葉で表現するなら、相対価格変動は物価とは独立な確率的事象ではなく、様々な経路で、他の商品価格や数量とつながっている内生変数であり、その情報を落とすことは誤りである、ということになるだろう。確率的アプローチに対する最後の打撃になったのは、R.Frish (1936) である[5]。その展望論文の中で、彼は Jevons および Edgeworth による物価指数理論を確率的アプローチ (Stochastic Approach) と名付け、そのエッセンスを説明した上で、「貨幣価値」が確率変数になることを批判する。貨幣価値という概念はあいまいなものであり、明確に定義された経済理論モデルと相反するものであると彼はみなす。そして、貨幣価値は大量の商品価格情報がなければ推定が不可能なものであり、かつ、貨幣価値の変動は全ての商品に等しい影響を与えるという強い仮定に依拠したものなる。これらはいずれも説得力にかけると Frish は議論し、確率的アプローチを徹頭徹尾誤りとした Keynes を引用し、それに同意するとしている (Frisch (1936), p.4-5)[6]。

Keyens と Frisch による強烈な批判は、その後の確率的アプローチを衰退させるというよりも、墓場に追いやったと言ってよいだろう。次に確率的アプローチに基づく指数理論が発表されるのは Theil (1967)[7]であり、本格的には 1980 年代以降となるが、これらの分析は情報理論や計量経済学の進展に伴い登場したものであり、Jevons や Edgeworth の研究を踏まえたものではなかった。

なお、Keynes と Frisch は、Jevons のアプローチに関し、各商品を同列に扱っていることについて厳しく批判している。ほとんどだれも買わないような商品と、小麦やコメのような主要商品を同じように扱うことは確かに無理があるだろう。確率的アプローチにおいて、すべての商品を同列に扱うことはまったく重要なことではない。事実、Edgeworth は、加重平均の Weight として、各商品価格の変動 (の逆数) を用いることを提唱している。より標準的な物価指数と確率的アプローチは相反するものではい。例えば、

$$\rho_{i01} = \frac{1}{2}\left(w_{i1} + w_{i0}\right)$$

[4]ケインズはさらに語気を強め、「Jevons は蜃気楼を追いかけている (p.76)」と書き、「徹頭徹尾誤っている (root-and-branch erroneou (p.85))」とまとめている。

[5]Frisch, Ragnar. (1936). Annual Survey of General Economic Theory: The Problem of Index Numbers. Econometrica. IV. 10.2307/1907119.

[6]日本では、森田 (1935) が、Frisch よりも前に、ケインズを引用しながら、やはり確率的手法を強く批判している。その理由として、Frisch 同様に確率的に定義された貨幣価値という概念が受け入れられない、という点と同時に、エッジワースの提案する、個別価格の変動の強度 (の逆数) を用いたウェイトが時間と共に変化することにより、実際に計算することが困難であることを挙げている。

[7]H. Theil (1967) Economics and Information Theory, North Holland.

のように、二時点の支出シェアの平均値を $\rho_{i01}$ としよう。そして、

$$R_{i01} = \rho_{i01} \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)$$

すなわち、二時点の価格の対数変分に支出シェアの平均を乗じたものを $R_{i01}$ と定義しよう。$R_{i01}$ を確率変数とみなし、この確率変数の共通部分を物価と定義しよう。すると、物価の不変推定量は (多少強い仮定が必要になるが)

$$\begin{aligned} E\left(R_{i01}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\rho_{i01} \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=t}^{n}\frac{1}{2}\left(w_{i1} + w_{i0}\right) \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) \\ &= \ln PI^{T} \end{aligned}$$

となる。これは Törnqvist 指数に他ならない。

## 3 New Stochasitic Approach

1980 年代に Stochastic Approach は復活を遂げることになる。その立役者の二人は指数論関する教科書、Selvanathan and Rao (1994) を執筆している。そこで彼らが強調しているのは、Stochastic Approach により指数の推定値には標準誤差が付与することが可能であり、指数の信頼性を数値化することが可能になること、である。標準誤差の少ない場合、推定量の信頼性は増加していくし、回帰式全体の $R^2$ は、回帰式そのもののデータへの適合度合いを示す、すなわち回帰式そのものの信頼性の指標とみなすことも可能であろう。前節の推定式でも標準誤差は付加されるが、推定式をより複雑にすることにより、様々な計量手法を駆使することが可能になる。具体的には、価格決定式に他の変数をコントロール変数として導入したり、最尤法を行うことが可能である。ここでは、Selvanathan and Rao (1994) に従い、Generalized Least Squares(GLS) を用いた手法を紹介しよう。

最初に紹介した、下記のモデルを考える。

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \alpha_t + \varepsilon_{it}$$

計量の入門書の表記に合わせ、上記の $\alpha_t$ をコンスタント項と係数の組み合わせ、被説明変数を $y$ とし

$$y_{it} = \beta_t x_{it} + \varepsilon_{it}$$

と書くことにしよう。$x_{it}$ は単なるコンスタンスト項であり、1 を構成要素

とする列ベクトルである。このとき、Weight 行列 $\Omega$ を用いた場合の GLS は

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_t^{GLS} &= \left(X_t'\Omega^{-1}X_t\right)^{-1} X_t'\Omega^{-1}Y_t \\
X_t &= (1,1,1,1,...,1)' \\
Y_t &= \left(\ln\left(\frac{p_{1t}}{p_{1t-1}}\right), \ln\left(\frac{p_{2t}}{p_{2t-1}}\right), \ln\left(\frac{p_{3t}}{p_{3t-1}}\right), ...., \ln\left(\frac{p_{nt}}{p_{nt-1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

となる。ここで、誤差項が i.i.d. ではなく、

$$u_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{\sqrt{\rho_{it}}}$$

$$\rho_{it} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{it}q_{it}}{E_t} + \frac{p_{it+1}q_{it+1}}{E_{t+1}}\right)$$

となっているとしよう。このとき、OLS は効率的ではなく、分散不均一が生じる。また、分母は Törnqvist の Weight の関数となってる。このとき、$\varepsilon_{it}$ の分散を $\sigma^2$ とすると、共分散行列は

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\rho_{1t}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\rho_{2t}} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

このとき、

$$\begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{\rho_{1t}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{\rho_{2t}} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} \rho_{1t} & 0 & & 0 \\ 0 & \rho_{2t} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \rho_{nt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X_t'\Omega^{-1} &= \frac{1}{\sigma^2}(1,1,1,1,...,1)\begin{pmatrix} \rho_{1t} & 0 & & 0 \\ 0 & \rho_{2t} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \rho_{nt} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma^2}(\rho_{1t}, \rho_{2t}, ..., \rho_{nt}) \\
X_t'\Omega^{-1}X_t &= \frac{1}{\sigma^2}(\rho_{1t}, \rho_{2t}, ..., \rho_{nt})(1,1,1,,...,1)' \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \\
X_t'\Omega^{-1}Y_t &= \frac{1}{\sigma^2}\sum \rho_{it}\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_t^{GLS} &= \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2} \sum \rho_{it} \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) \\ &= \sum \frac{1}{2}\left(\frac{p_{it}q_{it}}{E_t} + \frac{p_{it+1}q_{it+1}}{E_{t+1}}\right) \ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\end{aligned}$$

となり、Törnqvist 指数を GLS の推計量として得ることが可能である。また、標準誤差も簡単に求めることが可能である。

さらに変更し、今度は

$$\begin{aligned}u_{it} &= \varepsilon_{it}\sqrt{w_{i0}} \\ x_{it} &= \sqrt{w_{i0}} \\ y_{it} &= \frac{p_{it}}{p_{i0}}\sqrt{w_{i0}}\end{aligned}$$

としよう。このとき、

$$\Omega = \sigma_2 \begin{pmatrix} w_{10} & 0 & & 0 \\ 0 & w_{20} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & w_{n0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}X_t'\Omega^{-1} &= \frac{1}{\sigma_2}\left(\sqrt{w_{10}}, \sqrt{w_{20}}, ..., \sqrt{w_{n0}}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{w_{10}} & 0 & & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_{20}} & & 0 \\ & & . & \\ 0 & 0 & & \frac{1}{w_{n0}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma_2}\left(\frac{1}{\sqrt{w_{10}}}, \frac{1}{\sqrt{w_{20}}}, .., \frac{1}{\sqrt{w_{n0}}}\right) \\ X_t'\Omega^{-1}X_t' &= \frac{1}{\sigma_2} \\ X_t'\Omega^{-1}Y_t &= \frac{1}{\sigma_2}\left(\sqrt{w_{10}}, \sqrt{w_{20}}, ..., \sqrt{w_{n0}}\right)\left(\frac{p_{1t}}{p_{10}}\sqrt{w_{10}}, \frac{p_{2t}}{p_{20}}\sqrt{w_{20}}, .., \frac{p_{nit}}{p_{n0}}\sqrt{w_{n0}}\right)' \\ &= \frac{1}{\sigma_2}\sum w_{i0}\frac{p_{it}}{p_{i0}}\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_t^{GLS} &= \sigma^2 \frac{1}{\sigma^2} \sum w_{i0} \frac{p_{it}}{p_{i0}} \\ &= \sum w_{i0} \frac{p_{it}}{p_{i0}}\end{aligned}$$

となり、Laspeyres 物価指数を得ることができる。同様に、様々な変数変換を行うことで、各種指数を作成することが可能である。

## 4 共通トレンドの識別

様々な商品間には共通のトレンドがあるが、価格変化率の水準そのものに商品間で差異がある、すなわち

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)=\alpha_t+\beta_i+\varepsilon_{it}$$

を考えてみよう。無論、この式のパラメターをすべて推計することはできない。ある推計量があるとし、そこから商品固有効果全体を 1/2 減らして、$\alpha_t$ を 1/2 増加させても全く同じ残渣となるためである。そのため、識別条件を外から加えねばならない。例えばある特定の商品の固有効果をゼロにする、でもよいが、より自然なものとして、Selvanathan and Rao (1994) は

$$\sum w_{i0}\beta_i=0$$

すなわち、基準時における支出シェアで加重平均した場合の商品別固有効果の平均はゼロになる、という識別条件をおいている。この制約のもとで価格指数を推計することになる。これは係数に関する線形制約つき OLS で推計可能である。具体的には、係数制約を

$$\begin{aligned}\mathbf{R}\beta&=0\\ \mathbf{R}&=(w_{10},w_{20},...,w_{n0})\end{aligned}$$

推計式を

$$y=X\beta+\varepsilon$$

とすると、制約付き最小二乗は

$$(y-X\beta)'(y-X\beta)-2\lambda\mathbf{R}\beta$$

一階条件は

$$-X'y+X'X\beta-\mathbf{R}'\lambda=0$$

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}^{cons}&=(X'X)^{-1}X'y+(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\lambda\\ \mathbf{R}\widehat{\beta}^{cons}&=\mathbf{R}(X'X)^{-1}X'y+\mathbf{R}(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\lambda\\ 0&=\mathbf{R}\beta^{ols}+\mathbf{R}(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\lambda\end{aligned}$$

よって、

$$\lambda=-\left[\mathbf{R}(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}\mathbf{R}\beta^{ols}$$

これを代入して、

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}^{cons}&=(X'X)^{-1}X'y-(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\left[\mathbf{R}(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}\beta^{ols}\\ &=\beta^{ols}-(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\left[\mathbf{R}(X'X)^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}\mathbf{R}\beta^{ols}\end{aligned}$$

が制約付き OLS の推計量となる。Selvanathan and Rao (1994) は $\varepsilon_{it}$ の分散が $\frac{\sigma_2}{w_{i0}}$ となっているとき (非対角成分は全てゼロである)、共通成分の制約付き推計量は Laspeyres 指数になることを証明している。

# 5 Feenstra-Reinsdorf (2007)

New Stochastic Approach に対して直ちに生じる批判は、推定式がなんらかの理論から導出されたものではなく、いきなり研究者により与えられていることであろう。これに対する一つの反論が Feenstra and Reinsdorf (2007)[8]である。CES 型効用関数に対応する支出関数は、前の講義ノートで下記のように与えられていた。

$$E\left(U_t, p^t\right) = U_t P_t = U_t \times \left(\sum_{i=1}^{n} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

ホモセティック効用関数であることを利用し、効用水準を消去し、さらにパラメターを変換して、

$$c\left(p_t, b_t\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_{it} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

としよう。シェファード・マッケンジーの補題を用い、この対数微分を整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln c\left(p_t, b_t\right)}{\partial \ln p_{it}} &= \frac{p_{it} q_{it}}{c\left(p_t, b_t\right)} = w_{it} \\ &= c\left(p_t, b_t\right)^{\sigma-1} b_{it} p_{it}^{1-\sigma}\end{aligned}$$

と、$i$ 財への支出シェアとなる。よって、この対数階差をとると、

$$\Delta \ln w_{it} = (\sigma - 1) \Delta \ln c\left(p_t, b_t\right) + \Delta \ln b_{it} + (1-\sigma) \Delta \ln p_{it}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\varepsilon_{it} &= \Delta \ln b_{it} \\ \alpha_t &= (\sigma - 1) \Delta \ln c\left(p_t, b_t\right)\end{aligned}$$

とすると、

$$\Delta \ln w_{it} = \alpha_t + (1-\sigma) \Delta \ln p_{it} + \varepsilon_{it}$$

[8]R.C. Feenstra and M. B. Reinsdorf (2007) "Should Index Numbers Have Standard Errors? Theory and Application to Asian Growth", in Berndt and Hulten Ed. *Hard-to-Measure Goods and Services: Essays in Honor of Zvi Griliches* University of Chicago Press, pp. 483-513.

さらに変形すると、

$$
\begin{aligned}
\Delta \ln p_{it} &= \Delta \ln c\left(p_t, b_t\right) + \frac{\Delta \ln w_{it}}{(1-\sigma)} + \frac{\varepsilon_{it}}{(\sigma-1)} \\
&= \ln PS^{sv} + \frac{\Delta \ln w_{it}}{(1-\sigma)} + \frac{\varepsilon_{it}}{(\sigma-1)}
\end{aligned}
$$

となる。この式と、new stochastic approach の

$$\Delta \ln p_{it} = \alpha_t + \beta_i + \varepsilon_{it}$$

と比較してみよう。識別条件として、

$$\sum w_{i0}\beta_i = 0$$

を課すということは、$\Delta \ln w_{it}$ のなんらかの平均をゼロにすることに等しい。そこで、Sato-Vartia の weight を用いると、

$$s_i = \frac{\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(w_{i1} - w_{i0}\right) / \left(\ln w_{i1} - \ln w_{i0}\right)}$$

このとき、常に、

$$\sum s_i \frac{\Delta \ln w_{it}}{(1-\sigma)} = 0$$

が成立する。Feenstra and Reinsdorf (2007) はこれをもってして、New Stochastic Approach の推定式は経済学的に正当化されると議論している。無論、Feenstra (1994) 本人が指摘しているように、誤差項 $\varepsilon_{it}$ は選好パラメター $b_{it}$ の関数であり、支出ウェイトと密接な関係を有するので OLS の推定式はバイアスを持ってしまい、GMM 等の工夫が必要となる。また、選好パラメターの変化の分布について強い仮定をおく必要が生じてくる。

## 6　批判

New Stochastic Approach への最も厳しい批判は Diewert (1995) によるものである。具体期には、次の点を指摘している。1)　実際の誤差項の分散が仮定されている分散と異なる、(2) サンプルの期間が異なると、指数の推定量が変化する、(3) 実質的な変化が生じ相対価格が変化した場合、その変化はトレンドの変化のノイズとなる。

どれも厳しいな批判であるが、特に (1) と (3) は重要なものであろう。誤差項の分散を様々な形に変えることで各種指数にすることが可能であるが、誤差項の分散は推定されるべきものであり、強い仮定を特に根拠なしにおくことを正当化することは困難であると思われる。もしも New Stochastic Approach による GLS が正しいのであれば、FGLS、すなわち、第一ステップで OLS を用いて分散行列を計算し、第二ステップで Weighted OLS を用いる場合とほ

ぼ一致するはずであるが、多くの場合、それら FGLS と標準的な指数は一致しなくなる。(2) は、回帰分析で推計する場合、1990 年から 1991 年までの物価の変動の推計量が、2000 年のデータを入れるか入れないかで変化してしまうことになる。標準誤差も同じくサンプルサイズに依存してくる。実質的に大きな変化は生じにくいとは思われるが、ある程度のウィンドウを事前に設定し固定する必要が出てくる。(3) もまた深刻な問題であり、そもそも共通変動とは何か、なぜ相対価格は変動するのか、という根本的な問題に行き着く。回帰分析や最尤法を用いる場合誤差項の分布の情報が決定的に重要になってくるが、そこの理論が特にないために生じる問題でもある。

Lippe (2007) は、支出ウェイトの中に価格情報が含まれており、それを外生として扱うことに疑問を呈している。確かに、価格が変動すればウェイトも通常は変動するはずであり、誤差項の分散が価格に依存しないという仮定は正当化することが困難であろう。さらに Lippe (2007) は数値計算をおこない、Laspeyres や Paasche 等の各種指数の平均値が大きく異なるのに対し、New Stochastic Approach による標準誤差はほとんど差が生じないことを指摘している。New Stochastic Approach の最大のメリットの一つは標準誤差が付くことであるが、それが平均値よりも小さな相違しかないのであれば、各種指数を比較する際、特に有用な情報ではなくなってしまう。

New Stochastica Approach が本領を発揮するのは、次に紹介するコアインフレの推定、及び公理体系の指数論が機能しない、異なる二地域間の物価指数においてである。公理体系の指数理論は、原則として、同一商品の価格の差の集計値の理論でもある。しかし、まったく異なる二地域、例えば最貧国と豊かな国では、まったく同一の財を発見することのほうが難しい。よく似た財すらほとんど存在しないとき、物価指数そのものの計測が不可能になってしまうが、そうした財間の差異を計量モデルにより描写し、差異を統計的に除去することは可能である。Country Product Dummy (CPD) と呼ばれる物価計測法は、今日の国間物価指数の計測において頻繁に用いられており、指数計算において非常に重要なステップとなっている。これは、地域間物価指数について論じるノートで詳しく紹介する予定である。

## 7 コアインフレ

現在の金融政策では、コアインフレーションが政策ターゲットとなっている。コアやコアコア、アメリカ版コア、日本版コアなど、コアインフレという概念は多様である。はたして、コアインフレーションとは何なのだろうか? 生鮮食料品を除くもの、エネルギー関係を除くもの、大きな変動を示した品目を除外するもの (刈込平均)、中央値を使うものなど、様々なコアインフレが提案されているが、そうしたものには経済学的な、学術的根拠があるのだ

ろうか?コアインフレという概念を本格的に導入したのは Eckstein (1981)[9]であるが、今日にいたるコアインフレの推計に関して大きな影響力を発揮したのは Bryan and Cecchetti (1994)[10]である。それ以降、膨大な数に上るコアインフレの研究が発表されているが、それらすべてに共通するのは、コアインフレ、すなわち金融政策のターゲットとなるべき物価指数は、消費者の厚生を測ることを目的とする生計費指数とは異なるものである、という発想である。

ここでは、Bryan and Cecchetti (1994) に従い、コアインフレの一つの例を紹介しよう。Bryan and Cecchetti (1994) は、マクロ経済モデルに基づき、コアインフレを下記のように定義する。まず、多数の同質な企業が価格を期首に設定するとする。同質なため、期首に設定される価格は前期と比べ、貨幣成長率と一致する割合で変化するはずである。次に、期中に各企業は idiosyncratic な系列相関のないショックに直面すると仮定する。また、企業の価格改定にはメニューコストが必要であるとする。すると、大きなショックを体験し、メニューコストを払っても良いと考える企業は価格を改定し、そうでなかった企業は価格を改定しないであろう。政策当局者が期末の価格しか観察できないとすると、各企業の価格変化率は一致せず、様々な商品価格の分布に直面することになるだろう。各企業の商品価格は、モデルのパラメターを適当に設定すると、下記のようになるだろう。

$$\ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) = \pi_t + \varepsilon_{it}$$

この式は、本講義ノートの最初で紹介した確率的アプローチの基本式と全く同一である[11]。ただし、Jevons 達と異なり、Bryan and Cecchetti (1994) はケインズ的なマクロ理論に基づいており、上記の式に対し、さらなる構造を入れることが容易になっている。Keynes や Frisch が批判した、確率的に定義された貨幣価値という概念に実態がない、という側面が理論的にカバーされているのである。Frisch の時代、20 世紀初頭と 20 世紀後半から 21 世紀では、経済学者の間で計量モデルの認識が根本的に異なる。Frisch は計量経済学会 (Econometric Socieity) を創設し、マクロ経済学と計量経済学を確立した一人であるが、インフレ率を確率変数とみなすことに対して強い疑念を呈している。しかしながら、今日では、国内総生産や家計消費といったマクロ変数を確率変数として扱うことに抵抗を感じるものはほとんどいないだろう。さらに、およそほとんどの観察されたマクロデータには、単純なマクロ経済モデルが想定していない変動要因の影響が含まれていることは半ば常識であり、モデルを推計する際には、そうした要素に対して頑健な推計が望ましいことに関しても、異を唱える者はいないだろう。Walsh や Keynes があ

[9]O. Eckstein (1981) Core Inflation, New York, Prentice Hall.

[10]Bryan, Michael F. and Cecchetti, Stephen G. (1994). "Measuring Core Inflation," in N. Gregory Mankiw, ed., Monetary Policy. Chicago: University of Chicago Press, pp. 195-215.

[11]ただし、Bryan anc Cecchetti (1994) では Jevons も Edgeworth も引用されていない。

そこまで強く Edgeworth や Jevons を批判しなければ、1990 年代に改めて、商品価格変動のうち、ある基準を満たすものとしてのコアインフレがあらためて「発見」されることはなかったのだろう。

理論的に商品価格と一般物価の関係を結び付け、確率変数を含む計量モデルとして定式化するということは、背後の経済理論により、推定モデルや手法が異なることになる。コアインフレに関しては膨大な数に上る研究があり、現在も増加している。詳細に関しては、Silever (2006) および Wynee (2008) を参照してもらいたいが、具体的には経済モデルに極力準拠しないアプローチとモデルスペシフィックなものの二つに分類可能である。第一の、モデルに極力依存しないものとしては、金融政策が操作することが困難と思われる商品価格の情報を落とすことであり、具体的には、食料品、エネルギー、間接税の情報を落とすコアインフレ、あるいはコアコアインフレがある。また、経済モデルに準拠しないものとしては、商品価格変動に対し主成分分析を行い、その第一成分をとるもの、および共通成分に持続性を仮定し、平滑化を施す動的因子分析 (Dynamic Factor) も含まれるだろう。これらは特定の経済モデルに依拠しない。また、食料品やエネルギー価格の変動が他の商品価格の変動と大きく異なっている場合、それらのウェイトは小さくなる。すなわち、食料品やエネルギー価格の情報を重視しないことに対する統計的な正当化にもなるだろう。もしも食料品やエネルギーなど、他の商品価格と全く異なる動きをすることが明確なのであれば、それらを事前に落とすことで、コアインフレの計算は著しく容易になるし、後に改訂する必要がないという利点もある。

一方、動的因子分析では、Kalman Smoother を行う場合、新たな情報が入ると過去の推定量が変化してしまうので、金融政策のターゲットとして広く導入することは困難と思われる。食料品及びエネルギーを落とすことに関しては、Blinder (1997)[12]、動的因子分析に関しては Bryan and Cecchetti (1993) が詳しく論じている。第一主成分を用いた指標はポルトガルの中央銀行において活用されている。詳しくは、Machado et al. (2001) を参照されたい。

経済モデルを用いたコアインフレの推計に関しては、構造 VAR(Structural Vector autoregression,　あるいは Identified Vector autoregression) によるものと、カリブレーション・構造推定によりものに分類できる。VAR を用いたものの代表は Quah and Vahey (1995) である[13]。 かれらは、産出量と物価水準は確率トレンドを有するが共和分されていないと仮定する。そして、経済には需要ショックと供給ショックの二種類のショックが存在するとし、需要ショックは長期的には産出量に影響を与えないという仮定を行う。そして、需要ショックにより引き起こされた物価変動をコアインフレとみなす。

---

[12] A. Blinder (1997) “Commentary on Stephan Cecchetti” op. cit., Federal Reserve Bank of St. Louis Review, May/June, p. 157-160.

[13] Quah, Danny and Vahey, Shaun, (1995), Measuring Core Inflation?, Economic Journal, 105, issue 432, p. 1130-44.

90年代以降、マクロ経済モデルの定量化が急速に進み、New Keyenesian Dynamic Stochastic General Equilibirum (NKDSGE) と呼ばれる一連の研究が広く行われるようになっている。そこでは、経済主体のパラメターを仮定、あるいは推定し、動学一般均衡モデルを完全に解ききり、かつ実際の経済データの再現を目指している。金融政策が実体経済に影響を与える経路として、NKDSGEでは価格の粘着性が特に重視されている。Aoki (2001)[14]は、経済に価格が伸縮的なセクターと粘着的なセクターの二種類が存在するとき、金融政策のターゲットは粘着的なセクターのインフレ率であることを理論的に示した。この結果を一般化すると、中央銀行がターゲットにするインフレ率、すなわちコアインフレ率は、生計費指数のように家計消費支出や、Edgeworth や Bryan and Ceccheti (1993) が重視したような、シグナル・ノイズ抽出に加え、さらに、各商品価格の粘着性が非常に重要な要素になる。Eusepi et al. (2011)[15]は、価格粘着性の異なる多くの商品が存在する経済を想定し、中央銀行がターゲットとすべきコアインフレ率をカリブレーションにより導出した。これらは、なぜ中央銀行が金融政策をおこなう必要があるかという根本的な問題も含めて、一つのモデルの中で推定も含めて完結しており、一貫性と言う点で優れているが、一方、モデルのスペシフィケーションに結果が全面的に依存してしまうという欠点も有する。例えば、Eusepi et al. (2011) では、各商品価格の価格改定は、いわゆるカルボ型の改定ルール、すなわち、各時点で価格変更が可能かどうか、常にサイコロが降られて決定されている。また、非線形のモデルを線形近似により解いているが、その場合は、ゼロ金利等の非線形制約を取り込むことが非常に困難になり、近年採用されている、量的緩和政策に対応するものではなくなっている。カルボ型の価格改定ルールが、果たして現実の経済においてどこまで正しいものであるか、あるいは一次近似としても正しいものであるかは非常に議論の余地のあるものである。こうしたDSGEに依拠するコアインフレの計測は、ミクロ的基礎を有するモデルを用いる一般均衡分析のメリットとデメリットを共に有しており、実際に、その結果を日々の金融政策決定において重要となるコアインフレの指標として採用することは困難であると思われる。

## 8 まとめ

物価指数の確率的アプローチは、物価指数理論として非常に古い歴史を有しながら、一旦その発展は完全に止まってしまい、数十年が経過し、全く新しい手法として再発見された。経済学は、レンガを一つ一つ積み上げて家を

[14]M. Aoki (2001) “Optimal monetary policy responses to relative-price changes”Journal of Monetary Economics, Volume 48, Issue 1, August 2001, Pages 55-80

[15]Eusepi, S., Hobijn, B., & Tambalotti, A. (2011). CONDI: A Cost-of-Nominal-Distortions Index. American Economic Journal: Macroeconomics, 3(3), 53-91.

建てるように、先行研究に基づいて発展してきた研究分野ではあるが、その発展は直線ではなく、螺旋を描くようなものであることを示す一つの例であろう。そして、コアインフレの推計という現在のマクロ経済分析における一大テーマに繋がっており、現在非常に多くの研究が精力的に行われている。そうした中で、Jevons や Edgeworth の研究が Diewert (1995) 等により再評価されるのは自然なことであろう。計量経済学がほぼ全ての経済学者にとり必須知識となっている今日では、指数の確率的構造に注目し、分析を進めていくこともまた自然なことである。データに含まれる様々な変動要因を調べ、計量経済学の手法を借りながら、物価になぜ我々が関心を有するのか、という根本的な課題を常に意識しつつ、望ましい指数算式を追求する確率的アプローチは、今後の指数理論および指数の計算においてさらに重要性をましてくると思われる。一方、確率的アプローチにほぼ共通する問題、すなわち、指数の値が、新たなデータが加わることで過去の値が全て変更されてしまうことは、確率的アプローチを国民経済計算などの公的統計として採用することに対する大きな障害となる。また、推計手法が複雑であれば、特に複雑なマクロモデルの諸仮定に全面的に依存するコアインフレの推計は、民間エコノミストも含む、国民と金融当局の間のコミュニケーションにおいても大きな問題となるだろう。現在、確率的アプローチが最も成功し、実装されているのは地域間物価指数、具体的には Purchasing Power Partity と呼ばれる、国間の物価指数の計測である。これは、次の講義ノートで議論する予定である。