2019年地域経済各論(日本)　講義ノート 12

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成31年12月7日

概 要

Divisia Index

1　Divisia 指数の定義

Divisa 指数は、フランスの経済学者、Franç ｏ ｉ s Divisia が 1925 年に発表した論文[1]で展開されている物価・数量指数である。これまで議論してきた物価・数量指数は離散時間上で価格と数量がどのように変化していくかを集計するものであった。こうした伝統的な指数の議論と異なり、Divisia は時間を連続体として考え、商品価格及び数量を時間に関する微分可能な連続関数と仮定し、その集計である Divisia 指数を下記のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ln PI^{DV}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N}\omega_{it}\frac{d\ln p_{it}}{dt}, \frac{d\ln QI^{DV}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\omega_{it}\frac{d\ln q_{it}}{dt} \\
\frac{d\ln p_{it}}{dt} &= \frac{1}{p_{it}}\frac{dp_{it}}{dt}, \frac{d\ln q_{it}}{dt} = \frac{1}{q_{it}}\frac{dq_{it}}{dt} \\
\omega_{it} &= \frac{p_{it}q_{it}}{\sum_{i=1}^{N}p_{it}q_{it}}
\end{aligned}
$$

すなわち、各時点における支出(売上)シェアで価格と数量の時間変化率(時間に関する対数微分)を集計したものが Divisia 指数の対数時間微分となる。両辺を積分すると、下記のような Divisia 指数の水準を得ることができる。

$$
\ln PI^{DV}(t,t') = \int_{t}^{t'}\sum_{i=1}^{N}\omega_{i\tau}\frac{d\ln p_{i\tau}}{d\tau}d\tau, \ln QI^{DV}(t,t') = \int_{t}^{t'}\sum_{i=1}^{N}\omega_{i\tau}\frac{d\ln q_{i\tau}}{d\tau}d\tau
$$

[1] Divisia, F. (1952), Exposès dèconomique, Volume 1, Dunod, Paris.

。

このシンプルな物価指数はその後の物価指数研究に大きな影響を与え、その離散時間における近似式として連鎖指数や Tornqvist 指数などの対数型物価指数の展開を促した。近年では主に生産性分析で用いられている。現実のデータは時間に関する連続体ではないので、この定式化はあくまで理論上のものである。しかしながら、この指数は動学モデル、特にマクロモデルを展開する際に自然に導入することが可能であり、マクロモデルにその起源をもつ生産性分析において理論モデルを展開する際に非常に便利なものとなる。具体的には、経済成長理論における一里塚である Solow (1957)[2]において、Divisia の名前は出てこないものの、一般均衡動学モデル構築の中で上記の物価指数が登場しており、さらに Jorgenson and Griliches (1967)[3]が展開した生産性分析において Divisia 指数が実質化において極めて重要な役割を果たしている。

連続時間上の積分 (線積分) で定義されている Divisia 指数は、標準的な 2 時点間の物価・数量指数とは異なる性質を持っている。標準的な指数では、推移性が成立するのはごく稀であり、要素反転性と推移性は相反する要請であった。すなわち、要素反転性と推移性を一般に満たす指数は存在しなかった。しかし、連続時間で定義された Divisia 指数は推移性と要素反転性を同時にみたすと共に、Aggregation Consistency、0 次同次性等、指数が満たすべき基本公理のほとんどを満たしている[4]。さらに、標準的な指数が経済学的な生計費指数と一致するためには非常に特殊な関数形を仮定せねばならなかったが、Divisia 指数は、選好がホモセティック、あるいは生産技術が一次同次 (かつ完全競争市場) である場合は、その背後の理論モデルにおける関数形に依存せず、正しい生計費指数となる。すなわち、Divisia 指数は、公理的アプローチおよび経済学的アプローチの二つの観点から、望ましい物価指数の性質をほぼ全て有しているのである。

理論的には素晴らしい性質を有する Divisia 指数であるが、二つの問題がある。第一の問題は、現実のデータは連続時間上の関数ではないので、Divisia 指数を計算することは不可能であり、その近似式に頼らざるを得なくなるが、近似した場合、上記の素晴らしい性質のほとんどは消滅してしまうことである。ほぼ全ての公理をみたす Divisia 指数を、多くの公理を満たさない連鎖指数で近似することが、実際のデータでどのくらい許容されるのだろうか? そこで、70 年代には、Divisia 指数は様々な近似手法により離散化した場合、どのくらい理想的な公理から乖離するのかに関して非常に多くの分析がなされた。その代表的なものは Star and Hall (1976)[5]であり、おおむねポジティブ、すなわち Divisia 指数を Tornqvist 等の連鎖指数で近似することで十分な

[2] R. Solow (1957) "Technical Change and the Aggregate Production Function," *Review of Economics and Statistics*, 39 312-320.

[3] JORGENSON, D. W., AND Z. GRILICHES (1967) "The Explanation of Productivity Change," *Review of Economic Studies*, 34 , 249-283.

[4] ただし、恒等性と単調性は満たさない。これは後のセクションで議論する。

[5] Star, S., & Hall, R. (1976). An Approximate Divisia Index of Total Factor Productivity. *Econometrica*, 44(2), 257-263. doi:10.2307/1912722

精度を得られるという結果が報告されている。しかしながら、連鎖指数の講義ノートで議論したように、連鎖指数は標準的な指数が満たすべき重要な公理のほとんどを満たさないことを簡単な例で、それほど極端なケースを仮定せずに示すことが可能である。近年、POS データ等の高頻度データにより、高頻度、すなわち一年間や四半期よりもさらに短い期間、すなわち連続時間により近い形で連鎖指数を作成することが可能になっているが、高頻度データで作成された連鎖指数には、年次データで作成される連鎖指数よりも激しい、時に非現実的なトレンドが生じてしまう。支出シェアが、より高頻度になることより不安定になる、さらには価格や数量が時間に関して連続関数、あるいは微分可能な関数とみなすことが不適切であることに起因している。時間を短くすることで価格・数量の変化の絶対量は小さくならず、逆に大きくなってしまうケースは多く、近似計算する際の前提が成立していないのである。このため、Divisia 指数の離散近似としての連鎖指数は、現在の物価指数理論においては主要な地位を占めているとは言えない。

Divisia 指数の第二の問題は、2 時点の物価が、その 2 時点以外の価格・数量の情報に依存してしまう、すなわち、価格と数量の経路に依存してしまうことである。2 時点で価格が全く同一でも、その間に価格と数量がどのような経路を辿ったかにより物価指数の値が変化してしまうのである。このため、Divisia 指数は恒等性と単調性をみたさない。これは連鎖指数でも生じた問題である。しかしながら、数量が経済学的に決定されており、効用関数や生産関数が一次同次である場合、こうした問題が生じないことが知られている。効用関数の一次同次性、すなわちホモセティックな選好は強い仮定であるが、生産関数が一次同次であるというのは一般的なものであり、特に強い制約とは考えられていない。本講義ノートでは、Divisia 指数の、もっぱら連続時間上の性質について議論していく。

2 Divisia Index の導出と要素反転性

まず、2 期間、$[t,t'],(t<t')$ での、下記の Value Index を考える。

$$V\left(t,t'\right)=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}p_{it'}q_{it'}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}p_{it}q_{it}}$$

$$\ln V\left(t,t'\right)=\ln\left(\sum_{i=1}^{N}p_{it'}q_{it'}\right)-\ln\left(\sum_{i=1}^{N}p_{it}q_{it}\right)$$

第二式の右辺は、価格と数量が時間に関して微分可能な関数である場合、

下記のような積分として表記することが可能である。

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{N} p_{it'}q_{it'}\right) - \ln\left(\sum_{i=1}^{N} p_{it}q_{it}\right) = \int_{t}^{t'} \frac{d\ln\left(\sum_{i=1}^{N} p_{i\tau}q_{i\tau}\right)}{d\tau} d\tau$$

そして、

$$\begin{aligned}
\frac{d\ln\left(\sum_{i=1}^{N} p_{i\tau'}q_{i\tau'}\right)}{d\tau} &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_{i\tau}q_{i\tau}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i\tau}q_{i\tau}}\frac{dp_{i\tau}/d\tau}{p_{i\tau}} + \frac{p_{i\tau}q_{i\tau}}{\sum_{i=1}^{N} p_{i\tau}q_{i\tau}}\frac{dq_{i\tau}/d\tau}{q_{i\tau}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{N}(\omega_{i\tau})\frac{d\ln p_{i\tau}}{d\tau} + \sum_{i=1}^{N}(\omega_{i\tau})\frac{d\ln q_{i\tau}}{d\tau}
\end{aligned}$$

両辺を積分すると、

$$\ln PI^{DV}(t,t') = \int_{t}^{t'} \sum_{i=1}^{N} \omega_{it}\frac{d\ln p_{i\tau}}{d\tau}d\tau, \ln QI^{DV}(t,t') = \int_{t}^{t'} \sum_{i=1}^{N} \omega_{it}\frac{d\ln q_{i\tau}}{d\tau}d\tau$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\ln V(t,t') &= \ln PI^{DV}(t,t') + \ln QI^{DV}(t,t') \\
V(t,t') &= PI^{DV}(t,t') \times QI^{DV}(t,t')
\end{aligned}$$

を得る。これは、Divisia 指数が要素反転性を満たすことを示している。

3 Divisia 指数と基本公理

ここでは、Balk (2008) に従い、Divisia 指数といくつかの基本公理について整理する。

3.1 ゼロ次同次性と Commensurability

全ての時点と商品の価格を定数倍、$\lambda\,(>0)$ 倍するとどうなるだろうか?当然、

$$\frac{d\ln\lambda p_{it}}{dt} = \frac{1}{\lambda p_{it}}\frac{d\lambda p_{it}}{dt} = \frac{d\ln p_{it}}{dt}$$

である。したがって、Divisia 指数はゼロ次同次性をみたす。

また、数量の尺度を変え、価格を λ 倍、数量を $1/\lambda$ 倍しても、Divisia 指数は影響をうけないので、Commensurability もみたす。

3.2　推移性

ある、$t < t" < t'$ であるような $t"$ を考える。このとき、

$$\ln PI^{DV}\left(t, t'\right) = \ln PI^{DV}\left(t, t"\right) + \ln PI^{DV}\left(t", t'\right)$$

が常に成立するだろうか?

これは一般に、定積分の範囲分割、すなわち任意の積分可能な関数 $f\left(x\right)$ に関して、

$$\int_0^{t'} f\left(x\right) dx = \int_0^{t"} f\left(x\right) dx + \int_{t"}^{t'} f\left(x\right) dx$$

が成立することから、Divisia 指数が推移性を満たすことは明らかである。

3.3　Aggregation Consistency

いま N 種類の商品を $N_k\left(k = 1, 2, 3, ..., K\right)$ に分割したとしよう。グループ k に関する Divisia 指数は

$$\ln PI_k^{DV}\left(t, t'\right) = \int_t^{t'} \sum_{i=1}^{N_k} \omega_{i\tau}^k \frac{d \ln p_{i\tau}^k}{d\tau} d\tau$$

$$\omega_{i\tau}^k = \frac{p_{i\tau}^k q_{i\tau}^k}{\sum_{i=1}^{N_k} p_{i\tau}^k q_{i\tau}^k}$$

となる。積分の線形性より、Divisia 指数の積分を分割することが可能であり、

$$\begin{aligned}
\ln PI^{DV}\left(t, t'\right) &= \int_t^{t'} \sum_{i=1}^{N} \omega_{i\tau} \frac{d \ln p_{i\tau}}{d\tau} d\tau \\
&= \int_t^{t'} \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_k} p_{i\tau}^k q_{i\tau}^k}{\left(\sum_{i=1}^{N} p_{it} q_{it}\right)} \sum_{i=1}^{N_k} \omega_{i\tau}^k \frac{d \ln p_{i\tau}^k}{d\tau} \right) d\tau \\
&= \int_t^{t'} \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_k} p_{i\tau}^k q_{i\tau}^k}{\left(\sum_{i=1}^{N} p_{it} q_{it}\right)} \frac{d \ln PI_k^{DV}}{d\tau} \right) d\tau
\end{aligned}$$

となり、Divisia 指数は Aggregation Consistency を満たすことがわかる。

3.4 単調性と恒等性

t 期と t' 期の全ての期間で、全ての商品価格が増加した (減少しなかった) とする。すなわち、

$$\frac{d\ln p_{it}}{dt} \geq (>)\, 0 \quad \text{for all } i \text{ and } t.$$

Divisia 指数の定義を再確認すると、

$$\frac{d\ln PI^{DV}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \omega_{it} \frac{d\ln p_{it}}{dt} \geq (>)\, 0$$

すなわち、右辺は常に正 (非負) になっている。常に正の値をとる関数を積分すれば、その値もまた正になるはずである。従って、常に全ての価格が上昇し続ける場合は Divisia 指数は単調性をみたす。同様に、全期間における恒等性、すなわち、価格が時間に依らず一定、

$$\frac{d\ln p_{it}}{dt} = 0 \quad \text{for all } i \text{ and } t.$$

を仮定すると、

$$\frac{d\ln PI^{DV}}{dt} = 0$$

となり、やはり、Divisia 指数は恒等性をみたす。しかし、これらは非常に強い条件下の議論である。条件を弱め、

$$p_{it'} = p_{it} \qquad \text{for all } i \text{ and } t$$

とし、2 時点における価格が同一である状況を考えよう。この時、Divisia 指数は恒等性を満たすだろうか?Divisia 指数は線積分であり、線積分は一般に経路に依存してしまうため、恒等性は満たされない。これを数値例で確認してみる。0 期から 2 期までの、2 財のケースを考え、下記の価格の微分方程式を仮定しよう。

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 2 - (t-1)^2 \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= -2(t-1) \\ p_2(t) &= 1 + (t-1)^2 \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= 2(t-1) \end{aligned}$$

この状況では、0 期と 2 期の価格ベクトルはいずれも

$$\begin{aligned} (p_1(0), p_2(0)) &= (p_1(2), p_2(2)) \\ &= (1, 2) \end{aligned}$$

となる。もしも支出シェアが一定で、それぞれ $\omega, (1-\omega)$ であれば、Divisia 指数は下記のようになる。

$$\begin{aligned}
PI^{DV}(0,2) &= \exp\left(\int_0^2 \left(\omega \times \left(\frac{-2(t-1)}{2-(t-1)^2}\right) + (1-\omega) \times \left(\frac{2(t-1)}{1+(t-1)^2}\right)\right) dt\right) \\
&= \exp\left(\omega \int_0^2 \left(\left(\frac{-2(t-1)}{2-(t-1)^2}\right) dt + (1-\omega)\int_0^2 \left(\frac{2(t-1)}{1+(t-1)^2}\right)\right) dt\right) \\
&= \exp\left(\omega \int_0^2 \frac{-2(t-1)}{2-(t-1)^2} dt\right) \exp\left((1-\omega)\int_0^2 \left(\frac{2(t-1)}{1+(t-1)^2}\right) dt\right) \\
&= \exp\left(\omega \left[\ln\left(t^2-2t-1\right)\right]_0^2\right) \exp\left((1-\omega)\left[\ln\left(t^2-2t+2\right)\right]_0^2\right) \\
&= \exp(\omega \times 0) \exp((1-\omega) \times 0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

一般に、支出シェアが一定であれば、

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln PI^V}{dt} &= \int_0^t \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{d \ln p_{i\tau}}{d\tau} d\tau \\
&= \sum_{i=1}^N \omega_i \int_0^t \frac{d \ln p_{i\tau}}{d\tau} d\tau \\
&= \sum_{i=1}^N \omega_i \left(\ln p_{it} - \ln p_{i0}\right)
\end{aligned}$$

すなわち、支出シェアが一定の時、Divisia 指数は一般に恒等性をみたす。しかしながら、価格が変化しても支出シェアが変化しないというのは現実味的ではない。そこで、ad hoc であるが、支出シェアとして、

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{t-1}{4}\right) \\
w_2(t) &= \frac{1}{2} - \left(\frac{t-1}{4}\right)
\end{aligned}$$

を仮定しよう。すると、Divisia 指数は下記のようになる。

$$\begin{aligned}
&PI^{DV}(0,2) \\
&= \exp\left(\int_0^2 \left(\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{t-1}{4}\right)\right) \times \left(\frac{-2(t-1)}{2-(t-1)^2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{t-1}{4}\right)\right) \times \left(\frac{2(t-1)}{1+(t-1)^2}\right)\right) dt\right) \\
&= 0.630\,62 \neq 1
\end{aligned}$$

すなわち、Divisia 指数は恒等性をみたしていない。この式は二期目の価格に関して連続であるから、いずれかの価格を僅かに増加させても、Divisia 指

数の値は大きく変化しない。すなわち、価格が増加しても、Divisia 指数の値は 1 を下回り、単調性と矛盾するケースを作ることが可能になる。。

4　経路依存性

前節で議論したように、Divisia 指数は、連鎖指数と同様に、二時点間の価格が同一であっても物価指数が 1 になるとは限らず、恒等性や単調性が成立しない。しかしながら、価格と数量の間に経済学的な関係があり、関数形が一次同次であれば、経路に依存しないことが知られている。

いま、数量と価格の間に家計の合理的意思決定があると仮定し、支出関数

$$E_t = E\left(p_t, u_t\right)$$

が各期で定義されているとする。ここでさらに、耐久財や消費・貯蓄選択はないものとする。もしも選好がホモセティックであれば、支出関数は

$$E\left(p_t, u_t\right) = C\left(p_t\right) u_t$$

と表記可能である。支出シェアは

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln E\left(p_t, u_t\right)}{d \ln p_{it}} &= \frac{p_{it}}{E\left(p_t, u_t\right)} \frac{dE}{dp_{it}} \\
&= \frac{p_{it} q_{it}}{C\left(p_t\right) u_t}
\end{aligned}$$

となる。

ところで、支出関数を時間に関して微分すると、

$$\frac{d \ln E\left(p_t, u_t\right)}{dt} = \frac{1}{E\left(p_t, u_t\right)} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial E\left(p_t, u_t\right)}{\partial p_{it}} \frac{dp_{it}}{dt} + \frac{1}{E\left(p_t, u_t\right)} \frac{\partial E\left(p_t, u_t\right)}{\partial u_t} \frac{du_t}{dt}$$

選好がホモセテイックなら、

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln E\left(p_t, u_t\right)}{dt} &= \frac{1}{C\left(p_t\right) u_t} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial E\left(p_t, u_t\right)}{\partial p_{it}} \frac{dp_{it}}{dt} + \frac{C\left(p_t\right)}{C\left(p_t\right) u_t} \frac{du_t}{dt} \\
&= \frac{1}{C\left(p_t\right) u_t} \sum_{i=1}^{N} p_{it} q_{it} \frac{\frac{dp_{it}}{dt}}{p_{it}} + \frac{1}{u_t} \frac{du_t}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \omega_{it} \frac{d \ln p_{it}}{dt} + \frac{1}{u_t} \frac{du_t}{dt}
\end{aligned}$$

いま、効用水準が不変と仮定すると

$$\frac{d \ln E\left(p_t, u_t\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \omega_{it} \frac{d \ln p_{it}}{dt}$$

これは、Divisia 指数が、任意のホモセティック効用関数の、真の生計費指数となっていることを示している。左辺を積分すると、

$$\int_{t}^{t'} \frac{d \ln E\left(p_{\tau}, u\right)}{d\tau} d\tau = \ln E\left(p_{t'}, u\right) - \ln E\left(p_{t}, u\right)$$

これは二時点の価格ベクトルのみに依存しており、経路に依存しない。したがって、Divisia 指数は、その数量と価格が家計最適化行動と整合的であり、かつホモセテイックであれば、経路に依存しなくなる。

価格と数量が厳密に効用最大化や利潤最大化と整合的であれば、生計費指数と物価指数が一致し、様々な望ましい性質を有することは決して驚くべきことではない。例えば、生計費指数は支出関数の比で定義されるため、生計費指数は推移性をみたすし、単調性も一次同次性もみたす。CES 関数の生計費指数である Sato-Vartia 指数は推移性も単調性も満たさないが、もしも価格と数量の間に CES 関数が想定する関係が厳密に成立していれば、そのような価格と数量の関係を所与とすれば Sato-Vartia 指数も推移性と単調性を満たすことになる。もっとも、現実のデータが厳密に、特定のパラメターの下での経済モデルしたがって生成されているわけではないので、Sato-Vartia 指数は実際には推移性を満たさないのである。

しかしながら、ここでの驚くべき結果は、任意のホモセテイックな選好のもとで、Divisia 指数が生計費指数と一致することであろう。選好を生産技術に置き換え、完全競争市場を仮定すると、限界生産性価値が生産要素価格と一致することになり、総売上高の対数変化を各構成要素の時間微分を費用シェアで加重平均したもので表すことが可能になり、売上高変化を Divisia の価格・数量指数に分解することが可能になる。

4.1 連続時間の Divisia 指数に関するまとめ

以上の結果をまとめる次のようになる。

(1) Divisia 指数は、選好がホモセティックの場合の生計費指数に一致する。

(2) Divisia 指数は、要素反転性、推移性、一次同次性、0 次同次性、Commensurability、および Aggregation Consistency を満たす。

(3) Divisia 指数は、全期間の価格が一定の場合は 1 になり、全期間の価格が上昇し続けている場合は 1 を超える。

(4) Divisid Index は、2 時点における価格に関しては、単調性と恒等性を満たさない。

(5) 選考がホモセティックのとき、Divisia 指数は経路依存性がなくなり、単調性と恒等性をみたす。

5 終わりに (離散近似)

Divisia 指数が要素反転性や推移性を満たしているのであれば、その離散近似もまた、要素反転性や推移性を厳密には無理でも、ある程度の精度で満たすことは可能ではなかろうか?特に、Divisia 指数の自然な離散近似である Tornqvits の連鎖指数は、そうした良い指数の候補になるのではなかろうか?このような問題意識のもとに、70 年代には非常に多くの研究が Divisia 指数の近似に関してなされた。Trivedi (1981)[6]は Tornqvist 指数がベストの近似式であることを示し、高い近似精度が実現されているとしている。Star and Hall (1976) は連続時間を年次という長期間のデータで近似しても、ウェイトの取り方を工夫することで連鎖指数が高い精度の近似になることを示している。これらの近似計算では、真の価格、数量、および支出シェアが時間に関して微分可能な関数であるという前提にたって議論している。しかしながら、実際の取引データでは、価格や数量は時間の連続関数とは言い難い動きをしており、特に短期の POS データでは、支出シェアや価格が長期のデータよりもはるかに大きな変動を示している。本来不連続、あるいは微分不可能な関数を連続関数とみなし、その仮定のまま離散近似を行うと、実際のデータとは全く異なる動きをしかねない。連鎖指数の講義ノートで紹介したように、POS データに基づく Tornqvist の連鎖指数は非現実的な負のトレンドを持っており、Tronqvist 指数は明らかに推移性を満たしていない。70 年代から 80 年代にかけて行われた Divisia 指数の離散近似の精度の分析は、より高頻度の取引データが利用可能になった今日では、その議論の妥当性に関して強い疑問が投げかけられていると言えるだろう。

[6]Trivedi, P K, 1981. "Some Discrete Approximations to Divisia Integral Indices," International Economic Review, Department of Economics, University of Pennsylvania and Osaka University Institute of Social and Economic Research Association, vol. 22(1), pages 71-77, February.