2019年地域経済各論 (日本)　講義ノート 11

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 31 年 12 月 5 日

概 要

連鎖指数

1　連鎖指数:導入

連鎖指数、Chain Index は、三時点以上の時点がある場合、標準的な二時点の価格指数の基準時を毎期変更し、価格指数を乗じていくことで、一期間以上離れた時点間の価格指数を計算するものである。連鎖指数の歴史は古く、19 世紀末に Alfred Marshall が、時点により商品が異なる影響を緩和するために、基準時を変更する必要性を指摘している[1]。連鎖指数については、Fisher や Walsh も、厳密な理論展開はしていないものの、Positive な評価を与えている[2]。さらに、Frisch が 1936 年の展望論文において連鎖指数のドリフトについて詳細な考察を行うことで連鎖ドリフトの存在が多くの人の知るところとなり、Divisia 指数の展開と共に連鎖指数の研究もおこなわれるようになった。そして、連鎖指数は 1993 年に発表された 93SNA[3]において、GDP デフレーターとして使用することが望ましいとされた。そのため、今日では多くの国の SNA のデフレーターとして採用されている。また後に議論する Divisia Index の離散近似として生産性分析において広く用いられている。さらに、近年使われ始めている高頻度データ、POS データや web scraping 等により生成されたデータを活用する際、また、財の登場、消滅が激しい場合の現実的な指数として、学術的にも注目されている。一方、連鎖指数は、通常の指数と比

[1] A. Marshall, (1887), Contemporary Review, March.

[2] Fisher 及び Walsh による連鎖指数の評価に関しては、 W.E. Diewert　(2005) “ Some issues concerning index number theory,” Paper presented at the ESRI “Conference on the Next Steps for the Japanese System of National Accounts: Towards More Accurate Measurement and More Comprehensive Accounts”, held in Tokyo, March 24-25, 2005 が紹介している。

[3] Hill, T.P. (1993), “Price and Volume Measures”, pp. 379-406 (Chapter 16) in System of National Accounts 1993, Eurostat, IMF, OECD, UN and World Bank, Luxembourg, Washington, D.C., Paris, New York, and Washington, D.C.

べ、指数として制約が強いことが知られている。例えば、ラスパイレス指数は Aggregation Consistet であるが、それを連鎖指数にすると、Aggregation Consistency は満たされなくなってしまう。他にも、指数理論の公理・テストアプローチの視点からは、連鎖指数を正当化することは難しい。連鎖指数の、指数理論上の諸問題については、指数理論の大物、Peter von der Lippe による著作[4]で詳しく説明されている。

二時点間の価格指数を計算する際に、その二時点の情報のみを用いて計算するのがこれまで議論してきた標準的な価格指数、二時点間の期間の情報を含めて計算するものが連鎖指数であり、両者は、時点が離れるほど、また時点間で考慮する情報が多いほど乖離していく傾向にある。連鎖指数と標準的な指数算式の、数学上の定義の違いは単純である。様々な期間の価格指数の積で定義されているのが連鎖指数であり、標準的な価格指数は、連鎖が一つもない特殊な状況と考えることも可能である。しかしながら、指数としての違い、さらに実際に計算される値の違い (連鎖ドリフト) は大きく、たとえばラスパイレス指数であったも、標準的なラスパイレス指数と連鎖のラスパイレス指数は全く異なるものなってしまう。そのため、Balk (2008) は、二つの指数算式の選択は、二つのパラダイムの選択である (p. 125) であると述べている。

連鎖指数とはどのような指数であり、いかなる問題があるのか、それに対してどのような努力がされているか、本講義で紹介する。

2　連鎖指数と連鎖ドリフト

二時点、0 期と t 期を考える。この二時点の中に、複数の時点があり、0, 1, 2, 3,...,$\tau-1$,τ, $\tau+1, ..., t$ となっているとする。二時点間、$\tau-1$ と τ の間の価格指数を $P\left(\tau-1,\tau\right)$ とすると、連鎖価格指数 $P^{c}\left(0,t\right)$ は

$$P^{c}\left(0,t\right)=\prod_{t=1}^{t}P\left(\tau-1,\tau\right)$$

と定義される。ここで、$P\left(\tau-1,\tau\right)$ はこれまで議論してきた価格指数、たとえばラスパイレス指数や Sato-Vartia、Stubel 等、どのような指数であってもかまわない。すなわち、連鎖指数は、その基本となる指数算式により、連鎖ラスパイレス、連鎖パーシェ、連鎖フィッシャー等、様々な連鎖指数がありうる。

まず、連鎖ラスパイレス指数を考えよう。すなわち、

$$P^{cL}\left(0,t\right)=\prod_{\tau=1}^{t}P^{L}\left(\tau-1,\tau\right)$$

[4] Lippe (2007) Index Theory and Price Statistics, Peter Lang GmbH

である。ここで、Frisch (1936) に従い[5]、ドリフト関数と呼ばれる下記の式を考える。

$$D\left(0,t\right)=\frac{P^{cL}\left(0,t\right)}{P^{L}\left(0,t\right)}$$

$\tau=0,1,2$ の三期間のみを考えると、

$$P^{cL}\left(0,2\right)=P^{L}\left(0,1\right)\times P^{L}\left(1,2\right)$$

$$D\left(0,2\right)=\frac{P^{L}\left(0,1\right)\times P^{L}\left(1,2\right)}{P^{L}\left(0,2\right)}$$

分母は 0 期と 2 期の間の直接のラスパイレス指数であり、分子は連鎖ラスパイレス指数である。$D\left(0,2\right)=1$ であれば連鎖指数と直接の指数は一致するが、これは指数が推移性を有していることを意味している。

ラスパイレス指数とパーシェ数量指数 (あるいはラスパイレス数量指数とパーシェ価格指数) を乗じると、Value Index となっていた。これは連鎖指数でも成立するのだろうか?Value Index は明らかに推移性をみたす。すなわち、

$$\begin{aligned}V_{02}&=V_{01}\times V_{12}\\&=\frac{\sum_{j}p_j^1q_j^1}{\sum_{k}p_k^0q_k^0}\times\frac{\sum_{j}p_j^2q_j^2}{\sum_{k}p_k^1q_k^1}\end{aligned}$$

各期の Value Index はそれぞれラスパイレス指数とパーシェ数量指数に分解すると、

$$\begin{aligned}V_{02}&=V_{01}\times V_{12}\\&=P^{L}\left(0,1\right)\times Q^{P}\left(0,1\right)\times P^{L}\left(1,2\right)\times Q^{P}\left(1,2\right)\\&=P^{L}\left(0,1\right)\times P^{L}\left(1,2\right)\times Q^{P}\left(0,1\right)\times Q^{P}\left(1,2\right)\\&=P^{CL}\left(0,2\right)\times Q^{CP}\left(0,2\right)\end{aligned}$$

すなわち、連鎖のラスパイレス価格指数とパーシェ数量指数は、乗じると Value Index となる。すなわち、ラスパイレス価格指数、あるいは数量指数はパーシェ数量指数、あるいは価格指数の Co-Factor となっている。この性質を用いると、ラスパイレス数量指数の連鎖ドリフトは、

[5] Frisch (1936) は $D\left(0,t\right)$ を Triangle Divergency と名付けている。

$$
\begin{aligned}
D^{LQ}(0,2) &= \frac{Q^L(0,1)\times Q^L(1,2)}{Q^L(0,2)} \\
&= \frac{\big(V_{01}/P^P(0,1)\big)\times\big(V_{12}/P^P(1,2)\big)}{\left(V_{02}/P^P(0,2)\right)} \\
&= \frac{P^P(0,2)}{P^P(0,1)\times P^P(1,2)} \\
&= \frac{1}{D^P(0,2)}
\end{aligned}
$$

これは、ラスパイレス数量指数の連鎖ドリフトは、パーシェ価格指数の連鎖ドリフトの逆数であることを示している。もしもバーシェ価格指数のドリフトが 1 よりも大きければ、ラスパイレス数量指数のドリフトは 1 よりも小さくなっている。

3 連鎖指数とラスパイレス・パーシェギャップの関係

連鎖指数が SNA において現在用いられている最大の理由は、通常の指数に比べ、ラスパイレス指数とパーシェ指数の乖離が小さくなることが挙げられる[6]。しかしながら、ラスパイレスう指数とパーシェ指数の乖離が常に生じるとは限らないように、連鎖指数のラスパイレス・パーシェ指数のギャップが常に小さくなるとは限らない。R. Hill (2006)[7]は、連鎖指数によるラスパイレス・パーシェ間のギャップが通常の指数よりも小さくなる、あるいは大きくなるための十分条件を示している。まず、以下のような分散・共分散を定義する。

$$
\sigma_{pq}^{01} = \left[\sum w_j^0\left(\frac{p_j^1}{p_j^0} - P_{01}^L\right)\left(\frac{q_j^1}{q_j^0} - Q_{01}^L\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^{01} &= \left[\sum w_j^0\left(\frac{p_j^1}{p_j^0} - P_{01}^L\right)^2\right]^{1/2} \\
\sigma_q^{01} &= \left[\sum w_j^0\left(\frac{q_j^1}{q_j^0} - Q_{01}^L\right)\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

連鎖ラスパイレスの一度のドリフト関数を変形すると、

[6] P. Hill (1993) p. 487, Section 16.51 を参照せよ。

[7] Hill RJ. (2006) "When does chaining reduce the Paasche–Laspeyres spread? An application to scanner data," *Review of Income and Wealth* 52: 309–325.

$$
\begin{aligned}
P_{01}^L P_{12}^L / P_{02}^L =& \frac{\sum p_j^1 q_j^0}{\sum p_j^0 q_j^0} \frac{\sum p_j^2 q_j^1}{\sum p_j^1 q_j^1} \frac{\sum p_j^0 q_j^0}{\sum p_j^2 q_j^0} \\
&= \frac{\sum p_j^2 q_j^1}{\sum p_j^1 q_j^1} \frac{\sum p_j^1 q_j^0}{\sum p_j^2 q_j^0}
\end{aligned}
$$

ところで、

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum p_j^2 q_j^0}{\sum p_j^1 q_j^1} &= \sum \frac{p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^1 q_j^1} \left(\frac{p_j^2}{p_j^1} \right) \frac{q_j^0}{q_j^1} \\
&= \sum w_j^1 \left(\frac{p_j^2}{p_j^1} \right) \frac{q_j^0}{q_j^1}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum p_j^1 q_j^0}{\sum p_j^2 q_j^0} &= \frac{\sum p_j^1 q_j^0}{\sum p_j^2 q_j^0} \frac{\sum p_j^2 q_j^0}{\sum p_j^1 q_j^1} \frac{\sum p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^2 q_j^0} \\
&= \frac{\sum p_j^1 q_j^0}{\sum p_j^1 q_j^1} \frac{\sum p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^2 q_j^0} \\
&= \frac{\sum w_j^1 \left(\frac{q_j^0}{q_j^1} \right)}{\sum w_j^1 \left(\frac{p_j^2}{p_j^1} \right) \frac{q_j^0}{q_j^1}}
\end{aligned}
$$

もとのドリフト関数に代入すると、

$$
P_{01}^L P_{12}^L / P_{02}^L = \frac{\sum w_j^1 \left(\frac{q_j^0}{q_j^1} \right) \sum w_j^1 \left(\frac{p_j^2}{p_j^1} \right)}{\sum w_j^1 \left(\frac{p_j^2}{p_j^1} \right) \frac{q_j^0}{q_j^1}}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \sum \alpha_j x_j \\
\overline{y} &= \sum \alpha_j y_j \\
\sum \alpha_j &= 1
\end{aligned}
$$

とすると、

$$\sum \alpha_j x_j y_j = \overline{x}\ \overline{y} + \sigma_x \sigma_y r_{xy}$$
$$= \overline{x}\ \overline{y} + \sigma_{xy}$$

いま、価格と数量の比 (時点がずれていることに注意せよ) を x, y とすると、

$$x_j = \frac{q_j^0}{q_j^1}, y_j = \frac{p_j^2}{p_j^1}, \alpha_j = w_j^1$$

このとき、

$$\overline{x} = Q^L(1,0), \overline{y} = P^L(1,2)$$

したがって、

$$P_{01}^L P_{12}^L / P_{02}^L = \frac{\overline{x}\ \overline{y}}{\overline{x}\ \overline{y} + \sigma_{xy}}$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{\sigma_{xy}}{\overline{x}\ \overline{y}}}$$

すなわち、連鎖ドリフトが正であるための、下記の必要十分条件を得る。

$$P_{01}^L P_{12}^L / P_{02}^L > 1 \quad \text{if and only if } \sigma_{xy} < 0$$

次に、パーシェ指数のドリフト関数を考えると、

$$P_{01}^P P_{12}^P / P_{02}^P = \frac{\sum p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^0 q_j^1} \frac{\sum p_j^2 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^2} \frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^2 q_j^2}$$
$$= \frac{\sum p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^0 q_j^1} \frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^2}$$
$$= \frac{\frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^2}}{\frac{\sum p_j^0 q_j^1}{\sum p_j^1 q_j^1}}$$
$$= \frac{\frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^2}}{\sum w_j^1 \left(\frac{p_j^0}{p_j^1}\right)}$$

前回と同様に

$$\frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^1} = \sum \frac{p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^1 q_j^1} \left(\frac{q_j^2}{q_j^1}\right) \frac{p_j^0}{p_j^1}$$

に注意して下記の展開を行うと

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^2} &= \frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^2} \frac{\sum p_j^1 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^1} \frac{\sum p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^1 q_j^2} \\
&= \frac{\sum p_j^1 q_j^1}{\sum p_j^1 q_j^2} \frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^1} \\
&= \frac{\frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^1}}{\frac{\sum p_j^1 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^1}} \\
&= \sum w_j^1 \left(\frac{p_j^0}{p_j^1} \right) \frac{q_j^2}{q_j^1} / \sum w_j^1 \left(\frac{q_j^2}{q_j^1} \right)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
x_j = \frac{q_j^2}{q_j^1}, y_j = \frac{p_j^0}{p_j^1}, \alpha_j = w_j^1
$$

すると、

$$
\begin{aligned}
P_{01}^P P_{12}^P / P_{02}^P &= \frac{\frac{\sum p_j^0 q_j^2}{\sum p_j^1 q_j^2}}{\sum w_j^1 \left(\frac{p_j^0}{p_j^1} \right)} \\
&= \frac{\sum w_j^1 \left(\frac{p_j^0}{p_j^1} \right) \frac{q_j^2}{q_j^1}}{\sum w_j^1 \left(\frac{p_j^0}{p_j^1} \right) \sum w_j^1 \left(\frac{q_j^2}{q_j^1} \right)} \\
&= \frac{\overline{x}\ \overline{y} + \sigma_{xy}}{\overline{x}\ \overline{y}} \\
&= 1 + \sigma_{xy} \frac{1}{\overline{x}\ \overline{y}}
\end{aligned}
$$

したがって、パーシェ指数の連鎖ドリフトが負であるための必要十分条件として下記を得る。

$$
P_{01}^P P_{12}^P / P_{02}^P < 1 \quad \text{if and only if}
$$

$$
\sigma_{xy} < 0
$$

ラスパイレス・パーシェギャップは

$$
P^L(0,1) / P^P(0,1) = P^L(0,1) Q^L(0,1) / V(0,1)
$$

ここで、ラスパイレス数量指数とパーシェ価格指数が Co-Factor になっていることを用いると、

$$
\begin{aligned}
P^P(0,1)\,Q^L(0,1) &= V(0,1) \\
P^P(0,1) &= \frac{V(0,1)}{Q^L(0,1)}
\end{aligned}
$$

さらに、

$$
x_j = \frac{q_j^1}{q_j^0}, y_j = \frac{p_j^1}{p_j^0}, \alpha_j = w_j^1
$$

とすると、前の講義ノートで Bortkiewicz Decomposition として紹介した下記の結果を得る。

$$
\begin{aligned}
P^L(0,1)/P^P(0,1) &= \frac{Q^L(0,1)\,P^L(0,1)}{V(0,1)} \\
&= \frac{\left(\sum w_j^0 \frac{p_j^1}{p_j^0}\right)\left(\sum w_j^0\left(\frac{q_j^1}{q_j^0}\right)\right)}{\left(\sum w_j^0\left(\frac{q_j^1}{q_j^0}\right)\frac{p_j^1}{p_j^0}\right)} \\
&= \frac{\overline{x}\;\overline{y}}{\overline{x}\;\overline{y} + \sigma_{xy}}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{gathered}
P^L(0,1)/P^P(1,1) > 1 \quad \text{if and only if} \\
\sigma_{xy} < 0
\end{gathered}
$$

以上の結果をまとめると

$$
\begin{gathered}
P_{01}^L P_{12}^L / P_{02}^L > 1 \quad \text{if and only if } \sigma_{xy} < 0 \\
Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1}, \frac{p_j^2}{p_j^1}\right) < 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
P_{01}^P P_{12}^P / P_{02}^P < 1 \quad \text{if and only if} \\
Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1}, \frac{p_j^0}{p_j^1}\right) < 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
P^L(0,1)/P^P(0,1) > 1 \quad &\text{if and only if} \\
Cov\left(\frac{q_j^1}{q_j^0}, \frac{p_j^1}{p_j^0}\right) &< 0
\end{aligned}
$$

連鎖によるパーシェ・ラスパイレスギャップを下記のように定義する。

$$PLS_{02}^{C}=\frac{\max\left[P^{P}\left(0,1\right)P^{P}\left(1,2\right),P^{L}\left(0,1\right)P^{L}\left(1,2\right)\right]}{\min\left[P^{P}\left(0,1\right)P^{P}\left(1,2\right),P^{L}\left(0,1\right)P^{L}\left(1,2\right)\right]}$$

すなわち、分母には連鎖のラスパイレスとパーシェどちらか小さいほう、分子には大きい方が入る。通常の指数のギャップは

$$PLS_{02}^{D}=\frac{\max\left[P^{P}\left(0,2\right),P^{L}\left(0,2\right)\right]}{\min\left[P^{P}\left(0,2\right),P^{L}\left(0,2\right)\right]}$$

どのような時に、連鎖指数のパーシェギャップは標準的な指数の時よりも小さくなるだろうか?すなわち、下記の不等式はいつ成り立つだろうか?

$$PLS_{02}^{C}<PLS_{02}^{D}$$

まず、

$$Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)>0,Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^0}{p_j^1}\right)>0,Cov\left(\frac{q_j^1}{q_j^0},\frac{p_j^1}{p_j^0}\right)<0,Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)<0$$

が成立しているとしよう。なお、最後の共分散は 1 期から 2 期にかけて、ラスパイレス指数がパーシェ指数を超えるための必要十分条件である。すなわち、後ろの二つの共分散の符号により下記が成立している。

$$P^{L}\left(1,2\right)>P^{P}\left(1,2\right)$$
$$P^{L}\left(0,1\right)>P^{P}\left(0,1\right)$$

また、最初の二つの共分散の符号より

$$P_{01}^{L}P_{12}^{L}<P_{02}^{L},$$
$$P_{01}^{P}P_{12}^{P}>P_{02}^{P}.$$

したがって、

$$\begin{aligned}PLS_{02}^{D}&=\frac{\max\left[P^{P}\left(0,2\right),P^{L}\left(0,2\right)\right]}{\min\left[P^{P}\left(0,2\right),P^{L}\left(0,2\right)\right]}\\&=\frac{P^{L}\left(0,2\right)}{P^{P}\left(0,2\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PLS_{02}^{C}&=\frac{P^{L}\left(0,1\right)P^{L}\left(1,2\right)}{P^{P}\left(0,1\right)P^{P}\left(1,2\right)}\\&<\frac{P^{L}\left(0,2\right)}{P^{P}\left(0,2\right)}\end{aligned}$$

したがって、連鎖指数のラスパイレス・パーシェギャップが通常の指数よりも小さくなるための十分条件は、

$$Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)>0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^0}{p_j^1}\right)>0, Cov\left(\frac{q_j^1}{q_j^0},\frac{p_j^1}{p_j^0}\right)<0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)<0$$

である。同様に、

$$Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)<0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^0}{p_j^1}\right)<0, Cov\left(\frac{q_j^1}{q_j^0},\frac{p_j^1}{p_j^0}\right)>0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)>0$$

もまた十分条件であることを容易に示すことが可能である。

一方、もしも全ての共分散が同じ符号であれば、すなわち、

$$Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)>0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^0}{p_j^1}\right)>0, Cov\left(\frac{q_j^1}{q_j^0},\frac{p_j^1}{p_j^0}\right)>0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)>0$$

もしくは

$$Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)<0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^0}{p_j^1}\right)<0, Cov\left(\frac{q_j^1}{q_j^0},\frac{p_j^1}{p_j^0}\right)<0, Cov\left(\frac{q_j^2}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)<0$$

であれば、連鎖指数のパーシェギャップは通常の指数よりも大きくなることもまた容易に示すことができる。

これら四つの共分散のうち、最後の二つは同時点における価格と数量の符号であるため負になることが想定されるが、最初の二つの符号については先天的に言えることは少ない。特売における価格と数量のスイングがある場合、例えば、1 期から 2 期にかけて価格が下落し、同時点において数量が増加、2 期から 3 期にかけて価格が上昇し数量が下落、3 期から 4 期にかけて価格が再度低下し数量が増加した場合、価格変化と、一期先、あるいは一期前の数量変化の間には正の相関が生じる。このとき、$Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1},\frac{p_j^2}{p_j^1}\right)$ は、負になる可能性が高い (常にそうなるとは限らない)。この場合、連鎖ドリフトは大きくなり、連鎖指数のラスパイレス・パーシェギャップは通常よりも大きくなってしまう。このようなケースは決して特殊な状況ではない。連鎖指数が標準的な指数よりもラスパイレス・パーシェのギャップを小さくするとは言えないどころか、逆に拡大させる可能性は決して少なくないのである。連鎖指数が、特売や季節性変動によって望ましくない性格を有することは Frisch (1936) の頃より知られており、P.Hill (1993) でも、SNA において連鎖指数を導入する際、季節性変動がない商品に限定することが推薦されている。季節変動がな

く、価格や数量が単調に変化する場合は連鎖指数が望ましいと議論することもあるが (P. Hill (1993) 等)、R. Hill (2006) は必ずしもそうならないことを理論的、実証的に示している。連鎖指数が、通常の指数に比べて、ラスパイレス・パーシエギャップを縮小させるとは、たとえ季節変動がなくとも明確には言えないのである。

4　連鎖指数の恒常性

連鎖ドリフトは、連鎖指数と標準的な指数の間の乖離であるが、その乖離は、時間と共に変化していくのだろうか?ドリフト、という単語の中にはトレンドの違いは必ずしも入っていないが、もしも連鎖指数と標準的な指数でトレンドが異なるのであれば、それは由々しき問題となる。前節で行った展開を用いて、0 期と 3 期の間の連鎖ドリフトを考えると[8]、

$$
\begin{aligned}
D(0,3) &= P^L_{01}P^L_{12}P^L_{23}/P^L_{03} \\
&= \left(P^L_{01}P^L_{12}/P^L_{02}\right) \times \frac{P^L_{02}}{P^L_{03}} P^L_{23} \\
&= D(0,2) \times \frac{P^L_{02}}{P^L_{03}} P^L_{23}.
\end{aligned}
$$

ここで、下記のように変形し、

$$
\begin{aligned}
\frac{P^L_{02}}{P^L_{03}} P^L_{23} &= \frac{\sum p^0_j q^0_j}{\sum p^3_j q^0_j} \frac{\sum p^2_j q^0_j}{\sum p^0_j q^0_j} \frac{\sum p^3_j q^2_j}{\sum p^2_j q^2_j} \\
&= \frac{\sum p^3_j q^2_j}{\sum p^3_j q^0_j} \frac{\sum p^2_j q^0_j}{\sum p^2_j q^2_j} \\
&= \frac{\sum p^3_j q^2_j}{\sum p^3_j q^0_j} \frac{\sum p^2_j q^0_j}{\sum p^2_j q^2_j} \frac{\sum p^3_j q^0_j}{\sum p^2_j q^2_j} \frac{\sum p^2_j q^2_j}{\sum p^3_j q^0_j} \\
&= \frac{\sum p^3_j q^2_j}{\sum p^2_j q^2_j} \frac{\sum p^2_j q^0_j}{\sum p^2_j q^2_j} \frac{\sum p^2_j q^2_j}{\sum p^3_j q^0_j}
\end{aligned}
$$

かつ、下記の変換を考えると

[8] ドリフト関数の一般形は Lippe (2007) が展開しているが、かなり特殊な集計を行っており、パーシェ指数への応用が困難になっている。Hill (2006) はより自然かつ様々に応用可能な集計を行っているが、二つの標準的な指数を乗じた、掛け算が一度だけの連鎖指数の場合のみ計算している。このセクションは Hill の共分散表記を Lippe (2007) の展開に応用したものである。Lippe の共分散表記よりも Hill (2006) の展開のほうが Paasche 指数などへの応用が容易なためである。

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum p_j^2 q_j^2}{\sum p_j^3 q_j^0} &= \sum \frac{p_j^2 q_j^2}{\sum p_j^2 q_j^2}\left(\frac{p_j^3}{p_j^2}\right)\frac{q_j^0}{q_j^2} \\
&= \sum w_j^2 \left(\frac{p_j^3}{p_j^2}\right)\frac{q_j^0}{q_j^2}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
x_j = \frac{q_j^0}{q_j^2}, y_j = \frac{p_j^3}{p_j^2}, \alpha_j = w_j^2
$$

と定義すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{P_{02}^L}{P_{03}^L} P_{23}^L &= \frac{\left(\sum w_j^2 \left(\frac{q_j^0}{q_j^2}\right)\right)\left(\sum w_j^2 \left(\frac{p_j^3}{p_j^2}\right)\right)}{\sum w_j^2 \left(\frac{p_j^3}{p_j^2}\right)\frac{q_j^0}{q_j^2}} \\
&= \frac{\overline{x}\ \overline{y}}{\overline{x}\ \overline{y} + \sigma_{xy}}
\end{aligned}
$$

したがって、上の式が 1 を超える、すなわちドリフト関数が 2 期から 3 期にかけて増加するための必要十分条件は

$$
\sigma_{xy} < 0
$$

すなわち、

$$
Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^2}, \frac{p_j^3}{p_j^2}\right) < 0
$$

である。

ところで、0 期から 2 期にかけてのドリフト関数が 1 よりも大きい、すなわち連鎖指数が標準的な指数よりも大きくなるための必要十分条件は

$$
Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^1}, \frac{p_j^2}{p_j^1}\right) < 0
$$

であった。この条件と上の条件式と比較すると、価格変化に関しては一期ずれているが、数量変化に関しては 0 期から 1 期ではなく、0 期から 2 期までの変化になっていることに注意する必要がある。

0 期から 3 期までのドリフト関数は、0 期から 2 期までのドリフト関数に、上記の項を乗じたものになる。すなわち、

$$
D\left(0,3\right) = D\left(0,2\right) \times \left(\frac{\overline{x}\ \overline{y}}{\overline{x}\ \overline{y} + \sigma_{xy}}\right)
$$

	例1:　恒等性					
	0		1		2	
	price	quantity	price	quantity	price	quantity
財1	1	3	3	2	1	3
財2	2	4	4	3	2	4
	PL(0,1)	2.2727	PL(1,2)	0.4444	CPL(0,2)	1.0101
			PL(0,2)	1		

を得る。より一般的には、

$$D\left(0,t\right)=D\left(0,t-1\right)\times\left(\frac{\left(\sum w_j^{t-1}\left(\frac{q_j^0}{q_j^{t-1}}\right)\right)\left(\sum w_j^{t-1}\left(\frac{p_j^t}{p_j^{t-1}}\right)\right)}{\sum w_j^{t-1}\left(\frac{p_j^t}{p_j^{t-1}}\right)\frac{q_j^0}{q_j^{t-1}}}\right)$$

と表記することが可能である。この式は、ドリフト関数が一旦増加、あるいは減少すると、その効果が永続的に続くことを示唆している。無論、$Cov\left(\frac{q_j^0}{q_j^2},\frac{p_j^3}{p_j^2}\right)$ は 0 期および 1 期の情報に依存しており、2 期以降の情報のみの関数ではないため、ドリフト関数はマルチンゲール・ランダムウォークになっているわけではないので、恒常性の証明にはなっていないが、そうした傾向がある可能性は強い。

5　連鎖指数と主要公理

連鎖のラスパイレス指数は、標準的な指数と比べて、どのような基本的な性質を有するだろうか?標準的なラスパイレス指数は、単調性、恒等性、一次同次性、Aggregation Consistency をみたしていた。これらの性質は連鎖のラスパイレス指数でも保持されるのだろうか?これらの結果はおしなべてネガティブである。

5.1　恒等性

例 1 は恒等性の確認の例である。0 期と 2 期で価格は不変であり、そのため標準的なラスパイレス指数では恒等性をみたし、1 となっている。しかし、連鎖指数では 1.01 と 1 になっていない。連鎖ドリフトが発生しているのである。連鎖ドリフトの公式からは、価格と数量の (時期のずれた) 共分散が 0 でない限り連鎖ドリフトは発生してしまう。そのため、0 期と 2 期の価格が全く

	例2:　一次同次性					
	0		1		2	
	price	quantity	price	quantity	price	quantity
財1	1	3	3	2	2	2
財2	2	4	4	3	4	2
	PL(0,1)	2.2727	PL(1,2)	0.8889	CPL(0,2)	2.0202
			PL(0,2)	2		

	例3:　単調性					
	0		1		2	
	price	quantity	price	quantity	price	quantity
財1	1	3	0.5	2	1	2
財2	2	4	10	3	2.01	2
	PL(0,1)	3.7727	PL(1,2)	0.2590	CPL(0,2)	0.9773
			PL(0,2)	1.0036		

		例4:　Aggregation Consistency					
		0		1		2	
		price	quantity	price	quantity	price	quantity
1	財1	1	3	3	2	5	2
	財2	2	4	4	3	6	1
2	財3	2	4	3	2	7	1
	財4	3	5	5	3	8	2
	PL(1)	PL(0,1;1)	2.2727	PL(1,2;1)	1.5556	CPL(0,2,1)	3.5354
		PL(0,1;2)	1.6087	PL(1,2;2)	1.8095	CPL(0,2,2)	2.9110
				PL(0,1)	1.8235	PL(0,2)	3.1471
				WCPL(0,1)	1.8235	WCPLS(0,2)	3.1130

同じであり、ラスパイレス指数・あるいはパーシェ指数が 1 であっても、連鎖指数は一般に 1 にはならず、1 になるのは共分散がちょうどゼロになる特殊な状況でしかないことになる。恒等性の欠如は深刻な問題である。価格指数の役割が、多くの商品価格が全体としてどう変化したかを記述する数値であるとすると、個々の商品価格が全く変化していない状況で、価格指数が変化してしまうのは、そうした役割を果たしているとは言えない。そして、物価の上昇・下落の決定要因が価格と数量の共分散であるとすると、価格指数で計測しているものが果たしてなんであるのか、わからなくなってくる。

5.2 一次同次性

例 2 は一次同次性確認の例であり、0 期と 2 期では価格が二倍になっている。しかしながら、連鎖指数では物価は 2 を超えてしまっており、一次同次性を満たしていないことがわかる。一次同次性の欠如は、Varita I や Stuvel 指数にも生じる特徴であり、連鎖指数に固有のものではない。しかし、大きな価格変化が生じる場合、例えば異なる通貨を採用する諸国間の比較を行う場合、一次同次性の欠如は深刻な問題になりうる。

5.3 単調性

例 3 は単調性の確認の例である。2 期では第 2 財の価格が上昇しており、第 1 財の価格は不変であることから、単調性を満たしていれば、物価は上昇していなければならないが、連鎖指数では逆に下がってしまっている。連鎖指数は単調性を満たしていない。単調性の欠如は、Sato-Vartia や Tornqvist 等、対数型の価格指数では頻繁に生じるものである。もっとも、それらが単調性を満たさないケースは、数百倍もの非常に大きな相対価格の変動が生じた場合等、現実ではほとんど起こりえない状況であるのに対し、ここではそれほど極端なケースでなくとも単調性を満たさなくなってしまう。

5.4 Aggregation Consistency

最後の例 4 は Aggregation Consistency の例である。財を四種類とし、最初の二財を第一グループ、後半の二財を第二グループとして、それぞれラスパイレス指数を計算している。0 期と 1 期にかけてのラスパイレス指数は Aggregation Consistency を満たすため、二つのグループ毎に計算したラスパイレス指数の加重平均 (WCPL) と PL(0,1)1 は一致する。しかしながら、一度連鎖を行うと、両者 PL(0,2) と WCPLS(0,2) は一致しない。すなわち、連鎖を行うとラスパイレス指数は Aggregation Consistency を満たさなくなってしまう。Lippe (2007) は、連鎖指数で発表されているカナダの消費者価格

指数が、1978 年の 3 月において、財・サービス 170.8、サービスが 171.4、財が 171.1 となっており、総合指数がその構成要素よりも小さいという奇妙な事態になっていることを指摘している。これは SNA のような、様々な産業やカテゴリーの支出・数量を積み上げていく場合、深刻な問題になりうる。.

標準的なラスパイレス指数を連鎖によって維持される基本公理は、Commensurability、すなわち計測単位からの独立性であり、これは、連鎖指数もまた 2 時点の価格比の関数であることから成立する。しかしながら、基本公理の中の基本公理である恒等性が成立しないことは、連鎖指数の価格指数、あるいは数量指数としての適格性について疑問を投げかけるものである。連鎖指数は、どのような経路をたどったかにより結果が左右されてしまうためである。

6　連鎖指数を使う根拠

最初に紹介したように、連鎖指数の歴史は古い。しかし、連鎖指数が広く応用されたのは Jorgenson 達による一連の生産性分析であり、価格指数においては、SNA におけるデフレーターとして推薦した P. Hill (1993) の 93SNA の影響力が大きい。後の講義ノートで議論する予定であるが、Jorgenson 達は連続時間における物価・数量指数である Divisia 指数をまず導入する。Divisia 指数は推移性や要素反転性など、通常の指数がほとんど満たすことのない公理をみたす。そして、その離散近似として連鎖指数を導入している。問題は、離散近似することで、Divisia 指数の有していた性質、推移性や要素反転性が消滅してしまうことであるが、それらを踏まえても、近似として採用している。問題は、離散近似として連鎖指数を使うことで、どのくらい Divisia 指数から乖離が生じるか、である。近年の De Haan et al. (2011) の結果から、月次データの場合、連鎖ドリフトは年次データよりも深刻な結果をもたらすことは広く知られている。POS 等の高頻度データでは、連鎖指数は推移性はまず成立せず、Divisia 指数からの乖離は非常に大きくなってしまう。

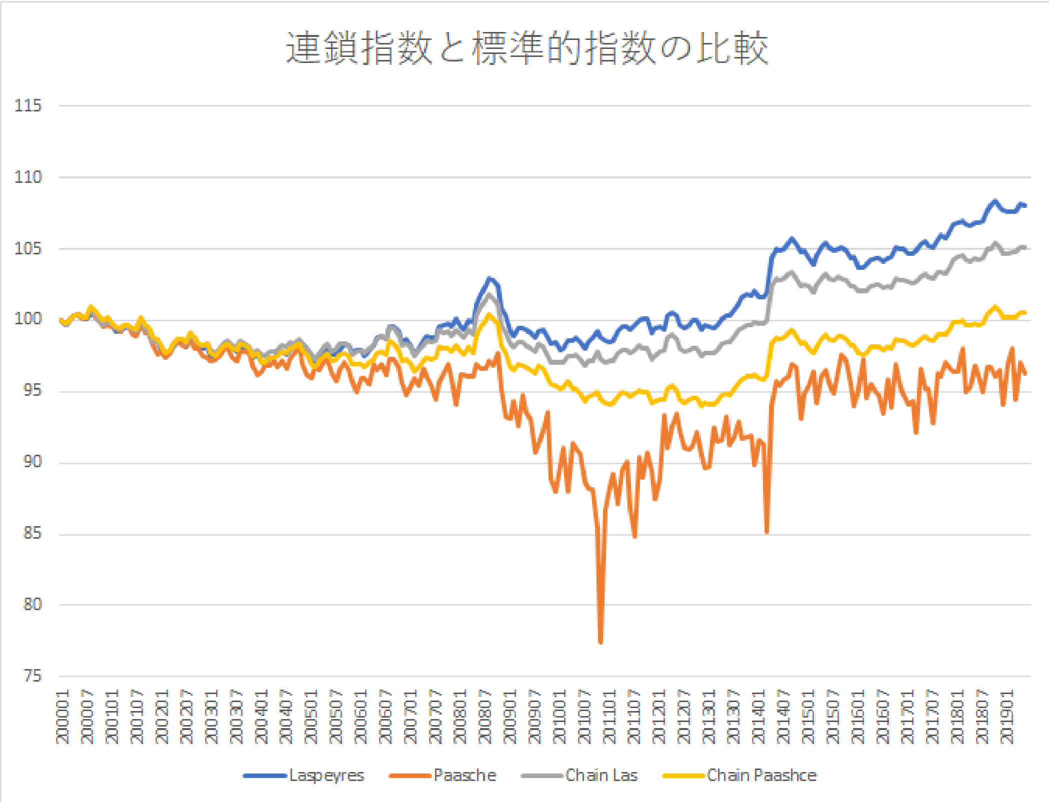
価格指数計測の点から連鎖指数を用いるメリットとしてよく指摘されるのは (1) ラスパイレス・パーシェギャップが小さくなること、(2) 商品の登場、消滅の影響を軽減できること、であろう。(1) は P. Hill (1993) が強調しており、今日、物価統計実務者の間で広く共有されているものと思われる。しかしながら、前のセクションで議論したように、連鎖ドリフトはラスパイレス・パーシェギャップを縮小させる方向に働くとは限らず、むしろ、逆に増加させてしまうことがある。そのような状況は特殊なケースではなく、特売や季節性変動など、ごく一般的な状況で成立してしまうのである。

(2) は A. Marshall (1887) の時代から指摘されているものである。極端な場合、として江戸時代の江戸と今日 (令和) の東京の価格指数を計測することを考えてみよう。無論、両期間で共通の商品はほとんど存在しない。単純化

のため、両期間で共通の商品はないと仮定しよう。すると、標準的な価格指数は定義できず、両期間の価格指数の計測は不可能になる。一方、江戸時代と明治期、明治期と大正期、大正期と昭和期、昭和期と平成期、のように、時期を近くすると、隣接する 2 時点で共通する商品は常にみつかると仮定しよう。すると、連鎖指数を用いることで江戸時代と令和の価格指数を計測することが可能になる。標準的な価格指数が計測できず、なんの情報も得ることができない状況に比べれば、なんらかの数値と情報をもたらす連鎖指数のほうが望ましいものであろう。この議論の前提は、2 時点間で商品が異なる場合、ヘドニックなどにより対応する商品を作り出す、あるいは計測することをしない、ということである。例えば、江戸時代と明治期では、江戸時代の商品の 70% が、明治期の商品の 60% が共通であるとしよう。すなわち、直接比較可能な商品のみに限定して物価を計測する。この指数を正当化するためには、排除された商品、すなわち消滅商品と新しい商品の (価格) 推移が、平均的な価格変化、すなわち価格指数の値と同じであると仮定する必要がある。しかし、これはかなり極端な仮定である。

二時点で共通商品が存在しても、そこから価格指数を計算することが不適切なケースは多々ある。例えば、今から 40 年前には CD はなく、音楽のメディアの中心はレコードであった。今日、レコードは市場規模の小さい嗜好品であり、同じ内容の CD に比べ高い価格がついている。40 年前と今日の音楽市場の価格指数を計測する場合、CD やネット配信という新商品を無視し、共通商品であるレコードにのみ限定すると、音楽市場の物価は上昇したことになる。一方、ネット配信や CD の、例えば歌一曲当たりの単価は 40 年前に比べ著しく減少している。レコードは時代を超えて存在し続けているが、市場における位置は時代により大きく変化しており、代表的な商品としての性質をもたなくなっているのである。たとえ共通商品があったとしても、市場全体の動向を正確に計測するには、新商品、あるいは消滅商品を考慮し、ヘドニック等により二時点の相対価格を計算する必要がある。原則、二時点間で価格指数を計算する場合、消滅商品や新商品があった場合、その影響を考慮しないと価格指数は適切に計測することはできない。江戸と明治、明治と大正といった、各二時点においても、新商品と消滅商品を考慮する必要がある。各期で新商品と消滅商品を適切に反映した物価を計測可能であるとしたら、それは江戸と令和を比較可能であることを意味する。

標準的な指数の基準時が 5 年に一度変更されるとしよう。基準時が離れるほど、新商品の影響を考慮せねばならなくなり、比較する価格情報に誤差が入り込む可能性が高くなる。また、基準改正の際、遡って時系列データを再推計する必要が生じる。この点、連鎖指数は基準改定がもたらす影響を小さくすることが可能である。また、興味の対象が隣接する二時点間の物価の比較である場合、その二時点とは異なる基準時を設けるメリットはほとんどない。連鎖指数は、隣接する二時点、すなわち連鎖をとる必要がない場合、基



準時を事前に固定している標準的指数よりも望ましい指数と言えるだろう。また、基準改定によりそれまでの公表値が大きく変動することが望ましくない場合、基準改定が事実上毎年行われている連鎖指数のほうが好ましく思われることもあるだろう。

7　実際の連鎖ドリフト

連鎖ドリフトは、実際にはどのくらいの大きさなのだろうか?

図は、日本の家計調査 (二人以上) と全国消費者物価指数の中分類から作成したラスパイレス指数、パーシェ指数およびそれらの連鎖指数を示している。連鎖ラスパイレス指数はラスパイレス指数よりも小さく、パーシェ指数は逆に大きくなる傾向を見てとれる。ラスパイレス・パーシェのギャップは連鎖指数のほうが小さくなっており、連鎖にすることにより、標準的な指数よりも変動は小さく、かつギャップも小さくなっている。連鎖指数をとることにより、物価指数、特にパーシェ指数が平滑化されており、リーマンショック直後や消費増税前後において特に平滑化が顕著になっている。

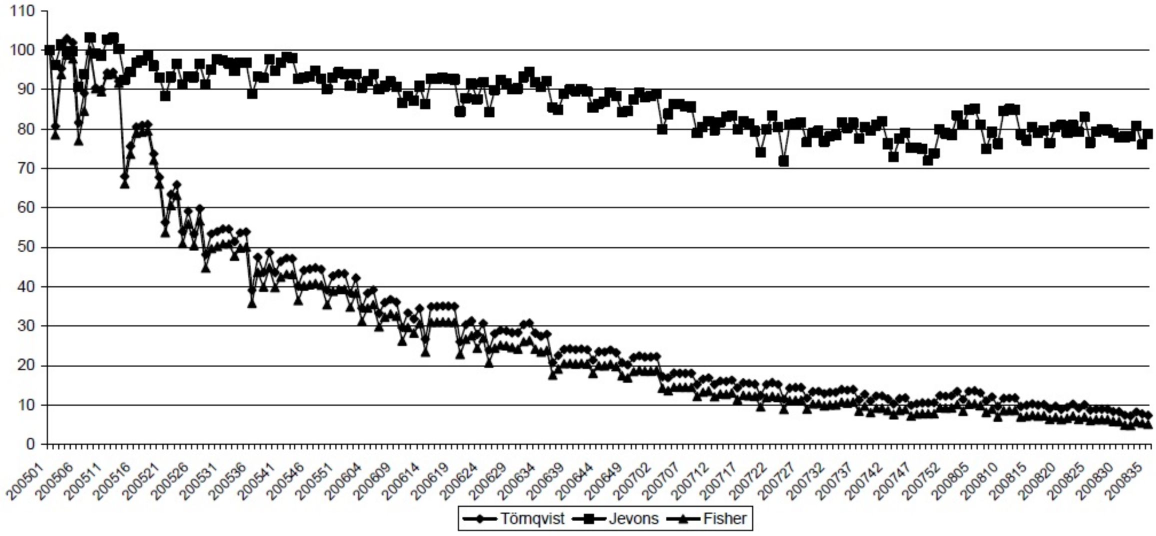


Figure 6. Monthly chained price indexes; detergents

次の図は、De Haan et al. (2011)[9]がオーストラリアの洗剤に関する POS データで、連鎖のトルンクビスト指数、フィッシャー指数およびジェボンズ指数を比較したものである。ジェボンズ指数は単純幾何平均であり、推移性を有するため連鎖指数と標準的な指数は一致する。一方、トルンクビストやフィッシャー指数は連鎖ドリフトが発生する。図では、トルンクビストやフィッシャーでは極端なデフレーションが発生しており、洗剤価格は 3 年間で 1/10 程度になっている。これは非現実的な値である。POS データは価格と数量の情報が入っており、両者間の共分散を正確に計算可能である。すると、連鎖ドリフトは大きな値となり、最良指数であり、Divisia 指数の近似として知られるトルンクビスト指数でも、連鎖ドリフトが大きくなってしまうのである。De Haan et al. (2011) は、この問題を緩和するため、多国間価格指数で用いられる GEKS (Gini, Eltetö, Köves, Szulc) approach の採用を提唱している。GEKS については、地域間価格指数を論じる際に紹介する予定である。

8　まとめ

連鎖指数を 93SNA で推薦した P. Hill (1993) にとどまらず、指数理論の大家である Fisher や Walsh も連鎖指数に対し前向きな評価を与えているが、その議論は歯切れがよいとは言えない。理論的にも実証的にも、連鎖指数が通

[9]de Haan, Jan & van der Grient, Heymerik A., 2011. "Eliminating chain drift in price indexes based on scanner data," Journal of Econometrics, Elsevier, vol. 161(1), pages 36-46, March.

常の指数よりも優れているとは言い切れない。全国消費者物価指数の場合は連鎖指数により物価指数は平滑化されるが、より精度の高い POS データを用いると、連鎖ドリフトが非現実的な数値を作り出してしまう。これは、特売等の周期的な変動を消費者物価指数がデータから排除していることに起因していると思われるが、はたして、特売の排除が物価指数作成上好ましいものか否かは議論の余地がある。POS データを用いる場合、新商品や消滅商品の詳細な調整が事実上不可能であるため、連鎖指数が (GEKS 等を伴いながら) 採用されている。連鎖指数を次善として採用する場合は、その利点と欠点を把握し、連鎖指数の特徴を踏まえたうえでその解釈を行う必要があるだろう。特に、連鎖を行わない場合との比較を常に行いながら、出てきた統計値を見るほうが望ましいと考えられる。