2019年地域経済各論 (日本)　講義ノート 10

阿部修人
一橋大学経済研究所

平成 31 年 11 月 19 日

概 要

財が時間を通じて変化するときの物価指数: Hedonic と Variety

1　財が二時点間で異なる場合の物価指数

これまで議論してきた、公理的、あるいは経済学的アプローチでは、財の集合は二時点、あるいは二地域間で共通と仮定してきた。しかしながら、厳密に考えると、「同じ」財、というのは程度の問題であることがわかる。生鮮食料品は、厳密には同じ財というのものは存在しない。例えばミカンを考え、同じ種類・ブランドのミカンをとってきても、各ミカンで大きさ、甘さ、皮の厚さ等がわずかであっても少しは異なっており、二つとして同じものはない。ここまで極端な例でなくとも、10 年前のスーパーの品ぞろえと今のスーパーでは多くの点で異なっている。さらに時間をさかのぼると、財のカテゴリーそのものが変わっていることは少なくない。デジタルカメラは 30 年前には存在しなかったし、Blu ray 等の規格も存在しなかった。iPhone 等のスマートフォンは、登場時には様々なカテゴリーにまたがる複合的な財であり、はたして携帯電話という枠組みでよいか、当時の統計作成実務者はかなり苦労したものと思われる。

新たな財・サービスの開発は経済発展の重要な要素であり、また少子高齢化などの構造変化もまた、様々な財・サービスの変化を作り出す。今と対応する財が過去に見つからないとき、どのようにして価格・数量指数を作ればよいのだろうか?この問題は、統計実務上ではよく知られている問題であり、また深刻な問題でもある。新旧商品の対応が容易にみつかる場合は、新旧商品を同質化させる、すなわちある基準を設定し、その基準から新旧商品の距離を計測し、その距離の分だけ価格を調整することが一般になされている。これらは様々な分類が可能であるが、ヘドニック法が一般的な手法であり、オー

バーラップ法や容量調整法と呼ばれる手法は、ヘドニック法の特殊ケースと考えることが出来るだろう

2　ヘドニック法の理論モデル

ヘドニック法は、異なる属性を有する消費財間での消費者行動を描写するモデルとして Court (1921)[1]が提唱し、その後、Gorman (1956)[2], Griliches (1961)[3]、Lancaster (1966)[4]および Rosen (1974)[5]が確立したアプローチである。今日、多くの統計実務家の間で利用されており、異なる財間の品質調整を行う場合の標準的な手法となっている。日本でも、総務省統計局および日本銀行の作成している価格指数の一部でヘドニック法が採用されている。ここでは Crawford and Neary (2018)[6]に即してその理論を簡単に紹介する。

いま、ある市場に K 種類の財があるとする。それらの財には属性があり、属性は全部で J 種類あるとする。例えば、パーソナルコンピューター (PC) の市場を考え、販売されている PC の種類が K。コンピューターの性能は画面サイズ、速度、メモリーサイズなどの J 個の属性によって決定されていると考えてみよう。さらに、J<K を仮定し、属性 $j \in J$ の財の t 期における総量を z_t^j、各財の消費量を x_t^k, 対応する価格を p_t^k とする。各財に含まれる属性の割合を $a_t^{k,j}$ とし、下記の関係があると仮定する。

$$z_t^j = \sum_k a_t^{k,j} x_t^k$$

すなわち、財との属性の間には線形関係があると仮定している。市場を代表する家計の効用は属性により決定されると仮定し、下記の効用関数を最大化すると仮定する。

$$\begin{aligned} &\max V = v\left(z_t^1, z_t^2, z_t^3, ..., z_t^J\right) \\ &\text{s.t.} \quad z_t^j = \sum_k a_t^{k,j} x_t^k, y_t = \sum_k p_t^k x_t^k \end{aligned}$$

[1]Court, A. T. (1939), “Hedonic Price Indexes with Automotive Examples,” inTheDynamics of Automobile Demand. The General Motors Corporation, New York,99-117.

[2]Gorman,W.M.(1956), ”A Possible Procedure for Analysing Quality Diferentials in the Eggs Market”,Review o fEconomic Studies,47,pp.843-856.

[3]Griliches, Z. (1961), “Hedonic Price Indexes for Automobiles: An Econometric Analysis of Quality Change,” inThe Price Statistics of the Federal Government, G. Stigler(chairman). Washington D.C.: Government Printing Office.

[4]Lancaster, K. J. (1966), “A New Approach to Consumer Theory,”Journal of PoliticalEconomy74, 132-157.

[5]Rosen, S. (1974), “Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition,”Journal of Political Economy82(1), 34-55.

[6]I. Crawford and J.P. Neary (2019) ”New Characteristics and Hedonic Price Index Numbers”, mimeo.

一階条件は

$$\sum_j a_t^{k,j} v_t^j = \lambda p_t^k$$

変形すると、

$$p_t^k = \sum_j a_t^{k,j} \frac{v_t^j}{\lambda}$$

右辺の限界効用と乗数の比は、属性 j の Shadow Price と考えることが可能である。これを π_t^j と書くと

$$p_t^k = \sum_j a_t^{k,j} \pi_t^j$$

を得る。この式はヘドニック式と呼ばれるものである。この効用最大化問題は、下記のようにも定式化可能である。

$$\begin{aligned} \max U &= u_t\left(x_t^1, x_t^2, x_t^3, ..., x_t^J\right) \\ \text{s.t.} \quad y_t &= \sum_k p_t^k x_t^k \end{aligned}$$

さらに、v の定義より、

$$\begin{aligned} v\left(z_t^1, z_t^2, z_t^3, ..., z_t^J\right) &= u_t\left(x_t^1, x_t^2, x_t^3, ..., x_t^J\right) \\ z_t^j &= \sum_k a_t^{k,j} x_t^k \end{aligned}$$

となる。v を用いるメリットは、効用水準が時間に依存する、すなわち、財の属性パラメター $a_t^{k,j}$ が時間に依存するため、たとえ財が二時点間で対応していも、その財から得られる属性の「量」が変化してしまうため、効用が時間に依存する関数になってしまっているのである。これは、二時点間で同一の財がなくとも、対応する、多少性質の異なる財が存在するケースを想定している。この v から、shadow price, π_t^j を用いて、通常の生計費指数 (COLI) を定義することも可能であり、Superlative Index を応用し、shadow price のフィッシャー指数やトルンクビスト指数を生計費指数の近似として採用することが出来るだろう。問題は shadow price は直接観察できないことであるが、$a_t^{k,j}$ の情報が入手可能であれば、

$$p_t^k = \sum_j a_t^{k,j} \widehat{\pi}_t^j$$

を各期のクロスセクション情報から推計することが可能となる。

ヘドニック法を実践するには、まず属性を選択し、その属性の各財の関係を表す $a_t^{k,j}$ の情報が必要になる。これらは一般に骨の折れる作業である。コンピューターであれば画面サイズ、ハードディスクやメモリー量、演算速度

など、定量的に計測可能なものが品質の重要さとして考えられるが、新しいレストランの品質となると、定量化が困難なもの、サービスの質や味、が重要になり、それらは人により評価が異なるものにもなる。本や雑誌、新聞の質もまた定量化が困難なものであり、多くの財にこの手法を応用することは非現実的である。

ヘドニックの極端な形の一つは、属性として単なる容量のみを考える場合である。異なる牛乳が市場に投入されても、それらの属性が容量のみで表現できるのであれば、新しい牛乳も古い牛乳も容量単価に統一すれば比較可能になる。これは Drobisch による Unit Value Price Index につながる発想であり、多くの加工食料品では、現実の物価統計作成の際に応用されている。すなわち、新しいアイスクリームが少ない容量で販売された場合、容量の分だけ価格が上昇したと考え新旧商品を接続している。これは、アイスクリームの品質に関する情報、特に「美味しさ」を定量化することが困難なことに起因している。もう一つの極端な形は、属性に関わるパラメター $a_t^{k,j}$ が入手できない場合である。例えば新旧二財の商品のみがあり、新商品と旧商品の品質が全く分からないが、価格のみが異なると仮定する。各期に財は一つしかないため、一階条件は下記になる。

$$p_t^k = a_t^{k,j}\pi_t^j$$
$$p_{t+1}^k = a_{t+1}^{k,j}\pi_{t+1}^j$$

この二式から

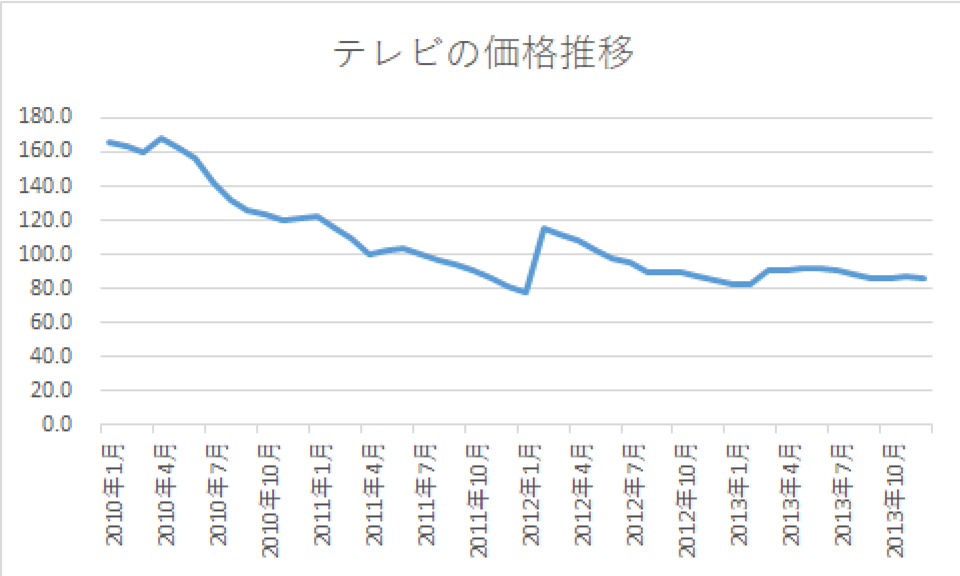
$$\frac{p_{t+1}^k}{p_t^k} = \frac{a_t^{k,j}\pi_t^j}{a_{t+1}^{k,j}\pi_{t+1}^j}$$

を得る。$a_t^{k,j}$ に関する情報が何もない場合、shadow price か $a_t^{k,j}$ のどちらか、あるいは両方に対し仮定をおく必要がある。例えば、shadow price が全く変わらない、すなわち家計にとり、新商品および旧商品から単位価格あたりに得られる効用になんの違いもないと仮定すると、下記を得る。

$$\frac{p_{t+1}^k}{p_t^k} = \frac{a_t^{k,j}}{a_{t+1}^{k,j}}$$

この場合、新旧の価格差は全て品質の差によるものとみなすことなり、新旧商品の価格差はないものなる。この手法はオーバーラップ法と呼ばれ、新旧商品の価格差は、事実上ないものとみなして物価統計が作成されている。逆に、$a_t^{k,j}$ が何にも変わらないと仮定すると、生じる価格差は全て shadow price の違いとなり、同一品質の商品の価格が変化したことになる、すなわち、

$$\frac{p_{t+1}^k}{p_t^k} = \frac{\pi_t^j}{\pi_{t+1}^j}$$



となる。これは、新旧商品が、たとえ名前や価格が違っても全く同一の商品とみなすことで、新商品の価格が旧商品よりも上がっていたら、それは値上げ、とみなすことを意味する。Shadow price が一定なのか、それとも品質パラメターが一定なのか、あるいはその両方が半分程度変化するのか、は追加の情報がなければ判断できない。

以下の図は、日本の総務省統計局による全国消費者物価指数におけるテレビの価格指数の推移である。

2012 年の 2 月に調査対象の銘柄が変更になり[7]、それと同じタイミングで価格指数が 80 から 120 に急上昇している。50% もの急激な上昇は他の品目ではまず観察されない特異な現象である。どのように新旧銘柄の接続をしたかは公開されていないが、おそらく、品質パラメターはほぼ固定のままで、新しく市場に投入されたテレビが旧製品に比べて価格が高かったことを反映していると思われる。このような価格、特に一部商品の入れ替えにより急激に物価指数が変化することは、デフレーターとして利用する場合は望ましいとは言えない。なぜなら、基本銘柄として採用されていないテレビの価格が、基本銘柄のテレビと全く同様に動いている可能性が低いためである。おそらく、基本銘柄のテレビが入れ変わる前後に競合商品が登場していると考えられるが、市場全体のテレビの価格の推移は特定の銘柄の価格の動きよりはスムーズになっているはずである。さらに、新商品はえてして旧商品よりも価格は高いが、新商品であるということのプレミアムが含まれていると解釈することも可能である。新しい商品であるが故の需要であれば、それもまた品

[7]テレビの基本銘柄は 32 インチハイビジョン液晶で、LED によるものであったのが、2012 年 2 月からはさらに地上波デジタルチューナー 2 機搭載という要件が加わっている。

質の一部と考えることも不可能ではない。テレビから得られる効用が新商品であるという理由で大きくなるのであれば、新商品登場による価格上昇は品質変化の一部であり、その後、住宅や耐久財のように減価していくと考えるほうが妥当であろう。いずれにせよ、現在の消費者物価指数をデフレーターとして使用する場合は、このような極端な動きも含んでいることを念頭におく必要がある。

ヘドニック法の一つの問題は、これまで知られていなかった新しい属性が登場することが想定されていないことである。40 年前にはインターネットは存在しかなったし、100 年前にはテレビも存在しなかった。テレビに我々が期待する属性は、それまでの財であると映画館や演劇になるのだろうが、個人宅にある耐久消費財のテレビと映画館のサービスを同一の属性としてヘドニックを行うことにはかなりの無理がある。ヘドニックは、理論的には明快で、財が変化する際に対応する事実上唯一の手法であるが、その限界もまた認識しておく必要がある。

3　マッチング法

これは、ヘドニックを行わずに、二時点、あるいは二地域同時に存在する商品のみを用いて物価指数・数量指数を作成する手法である。新商品の問題を扱わずに済むので計算が著しく容易になる。問題は、商品の入れ替えが激しい場合、数量指数に下方のバイアスが生じかねないこと、また商品入れ替えが価格戦略の一環として行われている場合は、重要な価格変化の情報が落とされてしまうことにある。二時点間で同時に存在する商品の一部は、いままさに市場から撤退寸前の消滅寸前の商品も含まれている。そのような商品の取引量は通常にくらべて小さくなり、それと入れ替わるように新商品が登場する。市場で流通する商品の数量全体は不変であっても、新商品を無視し、消滅寸前の商品を含むことで、前期に比べて数量が著しく減少している商品の数量情報が含まれてしまうのである。マッチング法は、POS データを用いる場合はひろく利用されているが、おもに価格指数のみが利用されており、数量指数が作成されることは少ない。しかしながら、価格指数がデフレーターとして利用される場合は、対応する数量指数に負のバイアスが生じている可能性が高いことは大きな問題になりうる。

4　Variety Effects

ヘドニック方が不可能な場合、例えば無数に異なる財が存在する場合、近年特に注目されている物価指数は CES 型効用関数の特徴を用いた、Variety Effects を用いたものである。これは、事実上、ヘドニック以外で財の種類が変化する場合の生計費指数を計算する唯一のモデルとして、近年多くの研究

が発表されている。

Dixit and Stiglitz (1977) に基づく CES 型効用関数では、商品の種類数、n は固定されていた。n が変化すると、モデルに何が生じるだろうか?ここで、商品数を n_t とし、下記のような効用関数を仮定しよう。

$$U_t = \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it} q_{it}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\sigma > 1, a_{it} > 0, \sum_{i=1}^{n} a_{it} = 1$$

このモデルの解法は前の講義ノート全く同じなので、効用最大化の結果、需要関数、支出関数及び間接効用関数は下記のようになる。

$$q_{it} = U_t \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t}\right)^{-\sigma}$$

$$E\left(U_t, p^t\right) = U_t P_t = U_t \times \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$V\left(p, I\right) = I_t \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

ここで、全ての商品の品質 (効用における) および価格が同一で 1、すなわち、$a_{it} = \overline{a}, p_{it} = 1$ を仮定すると、

$$\begin{aligned} V\left(p, I\right) &= I_t \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &= I_t \left(\sum_{i=1}^{n_t} \overline{a}^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &= I_t \left(n_t \overline{a}^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &= I_t n_t^{\frac{1}{\sigma-1}} \overline{a}^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \end{aligned}$$

もしも σ が 1 に近い値をとると、効用水準は商品種類 n_t に関して敏感に反応するようになり、1 に収束すると、効用の種類に関する弾力性は無限に発散していく。所得と価格が一定であれば、間接効用は n_t の増加関数り、弾力性の水準により、効用の増加速度はどこまでも大きなりうる。所得と価格が一定の下で商品の種類 (variety) を増加させるには、個々の商品の購入量を減らすことになる。より多くの商品を少量ずつ消費する、すなわち消費の平準化が効用を高めることを意味する。これは CES 効用関数が凹関数であることの帰結であり、代替の弾力性が同一であることに依存するものではない。所得や価格が一定であれば、商品の種類が多いほど厚生が高まることを Love of

Variety と呼ぶ。時に、CES 型効用関数そのものが Love of Variety 型と呼ばれることがある[8]。Krugman (1980)[9]は、この特徴を用い、自国と外国で生産されている商品には違いがあると仮定した上で Love of Variety が二国間貿易の源泉となりうることを示した。また、Romer による論文[10]では、この関数形を生産に用い、商品の種類の増加が生産性を増加させ、内生成長を起こすことを示している。

CES 型にかかわらず、財空間に新たに財が加わり、既存の財価格や所得に影響がないのであれば、財・商品種類の増加が効用水準の増加を引き起こすことは自然である。すくなくとも、機会集合は縮小はしない。問題は、果たして、どの程度効用が増加するか、効用の種類弾力性である。CES 型では、価格が全商品で同一と仮定し弾力性が一定のまま商品の種類が増加していく。はたして、これは現実の財の種類増加の効果のよい描写になっているのだろうか?

消費者にとっての選択の増加を経済モデルでどう描写するかは、計量経済学でも問題となっている。多項ロジットモデルの例として、赤いバス、青いバス (Red Bus, Blue Bus) 問題という有名な例がある。いま、タクシーてバスの二種類の移動手段のある市場を考える。このバスは赤く塗られている。いま、このバスと全く同じ機能・性能、スケジュール、料金だが、色だけ赤ではなく青で塗られているバスが登場したとしよう。利用客にとっては、バスの色が赤いか青いかはどうでもよい (どうせ乗っている間は色は見えない) ので、単に赤いバスの市場が青いバスによって二分割されるだけと考えるのが自然であろう。しかし、ロジットで必要とされる IIA(Independence of Irrelevant Alternatives) を仮定してしまうと、赤いバスとタクシーの選択は青いバスの有無に依存しないので、タクシーと赤いバスのシェアの比は、青いバスが登場する前と同じ値にならねばならない。これは、赤いバスと青いバスが完全な代替財になっているにもかかわらず、それを無視して異なる財と扱うことから生じる問題である。Love of Variety を考える際、どのような商品間、財間の差異を考えているか、CES が想定するような弾力性が一定とする仮定はどの程度適切であるのか、慎重に検討する必要がある。観光地を例にとっても、冬山のスキーと夏の海岸は異なる商品として、二つの選択肢があることは人々の厚生を拡大させるが、夏の海岸で、わすが数百メートルしか離れておらず、ほとんど同一の海岸の選択肢が増加しても、人々の厚生に与える影響は軽微のはずである。カップラーメンの蓋に人気アイドルの写真が貼られていたら、そのアイドルのファンにとっては従来とは異なる商品になるであ

[8]Dixit and Stiglitz (1977) では、Love of Variety は考察されておらず、商品の数は一定であるとされている。しかしながら、商品間の代替の弾力性が異なることを許容するモデルも考察しており、商品間の代替の弾力性一定という仮定が非常に強いことも指摘している。

[9]Krugman, Paul. (1980). "Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade," *American Economic Review*, Vol. 70, No. 5, pp. 950-959.

[10]P.Romer (1987) "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization," *American Economic Review*, 77(2), pp. 56-52. 及び P. Romer (1990) "Endogenous Techological Change," *Journal of Political Economy*, 98, 5, pp S71-S012.

ろうし、アイドルに関心のない人にとっては、従来の商品と完全代替であろう。これは、スマートフォンの新機能を使いこなす人と、無視する人、テレビや PC の性能など、多くの商品にかかわる大きな問題である。

CES 型による Love of Variety を正当化する一つのロジックは、これを複雑なモデルの近似とみなすことである。よく似た、しかし若干異なる財の存在 (Poduct Differentiation) の経済分析には長い歴史がある。その中でも Hotelling (1929) およびそれに続く一連の立地による差別化には多くの研究の蓄積がある[11]。北海道に住む人は、沖縄からわざわざ商品を取り寄せるよりも北海道産の商品を消費するほうがより効率的であろう。市場が統合されていない場合、立地による独占的競争が発生し、商品の差別化が生じることになる。問題は、この種類のモデルでは異質な消費者を扱う必要があり、動学や国際貿易等、諸分野に応用するのが容易ではないことである。一方、Dixit and Stiglitz (1977) による CES 型効用関数が生み出す Love of variety は、異質な個人や企業という要素を極力排し、単純なモデルで分析できるため、非常に多くの応用先があるという大きなメリットがある。

Love of Variety には批判も多いが、現在のマクロ経済学や国際貿易研究において実質的に標準のフレームワークとなっている。ここでは、国際貿易を念頭に置いた Feenstra (1994)[12]の COLI を紹介する。

5 Feenstra (1994)

CES 型効用関数の単位支出関数、

$$E\left(1, p^t\right) = P_t = \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

から始めよう。二期間、t 期と $t-1$ 期の間の物価の変化を考える。t 期に存在する財の集合を I_t 二つの期間どちらにも存在する財の集合を $I\,(\neq \emptyset)$、a_{it} は時間によらず一定、すなわち、$a_{it} = a_i$ とする。このとき、効用一単位あたりの支出関数は

$$P_t = \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

[11] Hotelling, Harold (1929) “Stability in Competition,” *The Economic Journal*, 39,4157. Lancaster, K. (1979) V*ariety, Equie and Efficiency*, New York: Columbia University Press.

Salop, Ste. (1979) “Monopolistic Competition with Outside Goods,” *Bell Journal of Economics*, 10,

141-156.

[12] Feenstra, Robert C, (1994) “New Product Varieties and the Measurement of International Prices,” *American Economic Review*, vol. 84(1), pages 157-77, March.

となるが、これは t 期において利用可能な財の集合 I_t に依存するので、

$$P_t\left(p_t, I_t\right)=\left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

と書くことにしよう。二期間の生計費指数、COLI は

$$\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)}$$

となる。ここで、Feenstra (1994) は

$$\begin{aligned}
PI^{FS} &= \frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} \\
&= PI^{sv}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\
\lambda_r &= \frac{\sum_{i\in I} p_{i,r} x_{i,r}}{\sum_{i\in I_r} p_{i,r} x_{i,r}} \\
PI^{sv} &: \text{Sato-Vartia COLI for } I
\end{aligned}$$

となることを示した。PI^{sv} は、前の講義ノートで示した Sato-Vartia 型の COLI で、二期間で共通する財、継続商品に限定した COLI である。すなわち、Feenstra の COLI は、継続商品に限定した Sato-Vatia 型 COLI と、λ-Ratio の関数の積で表すことが可能である。λ_t は t 期において利用可能な商品の売り上げのうち、継続商品の売り上げの割合である。もしも新商品が多ければ、この割合が低下する。$\sigma > 1$ を仮定しているので、λ_t が λ_{t-1} にくらべて増加すれば、Feenstra 型 COLI は λ-Ratio の減少関数、すなわち、財の種類が増加すると COLI は低下するのである。

(証明)

i 財の支出シェアは

$$\begin{aligned}
w_{it} &= \left(\frac{a_{it} p_{it}}{P_t}\right)^{1-\sigma} \\
&= a_{it}^{1-\sigma} p_{it}^{1-\sigma} P_t^{\sigma-1} \\
P_t &= \left(\sum_{i=1}^{n_t} a_{it}^{\sigma} p_{it}^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}
\end{aligned}$$

したがって

$$P_t = a_{it} p_{it} w_{it}^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

これは、

$$\frac{P_t\left(p_t, I_t\right)}{P_t\left(p_{t-1}, I_{t-1}\right)} = \frac{a_{it} p_{it} w_{it}^{\frac{1}{\sigma-1}}}{a_{it-1} p_{it-1} w_{it-1}^{\frac{1}{\sigma-1}}}$$

$a_{it}=a_i$ とすると、

$$\frac{P_t(p_t,I_t)}{P_t(p_{t-1},I_{t-1})}=\frac{p_{it}w_{it}^{\frac{1}{\sigma-1}}}{p_{it-1}w_{it-1}^{\frac{1}{\sigma-1}}}$$
$$=\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\left(\frac{w_{it}}{w_{it-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

ところで、継続商品に限定した場合の i 財への支出シェア $w_{it}(I)$ と通常の支出シェア $w_{it}=w_{it}(I_t)$ の関係を考えると、

$$w_{it}(I_t)=\frac{p_{i,r}x_{i,t}}{\sum_{j\in I_t}p_{j,t}x_{j,t}}$$
$$=w_{it}(I)\frac{\sum_{j\in I}p_{j,t}x_{j,t}}{\sum_{j\in I_t}p_{j,t}x_{j,t}}$$
$$=w_{it}(I)\lambda_t$$

したがって、

$$\frac{P_t(p_t,I_t)}{P_t(p_{t-1},I_{t-1})}=\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)\left(\frac{w_{it}(I)}{w_{it-1}(I)}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

この右辺の、継続商品に限定した場合の幾何平均を s_i を用いて計算すると、

$$\frac{P_t(p_t,I_t)}{P_t(p_{t-1},I_{t-1})}=\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\prod_{i\in I}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)^{s_i}\left(\frac{w_{it}(I)}{w_{it-1}(I)}\right)^{\frac{s_i}{\sigma-1}}$$

$$s_i=\frac{(w_{i1}-w_{i0})/(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}{\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}-w_{i0})/(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}$$

ここで、前回の講義ノートで示したように、

$$PI^{sv}=\prod_{i\in I}\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right)^{s_i}$$

である。残るは、

$$\prod_{i\in I}\left(\frac{w_{it}(I)}{w_{it-1}(I)}\right)^{\frac{s_i}{\sigma-1}}$$

である。自然対数をとると、

$$\sum_{i\in I}\left(\frac{s_i}{\sigma-1}\right)(\ln w_{it}(I)-\ln w_{it-1}(I))$$
$$=\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)\sum_{i\in I}\frac{(w_{i1}-w_{i0})/(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}{\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}-w_{i0})/(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}(\ln w_{it}(I)-\ln w_{it-1}(I))$$
$$=\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)\sum_{i\in I}\frac{(w_{i1}-w_{i0})}{\sum_{i=1}^{n}(w_{i1}-w_{i0})/(\ln w_{i1}-\ln w_{i0})}$$

ここで、分子は

$$\sum_{i \in I} (w_{i1} - w_{i0}) = \sum_{i \in I} w_{i1} - \sum_{i \in I} w_{i0} = 1 - 1 = 0$$

したがって、

$$\prod_{i \in I} \left(\frac{w_{it}(I)}{w_{it-1}(I)} \right)^{\frac{s_i}{\sigma-1}} = 1$$

である。これで、

$$\frac{P_t(p_t, I_t)}{P_t(p_{t-1}, I_{t-1})} = \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} PI^{sv}$$

(証明終わり)

Feenstra (1994) の COLI は、財空間の変化が生計費指数に与える影響を数量化している点で、従来の COLI とは一線を画すものである。公理論的アプローチで財空間の変化を扱うことは極めて困難であり、経済学アプローチの利点といえる。問題は、価格と数量の情報のみでは COLI を計算できず、弾力性の情報が必要となる点である。Sato-Vartia 型の COLI は、複雑な Weights を用いる一方、弾力性を推計する必要はなかったが、今回は弾力性を計測せねばならないのである。

代替の弾力性の推計は容易ではない。価格と数量の観察値が大量にあったとしても、それが需要と供給のどちらの変動を反映しているかを見分けねばならないためである。適切な操作変数が見つかる場合、あるいは供給曲線のみをシフトさせるような変動を抽出できれば観察データから需要弾力性を推計可能となるが、通常は、そのような都合の良い操作変数や供給変動を一般に全ての財市場について見出すことは不可能である。Feenstra (1994) は、この弾力性の推計手法についても、比較的簡単に推計可能な手法を提案している。これは、弾力性が時間を通じて一定の場合に適用可能なものである。

6　弾力性の推計

i 財への支出シェアに戻ろう。

$$w_{it} = a_{it}^{1-\sigma} p_{it}^{1-\sigma} P_t^{\sigma-1}$$

両辺の自然対数をとると、

$$\ln w_{it} = (1-\sigma) \ln a_{it} + (1-\sigma) \ln p_{it} + (\sigma - 1) \ln P_t$$

階差をとり、

$$\begin{aligned}\Delta \ln w_{it} &= \Phi_t - (\sigma - 1)\,\Delta \ln p_{it} + \varepsilon_{i,t} \\ \Phi_t &= (\sigma - 1)\,\Delta \ln P_t \\ \varepsilon_{i,t} &= (1 - \sigma)\,\Delta \ln a_{it}\end{aligned}$$

次に、供給関数として下記のような単純なものを仮定する。

$$\Delta \ln p_{it} = \omega \Delta \ln q_{it} + \xi_{it}$$

ただし $\omega > 0$ は供給弾力性であり、q_{it} は i 財の数量である。ξ_{it} は誤差項であり、需要曲線の誤差項 $\varepsilon_{i,t}$ と直行していると仮定する。支出シェアの定義から、

$$w_{it} = \frac{p_{it} q_{it}}{E_t}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\ln w_{it} &= \ln p_{it} + \ln q_{it} - \ln E_t \\ \ln q_{it} &= \ln w_{it} - \ln p_{it} + \ln E_t \\ \Delta \ln q_{it} &= \Delta \ln w_{it} - \Delta \ln p_{it} + \Delta \ln E\end{aligned}$$

これを供給曲線に代入すると、

$$\begin{aligned}\Delta \ln p_{it} &= \omega\,(\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln p_{it} + \Delta \ln E) + \xi_{it} \\ (1 + \omega)\,\Delta \ln p_{it} &= \omega \Delta \ln w_{it} + \omega \Delta \ln E + \xi_{it} \\ \Delta \ln w_{it} &= \frac{(1 + \omega)}{\omega} \Delta \ln p_{it} - \Delta \ln E - \frac{\xi_{it}}{\omega}\end{aligned}$$

需要曲線に代入すると、

$$\begin{aligned}\Delta \ln w_{it} &= \Phi_t - (\sigma - 1)\,\Delta \ln p_{it} + \varepsilon_{i,t} \\ &= \frac{(1 + \omega)}{\omega} \Delta \ln p_{it} - \Delta \ln E - \frac{\xi_{it}}{\omega} \\ \left(\frac{(1 + \omega)}{\omega} + (\sigma - 1) \right) \Delta \ln p_{it} &= \Delta \ln E + \Phi_t + \varepsilon_{i,t} + \frac{\xi_{it}}{\omega} \\ \left(\frac{1 + \omega\sigma}{\omega} \right) \Delta \ln p_{it} &= \Delta \ln E + \Phi_t + \varepsilon_{i,t} + \frac{\xi_{it}}{\omega} \\ \Delta \ln p_{it} &= \left(\frac{\omega}{1 + \omega\sigma} \right) (\Delta \ln E + \Phi_t) + \frac{\xi_{it}}{1 + \omega\sigma} + \left(\frac{\omega}{1 + \omega\sigma} \right) \varepsilon_{i,t}\end{aligned}$$

簡単のために

$$\begin{aligned}\frac{\xi_{it}}{1 + \omega\sigma} &= \delta_{it} \\ \left(\frac{\omega}{1 + \omega\sigma} \right) (\Delta \ln E + \Phi_t) &= \Psi_t\end{aligned}$$

とすると、

$$\varepsilon_{i,t} = \Delta \ln w_{it} - \Phi_t + (\sigma - 1)\, \Delta \ln p_{it}$$
$$\Delta \ln p_{it} = \Psi_t + \delta_{it} + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) \varepsilon_{i,t}$$

という二本の推定式を得たことになる。求めたいパラメターは二つの弾力性、σ と ω である。問題は、Φ_t と Ψ_t であり、これを消去するため、他の財からの乖離をとる。Feenstra (1994) は、国際貿易を考えているため、最大の取引国を k 国とし、k 国からの乖離を計算している。具体的には、

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varepsilon}_{i,t} &= (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt}) + (\sigma - 1)\, (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) \\
\widetilde{\delta}_{it} &= (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) - \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) \widetilde{\varepsilon}_{i,t} \\
&= \frac{-\omega\,(\sigma+1) + 1 + \omega\sigma}{1+\omega\sigma} (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt}) \\
&= \left(\frac{1-\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt}) - \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt})
\end{aligned}$$

という、一階の階差と、基準からの乖離という二重階差を計算する。すると、二式に含まれるパラメターは σ と ω のみとなる。moment 条件は $\widetilde{\varepsilon}_{i,t}$ と $\widetilde{\delta}_{it}$ の直交条件であり、非線形方程式を解くことで推計が可能になる。Feenstra (1994) はさらに計算を著しく容易にする工夫を提案している。直交条件を書き下すと下記のようになる。

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varepsilon}_{i,t}\widetilde{\delta}_{it} &= (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})^2\, (\sigma - 1) \left(\frac{1-\omega}{1+\omega\sigma}\right) \\
&\quad + \left(\left(\frac{1-\omega}{1+\omega\sigma}\right) - \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right)(\sigma - 1)\right) (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})\, (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt}) \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt})^2 \\
\widetilde{\varepsilon}_{i,t}\widetilde{\delta}_{it} &= \left(\frac{(1-\omega)\,(\sigma-1)}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})^2 + \left(\frac{1-\omega\sigma}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})\, (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt}) \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{1+\omega\sigma}\right) (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt})^2
\end{aligned}$$

右辺に出てくる変数を下記のように変換し、移項すると

$$\begin{aligned}
Y_{it} &= (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})^2 \\
X_{1i,t} &= (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt})^2 \\
X_{2i,t} &= (\Delta \ln w_{it} - \Delta \ln w_{kt})\, (\Delta \ln p_{it} - \Delta \ln p_{kt})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{it} &= \theta_1 X_{1i,t} + \theta_2 X_{1i,t} + u_{it} \\
u_{it} &= \widetilde{\varepsilon}_{i,t} \widetilde{\delta}_{it} \left(\frac{1+\omega\sigma}{(1-\omega)(\sigma-1)} \right) \\
\theta_1 &= \frac{\omega}{(1-\omega)(\sigma-1)} \\
\theta_2 &= \frac{1-\omega\sigma}{(1-\omega)(\sigma-1)}
\end{aligned}
$$

と書くことが可能である。無論、最後の式を線形回帰で推計するには、$X_{1i,t}$ と $X_{2i,t}$ が u_{it} と直交するという追加の仮定が必要となる。しかし、価格とシェアは $\widetilde{\varepsilon}_{i,t}$ と $\widetilde{\delta}_{it}$ と相関を持っており、したがって、$\widetilde{\varepsilon}_{i,t}\widetilde{\delta}_{it}$ すなわち、u_{it} とも相関してしまい、線形回帰で必要な直行条件を満たさない。そこで、このパネル構造を利用し、時間平均をとり、

$$
\overline{Y}_i = \theta_1 \overline{X}_{1i} + \theta_2 \overline{X}_{1i} + \overline{u}_i
$$

を考える。ある商品の需要が変動し、価格が変化したとする。その需要変動そのものは i.i.d. であり、他の商品の需要や供給とも相関していない。無論、価格変化と需要の変動とは相関がある。一方、価格の変化の一部は供給ショックによりもたらされている。仮定から、供給ショックと需要ショックは直行している。とすると、時間平均をとると、価格変化は需要ショックと供給ショックという互いに直行するショックから作られており、価格変化の時間平均は、需要・供給ショックの積と相関しなくなるのである。これは、商品ダミーと $\overline{u}_i$ との相関を考えると、ゼロになる、すなわち、全ての商品に対して、確率的には等しく $\overline{u}_i$ が生じることを示している[13]。無論、この変換が可能なのは、構造パラメターが期間に依存せず一定であるという仮定があるためであり、定常性が重要な役割を果たしている。

時間平均をとった場合、$\overline{X}_{1i}$ と $\overline{X}_{1i}$ は $\overline{u}_i$ と直交する、ということは、θ_1 と θ_2 は線形回帰による求めることが可能になることを意味する。Feenstra (1994) は、需要・供給の弾力性が数量と価格に関するパネルデータ及び定常性の仮定があれば、単純な回帰分析により求めることが可能になることを示したのである。これは、のちに多くの研究で利用されている。

7 Broda and Weinstein (2010)

Broda and Weinstein (2010)[14]は、Feenstra (1994) の COLI を拡張し、アメリカにおける商品レベルのデータに適用した。国間の貿易データというマ

[13]証明の詳細は、Feenstra (1991) “New Goods and Index Numbers: U.S. Import Prices,” *NBER Working Paper* w3610. を参照せよ。

[14]Broda, C. and Weinstein, D.E. (2010). “Product creation and destruction:evidence and price implications.” *American Economic Review*, 100, 691–723.

クロデータではなく、商品レベルの POS(Point of Sales) データであれば、製造社やブランドの情報が利用可能である。CES 型の効用関数では商品間代替の弾力性を一定と仮定していたが、Broda and Weinstein (2010) はそれを多段階にし、商品間、メーカー間、カテゴリー間の三種類の異なる弾力性を想定した。カテゴリーは時間によってい一定であるが、商品ブランドの種類と商品の種類は時間により変化しうるとし、λ-Ratio を二段階に分けている。具体的には、Broda and Weinstein の COLI は下記のようになる。

$$PI^{BW} = \prod_{g \in G} \left\{ \prod_{b \in g} \left[PI^{sv} \left(\frac{\lambda_{bt}}{\lambda_{bt-1}} \right)^{\frac{1}{\sigma w(b)-1}} \right]^{\Phi_{tw}(b)} \left(\frac{\lambda_{gt}}{\lambda_{gt-1}} \right)^{\frac{1}{\sigma b(g)-1}} \right\}^{\Phi_{tb}(g)}$$

ただし、$\lambda_{st}\,(s = g, b)$ は、ブランド及び商品レベルの継続商品の支出割合であり、$\sigma w\,(b)$ はブランド内の弾力性、$\sigma b\,(g)$ ブランド間の弾力性である。$\Phi_{tb}\,(s)$ 及び $\Phi_{tw}\,(s)$ は、Sato-Vartia で用いた

$$\Phi_{tw}\,(s) = \frac{(w_{b1} - w_{b0}) \,/\, (\ln w_{b1} - \ln w_{b0})}{\sum_{b \in s} (w_{b1} - w_{i0}) \,/\, (\ln w_{b1} - \ln w_{b0})}$$

のブランド内、およびブランド間の対数 Weight である。Feenstra(1994) と異なり、この推計には大量の弾力性の推計が必要となるが、Feenstra (1994) と同様に、線形回帰で求めることも可能である。

近年は、この Feenstra (1994) の手法を応用した研究コロンビア大学の David Weinstein を中心として数多く報告されている。例えば、Humbry and Weinstein (2014), [15]Hottman et al. (2016)[16]、Redding and Weinstein (2019) 等である[17]。

8 日本における Vareity Effects の推計

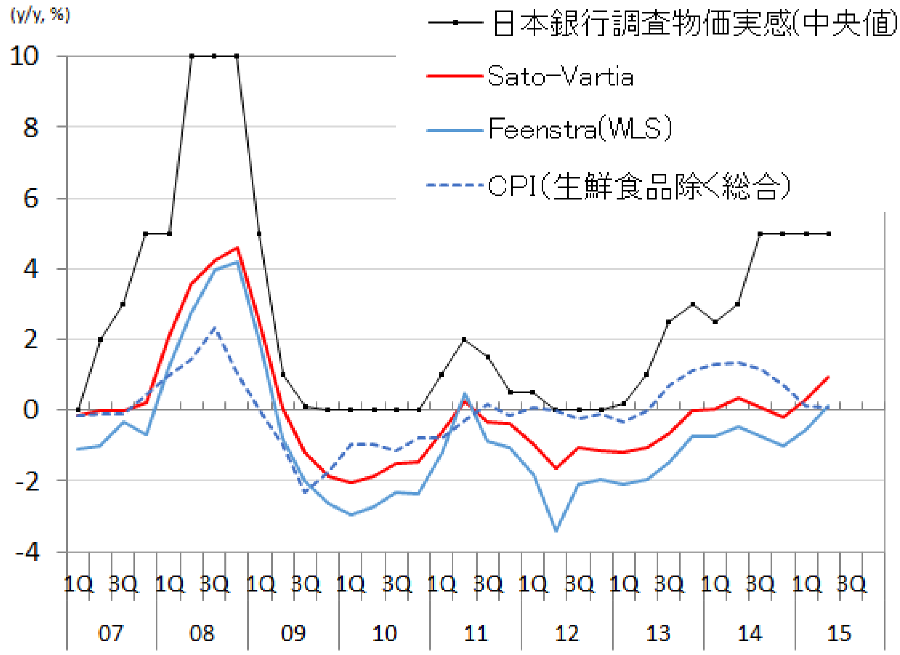
阿部 et al. (2016)[18]は、日本の店舗における販売データを用いて Feenstra (1994) に従う需要弾力性および物価指数を計算している。具体的には、市場調査会社インテージの提供する Point of Sale (POS) データである SRI を用い、2007 年から 2015 年までの日用品および加工食料品の月次での売り上げ数量および価格データを用い、様々な商品カテゴリーの需要弾力性をまず推計している。データの単位は店舗ごとのかつ商品コードごとになっており、非

[15]Goods Prices and Availability in Cities," Jessie Handbury and David E. Weinstein, The Review of Economic Studies, 2014

[16]Colin J. Hottman & Stephen J. Redding & David E. Weinstein, 2016. "Quantifying the Sources of Firm Heterogeneity," The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press, vol. 131(3), pages 1291-1364.

[17]Stephen J. Redding, David E. Weinstein (2019) "Measuring Aggregate Price Indexes with Taste Shocks: Theory and Evidence for CES Preferences," NBER Working Paper No. 22479.

[18]阿部・遠田・稲倉・外木　(2016) 『POS データからみた生計費指数と物価指数』　「現代経済学の潮流」 p. 136-163.



常に細かいデータとなっている。商品を訳 1300 のカテゴリーに分類し、各カテゴリーで弾力性を計算した結果、その中央値は約 6 である。これは、Broda and Weinstein (2010) の 11 に比べると小さいが、HOttman et al. (2016) の 7.0 には近い数値となっている。こうして得られた弾力性の推計値を用い、Feenstar (1994) の物価指数を各カテゴリーで計算し、カテゴリー間の集計はフィッシャー指数を用いている。以下の図は、前年同月からの変化率 (%)、すなわち連鎖指数の変化率となっている。

一番高い数値となっているのは、日本銀行が発表している主観的な物価上昇率、CPI は総務省統計局の発表する公式物価指数である。Feebstra (WLS) とあるのは、Feenstra (1994) の手法で計算された弾力性に基づく COLI であり、Sato-Vartia は、前年同月と今月の両期間に存在する商品に限定した Sato-Vartia 指数である。Sato-Vartia と Feenstra の違いがλ-Ratio により作られていることになる。一見してわかるように、主観的物価変化率と公式 CPI の間の相関は 2014 年以降崩れているが、その傾向は Sato-Vartia や Feenstra も同様である。Feenstra と Sato-Vartia はほぼ似たような動きをしているが、2011 年の第二四半期と 2012 年の第二四半期に大きな変化がみられる。これは 2011 年 3 月に生じた東日本大震災の影響で、主に東日本で多くの品不足が生じ、Variety の減少、すなわち経済厚生の低下、生計費指数の上昇が生じたことによる。しかし、Variety 効果をコントロールする Feenstra の物価指数では、全般的に物価変化率は低い、すなわち Variety の増加により経済厚生

が向上していることになるが、そうした厚生の変化は、日本銀行による主観的な物価指数と公式 CPI との間の乖離とは関係ないことがわかる。Feenstra の物価指数は Variety 効果、すなわち財の選択肢が拡大すると人々はより幸福になり、その程度は弾力性が 1 に近いほど大きくなる、という効用関数の構造に全面的に依存している。弾力性が 1 の時には、厚生効果は無限大となり、Variety の拡大が経済厚生に多大な影響を与える。こうしたメカニズムが、非常に細かい財単位、例えば栄養ドリンクの種類や即席めんで生じるかどうかは議論の余地がある。効用関数として CES 型はトランスログ型に比べて制約が強く、パラメターの数も少ない。Variety 効果が果たしてどれだけ重要であるかも、今後の検討課題であろう。