2010 年度上級マクロ講義ノート (1)　設備投資と動的最適化

阿部修人　nabe@ier.hit-u.ac.jp

2010 年 4 月 8 日

概要

- 上級マクロ経済学への導入
- 新古典派生産関数
- Jorgenson の部分調整モデル
- Tobin q
- 動学最適化:離散・連続時間
- 調整費用モデル
- Hayashi's Theorem
- 動学分析:線形近似と Jordan 標準形
- 動学分析:位相図を用いた分析

1　上級マクロ経済学への導入

大学院レベルのマクロ経済学の最初のトピックとして、本講義において経済成長ではなく設備投資にした理由は、(1) 動的最適化を議論する上で必要なパーツ (割引率や生産関数) を議論しやすいこと、(2) 日本の経済学者による理論的、実証の両面での貢献が大きく、日本経済において非常に多くの研究が進んでいること、(3) 投資の調整費用で分析された連続型調整費用は、New Keynesian 等、多くのマクロ経済モデルで利用されていること、の三点である。また、マクロ経済全体をモデル化する RBC や New Keynesian モデルにおいて、実際のデータとマッチングさせるときには、投資の調整費用が含まれることが多く、ここで時間をかけて理解することは無意味ではない。成長理論にあるようなシンプルで美しい一般均衡の世界ではないが、その分、データと整合的になるように経済理論モデルが構築されていることを理解してもらいたい。

とはいえ、本講義ノートの最大の目的は、設備投資モデルを通じて、動的最適化の解き方と、その考え方を理解することにある。特に、将来、税等の経済環境の変化が予見されるとき、現在の経済状況が何も変わっていなくとも、将来の予測をすることにより、経済主体の行動が変わること、そして、利潤を最大化する企業の行動は、経済モデルによりどのように描写されるかを是非理解してもらいたい。大学院レベルのマクロ経済学は、将来をみこした経済主体の行動原をモデル化することが基本となっているためである。

2　設備投資の重要性

1. GDP に占める割合は 10% 強程度に過ぎないが、消費にくらべて変動が大きく、GDP の変動に占める割合が大きい (需要要因)
2. 将来の資本ストック増加に貢献するため、将来の生産力に大きな影響を与える (供給要因)

3. 昔から多くの理論・実証研究が存在し、日本に関する研究も膨大に存在
4. しかしながら、いまだ基本的なモデリングに関してコンセンサスが得られていない

3 (新古典派) 設備投資の理論

最も単純なモデル (部分調整モデル)

3.1 新古典派生産関数

マクロ経済学の入門用教科書では、設備投資は極めて単純な形で定式化されている。単純なケインズモデルにおいては設備投資を固定投資 (投資を企業家のアニマルスピリッツの産物) とみなし、その動向をモデルの外におき外生変数としてマクロモデルで扱っている。IS-LM モデルでは、投資の限界効率表を用い、大雑把に投資を金利の減少関数とみなしている。どちらも、設備投資を考える際、企業の生産活動は明示的に考えていない。それに対し「新古典派」的な設備投資理論は、新古典派生産関数を基礎としている[*1]。ここでは、ごく単純な、しかしマクロ経済学でよく用いられる生産関数を考える。

企業は二生産要素の新古典派生産関数 $F(K,L)$ を持つ。二要素は、蓄積可能なものとして、K:(資本)、また蓄積不可能なものとして、L(労働投入量) の二つを考える。この生産関数は二回連続微分可能であり、さらに以下の条件を課す。

(Inada 条件[*2])

$$\lim_{k\to 0} F_K = \infty, \lim_{L\to 0} F_L = \infty \tag{1}$$

$$\lim_{K\to \infty} F_K = 0, \lim_{L\to \infty} F_L = 0 \tag{2}$$

(単調性)

$$F_K > 0, F_L > 0 \tag{3}$$

(凹性)

$$F_{KK} < 0, F_{LL} < 0 \tag{4}$$

(一次同次性)

$$\forall \lambda > 0, \lambda F(K,L) = F(\lambda K, \lambda L) \tag{5}$$

この条件は、明らかにコブ・ダグラス型の生産関数、$Y = Const \cdot K^a L^{1-a}$、$0 < \alpha < 1$ では成立する。では、CES 型 (Constant Elasticity of Substitution) ではどうだろうか?一般に CES 型は以下のように書くことが出来る。

$$Y = A\left(a(bK)^{\psi} + (1-a)((1-b)L)^{\psi}\right)^{1/\psi} \tag{6}$$

ただし、$0 < a, b < 1$, $\psi < 1$ である。このとき、資本と労働の代替の弾力性を計算してみよう。等量曲線状の傾きは下記で与えられる。

[*1] 詳しくは Hall, Robert E., and Dale Jorgenson (1967): Tax Policy and Investment Behavior," American Economic Review, 57 等、Jorgenson による一連の研究を参照すること。

[*2] 理論経済学の大家、稲田献一が、1967 年に書いた論文で、この条件と単調性により、賃金・金利比率と資本ストックが一対一で対応することを示している。このことから命名されたと思われるが、稲田氏本人はこの条件を Derivative Condition と呼んでいる。また、Uzawa (1961) にこの条件は既に登場している。

$$\frac{dL}{dK}|_{iso} = -\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} \tag{7}$$

$$= -\left(ab^{\psi}(K)^{\psi-1}\right) / \left((1-a)(1-b)^{\psi} L^{\psi-1}\right) \tag{8}$$

$$= -\frac{ab^{\psi}}{(1-a)(1-b)^{\psi}} \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\psi} \tag{9}$$

代替の弾力性は、投入要素比率と等量曲線の傾きの関係 (相対価格の 1% の変化が投入比率の何 % の変化をもたらすか?) であり、下記で計算される。

$$\left[\frac{\partial(slope)}{\partial(L/K)} \cdot \frac{L/K}{slope}\right]^{-1} \tag{10}$$

$$= \left(\frac{1}{1-\psi}\right) \tag{11}$$

と、定数 $1/(1-\psi)$ となる。また、ψ をゼロに近づけていくとコブ・ダグラス型の生産関数、$Y = Const \cdot K^a L^{1-a}$

となる。また、ψ を 1 に近づけると生産関数は線形になり、代替の弾力性は無限大となる。すなわち、わずかな相対価格の変化が、非常に大きな要素投入比率の違いを作りだすことを意味する。生産関数の一次同次性は明らかに CES では成立する。問題は Inada 条件である。資本に関して CES 生産関数の偏微分を計算すると

$$F_K = A\left(a(bK)^{\psi} + (1-a)((1-b)L)^{\psi}\right)^{(1-\psi)/\psi} \cdot ab(bK)^{\psi-1} \tag{12}$$

このとき、$0 < \psi < 1$ のとき、$\lim_{K\to\infty} F_K > 0 \quad \lim_{K\to 0} F_K = \infty$ となり、$\psi < 0$ のときは $\lim_{K\to\infty} F_K = 0 \quad \lim_{K\to 0} F_K < \infty$ となる。したがって、CES 型のときに Inada 条件を 0 と無限で同時に満たすのはコブ・ダグラス型に限定されることがわかる。成長理論では $\lim_{k\to\infty} F_k = 0$ が特に重視される。なぜなら、この条件は資本の限界生産性がいつかゼロになることを意味し、資本の無限の成長を妨げることになるためである[*3]。

[*3] 新古典派生産関数、特にコブダグラスや CES、あるいはさらに一般的な Translog 型の関数は現在のマクロ経済学のみならず、多くの分野で標準的な用いられており、その正当性が議論されることは少なくなっているように思われる。しかしながら、コブダグラスにしろ CES にしろ、極めて強い制約を K, L, Y の間に課していることを忘れてはならない。

生産活動を分析する際、扱う生産の単位が、産業全体をなのか、企業なのか、工場なのかは生産関数を考える時に極めて重要な違いとなる。さらには、大企業のように複数の事業所、工場を有する場合と、町工場のように一つの機械に数人の従業員がいる場合の資本と労働の代替性は全く異なるものであろうし、産業全体を一つの生産関数で表す場合も資本と労働の代替性は一工場内の代替性とは全く異なるものをみていることになる。日本全体の生産関数を考えると、日本中の労働力や資本ストックが移動可能ということを仮定することになるが、同一工場の中での労働者や機械の移動とは根本的に違うメカニズムが背後で働くことになる。

次に、資本ストックを一つの K で表すことがはたして本当に可能なのかどうか (10 年前のプリンターと最先端の PC とネットワークと机、椅子、建物を一つの K で近似することの難しさを想像してみて欲しい)。同じことは労働にも言える。また、同次関数の仮定の正当性、missing variables の存在なども大きな問題である。電力や水道等の目に見える中間投入物はなんとか扱うことは可能であるが、組織やネットワーク等目に見えない生産要素。近年、盛んに研究されている無形資産や特許のように眼には見えるが評価しにくいものも存在する。単純な新古典派生産関数は便利であるが、実際に使用する際にはその問題点も常に意識してもらいたい。

3.2 Jorgenson の (単純化された) 部分調整モデル

企業にとり、資本のユーザーコスト[*4](ここでは金利と考えよ) が r で一定であるとする。また、生産量が $\overline{Y}$ で一定であると仮定し、費用最小化問題を考える。賃金率を w、企業の生産物価格を 1 とすると、企業の費用最小化問題は下記のように定式化される。

$$Minimize\,(wL + rK) \tag{13}$$

$$s.t.F\,(K, L) = \overline{Y} \tag{14}$$

この費用最小化問題を解き、さらに生産関数がコブダグラス型,$F\,(K, L) = AK^a L^{1-a}$ であるとすると、最適な資本ストックは以下のように計算することが出来る。

$$K^* = a\overline{Y}/r \tag{15}$$

上記の K^* は金利が r の時の「望ましい資本ストック」水準であると考えることが出来る。

投資とは何か?投資とは、設備資本 K の増加分である。したがって、減価償却を無視すると、資本ストックの時間微分と考えることが出来る。

$$I \equiv \frac{dK}{dT} \tag{16}$$

しかしながら、企業が常に費用最小化を行い、最適資本ストックを (15) にしたがって決定しているならば、資本ストック水準も常に最適水準にあることになる。例えば、金利が変化した場合、資本ストックは直ちに調整されることになり、資本の変化分として定義される投資は大きく変化する。現実の企業設備投資は、確かに民間消費よりははるかに変動は大きいものの、企業にとっての最適資本ストック水準の維持が、この理論どおりに常に行われていると仮定することには無理がある。

Jorgenson (1963)[*5]による部分調整モデルでは、資本ストックの最適条件 (15) は長期的には成立するが、短期的には資本水準の調整に時間がかかるという仮定を設けている。簡易化された部分調整モデルは以下のように書くことができるだろう。

$$\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right) = \left(\frac{K_t^*}{K_{t-1}}\right)^{\lambda} \tag{17}$$

ただし、λ は一定の値をとるパラメターで、$0 < \lambda < 1$ である。前期の資本ストックが K_{t-1} であり、今期の望ましい資本ストックが K_t^* であるとき、実際の資本ストック K_t は K_t^* には必ずしも一致せず、λ の分だけ K_{t-1} に近い水準にとどまる。上式の自然対数をとると

$$\ln K_t - \ln K_{t-1} = \lambda\,(\ln K_t^* - \ln K_{t-1}) \tag{18}$$

上記の式を実際の資本ストック・投資データを用いて検証し、λ を推定しようと試みるならば、K_{t-1} と K_t は観察可能であるが、K_t^* は観察不可能であることがわかるだろう。しかしながら、(15) が正しければ、金利

[*4] ユーザーコストと Tobin の q に関しては吉川洋 (1984) 「マクロ経済学研究」東京大学出版、が詳細な説明を行っているので、そちらを参照すること。ここでは簡単化のために金利と解釈しているが、実際に企業行動をカリブレートする際には税率等の調整が必要である。

[*5] D.W. Jorgenson (1963) "Capital Theory and Investment Behavior", *American Economic Review*, Vol. 53, p.247-57.

や生産量をその代理変数とし、実際に代入することで、極めて簡単な構造モデルを導出し、推定することができる。その簡単さ、および構造パラメターを推定することができることから、この部分調整モデルに基づく研究は非常に多く、また労働量など、他の生産要素の研究にも応用されている。

この定式化は、理論的な観点からは多くの問題があり、、特に最適化の視点が欠如していることは深刻な問題である。調整費用が存在するならば、それは企業の最適化行動に織り込まれるはずであろう。その場合もはや (15) のような単純なルールにより最適資本ストック水準を表すことは出来なくなるはずである。調整費用の存在を企業は知っているはずであり、また将来に金利などの経済変数が変化することが予想されれば、調整費用と将来の金利水準等に依存して現在および将来の投資計画を決定するであろう。この投資モデルは将来を見越した企業行動を想定していないという点で大きな問題があるのである。

もう一つの問題は、投資を資本の微分と定義していることである。資本蓄積の動きが微分可能であるか否かは自明な問題ではない。工場を建設するかしないか、という意思決定を行う場合、資本蓄積は工場ができた時点で一気に増加することになるだろう。もしくは、工場は段階的に完成していく (Time to build) かもしれない。しかし、企業が非常に多くの工場を持ち、一つの工場の設立は、他の工場の閉鎖を伴い、企業全体で見ると資本蓄積の動きはスムースになっているかもしれない。これらは実証的な課題でもあるし、投資や生産活動を分析する時の単位の問題でもある。

3.3 Tobin の q 理論

Tobin の設備投資の理論は Jorgenson のような企業の最適化問題から出発するのではなく、資本市場の役割に注目している点に特徴がある。Tobin の q (平均の q) は以下で定義される。

$$q = \frac{\text{資本市場で評価された企業価値} + \text{負債総額}}{\text{資本の再調達費用}} \tag{19}$$

この q が 1 より大きいとき、企業の持つ資本は、その調達費用よりも高く評価されていることになる。ということは、企業経営者は資本を新たに調達し企業の設備とすることで、その調達費用以上の価値を生み出すことが出来る*6。したがって、q が 1 よりも高いときは企業は設備投資を増加させるであろう。一方、q が 1 より小さいときは、企業の設備を売りに出し企業設備を縮小させ売却することで利潤を上げることが出来る*7。

実際に q を計算することは必ずしも容易ではない。通常用いられている q は

$$q = \frac{\text{純負債} + \text{自己資本} - \text{土地} - \text{在庫}}{\text{資本ストックの再調達費用}} \tag{20}$$

の式で計算されているが、分子の土地、および分母の資本ストックは簿価ではなく時価でなければならない。しかしながら、日本の企業会計制度では土地や設備資本ストックの時価評価はされておらず、企業が購入した時点での費用に減価償却を行った後の値しか財務諸表には掲載されていない*8。したがって、現時点での企業

*6 ここで議論されている設備投資は、実証研究でよく用いられる投資概念である企業の有形固定資産の増分に対応している。

*7 実際には、企業設備を売りに出した場合は、購入するときよりもはるかに低い価格でしか販売できないであろう。廃棄コストがかかる場合もありうる。このような場合の投資行動は irreversible investment と呼ばれるものであり、例えばバブル期の日本企業の過大と言われる設備投資が、irreversibility のために長期にわたって悪影響を与えた可能性がある。この種の投資理論は Dixit and Pindyck (1992) において詳しい議論が展開されている。数学的には、企業の投資行動に連続性がなくなるためモデルが複雑になるが、現在の企業投資行動のフロンティアの一つである。日本の設備投資に関して、非可逆的投資の理論モデルに基づき実証分析をしているものに西岡・池田 (2006)「不確実性下における企業の設備投資行動： リアルオプション理論に基づいた実証分析」BOJ Working Paper(06-J-9) がある。

*8 ここで用いられている減価償却は企業会計制度で定められているものであり、実際の設備資本の陳腐化や除却を反映しているとは限らないことに注意せよ。これは会計情報を直接利用することに問題があることを示しており、財務指標から簡単に導出される q がどの程度の歪みを作り出しているか実証的に確認せねばならない問題である。

価値を測定することは著しく困難なのである。実際に q を正確に計算するためには、ある企業が保有している土地の住所を調べ、その市場価格を計算し、さらにその企業が保有している設備資本を導入時点および種類ごとに分けて、実際の除却や陳腐化を考慮して資本ストック水準を推計せねばならない。多くの研究では多かれ少なかれ簡易化された q を用いて分析されている[*9]。

q を用いた実証研究は非常に多い。特に日本のメインバンクや系列システムの分析の際に極めて重要な役割を果たしている。しかしながら、q の解釈に関して混乱した研究も見られる。上記の q の議論は直感的にわかりやすいが、企業の最適化問題が十分に考慮されているとは言えないことにも注意する必要がある。ミクロ経済学の基本で、経済主体の意思決定に重要なものは限界的な生産性や効用であり、平均ではないことを思い出して欲しい。この節で定義される Tobin の q は企業設備資本の平均的な相対価値を表しており、限界的な価値を表していない。したがって、本節での議論が通常のミクロ経済学での最適化行動のフレームワークと整合的であるか否かに疑問がある。次節以降では、この Tobin の q を新古典的なフレームワークで再定式化していく。

4　動学的最適化問題

今まで、Jorgenson 流の部分調整モデルにおいても、また Tobin の q においても、企業にとっての最適化行動が十分に考慮されていないことを指摘した。企業の行動、とくに設備投資は企業の将来に大きな影響を与えるものであり企業の将来予測に依存すると仮定するのが自然である。たとえ現在赤字であっても、将来に需要が増大すると予測する企業は設備投資を増加させるはずである。将来を考える最適化問題、すなわち動学的最適化問題は、かつてはマクロ経済学と数理経済学の分析ツールであったが、今日では産業組織論や国際経済学、財政学、開発論等、非常に多くの分野においても標準的な分析ツールとなっている。

4.1　離散時間における最適化

4.1.1　連続時間と離散時間

動学問題を考えるとき時間をどう捉えるかがまず問題となる。時間をスムースに流れるものと考えるか (連続時間)、一定の幅を刻むもの (離散時間) と捉えるかである。ˋ 前者は秒針がなだらかに動く時計、後者は秒針が秒刻みでのみ動く時計と考えることもできるし、前者はアナログ、後者はデジタルに近いものと考えることも出来るだろう。

連続時間のフレームワークで考えると、スムースに流れる時間の中で、経済諸変数もまた多くの場合スムースに動くと考えられるが、ときにスムースに動かない (突発的な現象による変数のジャンプ、例えば株式や為替レートなど) ものも存在し、扱いが複雑となる。一方離散時間で考える場合は、経済行動は決まった時間間隔、例えば企業であれば会計年度、マクロ変数であれば 4 半期等で描写される。離散で考える場合、例えば四半期で考える場合、各四半期の期首と期末、という概念を導入し、時間の前後をさらに細分化することがある。

この離散と連続の時間選択は、分析対象および分析手法により決定される。離散時間は、経済データの多くが離散であること (連続データに近いものはあっても、厳密な意味で連続的に変化するデータというものはほとんど存在しないし、PC で連続変量をデータとして扱うことは事実上不可能である)、およびミクロ経済学で馴染みの深い静学分析に近い数学構造になることで、モデル構築がたやすくなるというメリットがある。一方、連続時間は、連続という極めて特殊な性質を駆使することで、複雑な問題を簡易化することが可能な場合

[*9] 日本の投資に関しては浅子、国則 (1989) が優れたサーベイを行っている。

が多い。例えば投資の irreversibility は、連続時間における確率過程の性質を用いると驚くほど単純なモデルで描写可能である。連続、すなわち実数空間で経済諸変数および意思決定を扱うことのメリットは、サーチや貨幣経済等、ある種のモデルにおいて非常に大きい。さらに、離散時間の場合、動学的性質を厳密に場合分けすることが困難であることが多い。例えば、カオスのような現象は離散時間において生じることは多いが (すくなくとも経済学における理論モデルでは離散時間でカオスなどが分析されることが多い)、連続時間であればポワンカレ・ベンディクソンの定理と呼ばれる非常に強力な定理があり、カオスなどを排除することは比較的容易である[*10]。

結局のところ、連続、離散の両フレームワークを修得する必要があるのである。大雑把には、理論分析には連続が、実証研究とのリンクを重視するならば離散が適しているように思われる。また理論分析でも、数値計算に頼る場合は離散が、そうでない場合は連続が向いていると言えるだろう[*11]。

4.1.2 連続時間における割引率

将来の利益を現在の価値に置き換える時には、割引率を考える必要がある。現在の 100 円と 10 年先の 100 円では価値が異なる。個人の選好に基づく将来と現在の価値の違いを生み出すのは主観的割引率と呼ばれ、実際の収益の面での違いを生み出すのは利子率である。いま、1 年間預けるると金利が r だけくる貯金を考える。このとき、10 年後の 100 円の現在の割引価値は

$$\text{10 年後の 100 円の価値} = \frac{100}{(1+r)^{10}} \tag{21}$$

となる。これは、一年物の金利で 10 年間で複利計算されているのである。複利計算は、時間の刻みを細かくするほど多くなされる。例えば、1 ヶ月に 1 度複利計算されるならば、金利は 1 ヵ月当たり r/12 となり、

$$\text{10 年後の 100 円の価値} = \frac{100}{(1+\frac{r}{12})^{12\times 10}} \tag{22}$$

連続時間においては、複利計算は各瞬間で行われることになる。一般に t 期後の 1 円の割引現在価値を考えると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}} \tag{23}$$

が連続時間における割引現在価値となる。このままでは使いにくいので、多少整理しよう。

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}} = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} \tag{24}$$

である。ここで

$$m = \frac{n}{r} \tag{25}$$

と定義しよう[*12]。すると

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m(-rt)} \tag{26}$$

[*10] ポワンカレ・ベンディクソンの定理に関しては、Perko (1991) が参考になる。

[*11] 連続時間の場合、離散では生じないような現象に直面することがある。例えば、政府が税を徴収し、そこから支出し生産活動を行う場合、離散では生産活動は来期になるが、連続では同時に行うことになる。すると、ケインズの乗数過程のような、奇妙な現象 (課税ベースの中に、税による支出された影響が入る) ことが生じてしまう。サーチや交換のモデリングの場合でも、連続の場合は解釈が困難なケースが出てくることには注意が必要である。

[*12] r はゼロにならないと仮定する。

したがって、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m(-rt)} \tag{27}$$

ところで、自然対数の底である e の定義以下であった。

$$e\equiv\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \tag{28}$$

したがって、t 期後の 1 円の割引現在価値は、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}=e^{-rt} \tag{29}$$

で表すことができるのである。割引率 r が時間と共に変化するならば、離散時間であれば各期の金利の掛け算の和、連続では積分を用いて割引価値を計算する。具体的には、金利 r が r(t) の法則に従い変化するならば、0 期から t 期までの割引率は

$$\int_{s=0}^{t} r\left(s\right)ds \tag{30}$$

となる。したがって、割引現在価値は

$$\exp\left[-\int_{s=0}^{t} r\left(s\right)ds\right] \tag{31}$$

無論、金利 r が一定のときは

$$\int_{s=0}^{t} r\left(s\right)ds=rt \tag{32}$$

となる。

4.1.3 企業の利潤

企業の t 期における売上高を $\pi\left(K_t\right)$ とする。単純化のため、生産技術や市場における競争などを明示的には考慮せず、企業の売上高は設備資本ストック水準にのみ依存するとしよう[*13]。資本ストックを増加させるには投資をせねばならないが、投資計画を実行するには費用がかかるとする。この費用は企業の収益に影響を与えるものであり I_t の投資を行うと以下の費用が、追加的にかかるとする。

$$\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t \tag{33}$$

すなわち、企業の t 期における収益は

$$\pi\left(K_t\right)-I_t-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t \tag{34}$$

となる。なお、$\pi'\left(K_t\right)>0, \pi"\left(K_t\right)<0$ を仮定する。第二項の I_t は投資を行うための資材を購入する費用であり第三項が調整費用である。調整費用に関して以下の仮定を置く。

$$\phi'>0 \tag{35}$$

[*13] 右下がりの需要曲線と一次同次の生産関数を仮定すると、売上高は資本ストックの関数として定式化可能である。

$$\phi(0) = 0 \tag{36}$$

$$2\phi' + \left(\frac{I_t}{K_t}\right)\phi" > 0 \tag{37}$$

$$\lim_{x \to 0} x\phi'(x) = 0 \tag{38}$$

すなわち、単位投資あたりの調整費用は投資・資本比率の増加関数であり、かつ、投資がないときは調整費用はかからない。また、ϕ が凸であれば三番目の条件は成立する。ϕ は凸である必要はないが、非凸性には上限があることを三番目の条件は示している。ϕ が単調増加で、かつ投資がゼロのときには ϕ がゼロになる、ということは、投資が負の時には ϕ は負になり、調整費用である $\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t$ は常に正となっていることに注意せよ。単位資本当たりの調整費用 (ϕ) がその投資と資本ストックとの比率に依存している、すなわち資本ストックに依存するということはかならずしも一般的な仮定ではない。事実、Romer(2004) のテキストでは調整費用は資本ストックに依存していないが、この調整費用を投資・資本比率に依存させるスペシフィケーションは Lucas や Uzawa、林による著名な先行研究で採用されているものである。経済学的に解釈すると、おなじ 1000 万円の投資でも、大企業と中小企業では調整費用は異なり大企業のほうが少ない調整費用で済むということである。調整費用の実際の例としては、設備投資による企業組織変更に伴う費用や労働者のトレーニング費用などを考えることが出来る。

4.1.4 離散時間における最適化問題

まず、離散時間において企業の利潤最大化問題を設定しよう。減価償却を無視し、t 期における投資、I_t、を以下のように定義する。

$$I_t = K_{t+1} - K_t \tag{39}$$

企業は、将来をどのように割り引くであろうか?家計、または個人であれば、将来所得の価値は主観的割引率で描写される。その値は定数であったり、年齢や家族構成に依存することもあるかもしれない。また、所得や資産水準にも依存する可能性もある。いずれにせよ、それらは選好に依存する。企業の場合は状況が異なる。企業が株主達による出資により形成され、経営者に経営を委託された、利潤を生み出すための存在とみなすならば、その目的はあくまで利潤最大化に他ならない。無論、経営者が株主の利害と必ずしも一致しない目的を持つことも考えられるし、株主も、利潤最大化よりも、安定した利潤を長期に確保するほうを好む可能性がある。したがって、企業の目的関数として利潤最大化が必ずしも常に成立しているとは言えない。しかしながら、利潤最大化を行動原理としてここで採用する理由はいくつかある。まず第一に、市場競争が激しい場合利潤最大化行動をとらない企業は市場から撤退を余儀なくされる可能性が高いこと、第二に利潤最大化は数学上非常に単純な定式化が可能であり、株主と経営者、労働者、債権者などの利害関係者の複雑なゲームの解として企業行動を扱うよりもはるかに容易である事である。ここでの分析の主眼は特定企業の設備投資の決定を分析することではなく、マクロ経済全体に関するインプリケーションを得ることにある。各企業の投資行動が短期的には利潤最大化行動から乖離していたとしても長期的には各企業が利潤最大化を行っておりかつ企業数が非常に多く、さらに企業間での相関が小さいならば、長期的な各企業の平均値を短期における全体の企業の平均値とみなしても構わないと考えることもできる。以上の理由から、ここでは、企業は利潤を最大化する存在と仮定しよう。

今期の投資は来期の企業の資本ストック水準を決定する。したがって、今期投資を行うことで来期の生産量を増加させることが可能であるため企業の利潤最大化には将来の利潤が入ることになる。ここで、企業がリスクのない債券市場にアクセスがあると仮定しよう。そこで決定される金利が r_t とする。すると、この企業は今期 100 円を債権に投資することで、来期に $100 * (1 + r_{t+1})$ 円を受け取ることができる。換言すれば、来期の割引率は r_t になる。企業が 2 期間存在すると仮定すると、企業の利潤は

$$\pi(K_t) - I_t - \phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right) I_t + \frac{1}{1 + r_{t+1}}\left[\pi(K_{t+1}) - I_{t+1} - \phi\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}\right) I_{t+1}\right] \tag{40}$$

となる。2 期間ではなく無限期間存在するならば

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left(\prod_{m=0}^{s}\left(\frac{1}{1 + r_{t+m}}\right)\right)\left[\pi(K_{t+s}) - I_{t+s} - \phi\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right) I_{t+s}\right] \tag{41}$$

金利が一定であれば

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1 + r}\right)^{s}\left[\pi(K_{t+s}) - I_{t+s} - \phi\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right) I_{t+s}\right] \tag{42}$$

制約条件は

$$I_t = K_{t+1} - K_t \qquad \text{for all t} \tag{43}$$

である。すなわち、これは無限個の制約式を持ち、無限個の変数について利潤を最大化する問題となっている。無限個の制約と変数を扱うことは容易ではない。なぜなら一階条件や市場均衡条件もまた無限個存在することになり、均衡を計算するには無限次元の非線形連立方程式を解かねばならないためである。

経済学では、無限個の制約や変数が出てくることがよくあるが、そういう時、我々は 2 種類の手法のいずれかを用い分析する。第一は、有限個の変数で表すことの出来るルールを見つけることである。これは Policy Function と呼ばれるものであり、数学的には動的計画法と呼ばれる手法である。もう一つは、経済モデルが長期的、すなわち無限期間の先では一つの状態に収束していくことが多いことを利用し、その定常状態付近での動きを、多少の不正確さを認めながらも近似する手法である。後者は比較的容易であり、特にマクロ動学において多用されている。前者は近年利用される機会が増えているが、複雑な数値計算が必要になることが多い。ここでは、古典的な後者の手法を利用して分析する。

改めて企業の利潤最大化問題を定式化すると

$$Max \quad \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1 + r}\right)^{s}\left[\pi(K_{t+s}) - I_{t+s} - \phi\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right) I_{t+s}\right] \tag{44}$$

$$s.t. \;\; I_t = K_{t+1} - K_t \qquad \text{for all t} \tag{45}$$

である。これはラグランジュの未定乗数法で描写することが可能であり乗数を λ_t とすると、

$$L = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1 + r}\right)^{s}\left[\pi(K_{t+s}) - I_{t+s} - \phi\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right) I_{t+s}\right] + \sum_{s=0}^{\infty}\lambda_{t+s}\left(I_{t+s} - K_{t+s+1} + K_{t+s}\right) \tag{46}$$

ここで、新たに変数 q を以下のように定義する。

$$q_{t+s} = (1 + r)^{s}\,\lambda_{t+s} \tag{47}$$

すると、上の式は以下のように書き換えることが出来る。

$$L=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s}\left[\pi\left(K_{t+s}\right)-I_{t+s}-\phi\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right)I_{t+s}+q_{t+s}\left(I_{t+s}-K_{t+s+1}+K_{t+s}\right)\right] \tag{48}$$

s=0 のときの投資 I_t に関する一階の条件は

$$-1-\phi-\frac{I_t}{K_t}\phi'+q_t=0 \tag{49}$$

金利はプラスであることを考えると

$$q_t=1+\phi+\frac{I_t}{K_t}\phi' \tag{50}$$

これは、投資のシャドウプライス q が利潤が最大化されている時、投資の限界費用に等しいことを意味している。次に、資本ストック K_{t+1} に関する一階条件を計算してみよう。K_{t+1} は、制約式の中で、時期をずらして 2 回出てくることに注意すると

$$\pi\left(K_{t+1}\right)'+\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^{2}\phi'+q_{t+1}-(1+r)\,q_t=0 \tag{51}$$

ここで、$\Delta q_{t+1}=q_{t+1}-q_t$ と定義すると

$$\pi\left(K_{t+1}\right)'+\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^{2}\phi'=rq_{t+1}-\Delta q_{t+1}-r\Delta q_{t+1} \tag{52}$$

今期、一円の投資を行うとしよう。そのとき、来期の資本もまた一円増加し、かつ調整費用がかかる。左辺は資本の限界収入と調整費用の軽減分の和、すなわち来期における資本の限界便益である*[14]。右辺第一項は今期一円の投資をすることで失う t+1 期での機会費用であり、第二項は今期一円の投資をすることで失うキャピタルゲインである。第二項についてもう少し説明すると、以下のようになる。t+1 期の q が t 期に比べで上昇していると仮定しよう。すなわち、$\Delta q_{t+1}>0$ であると仮定する。このとき、今期 1 円投資すれば来期よりも安いシャドウプライスで投資が可能であり、来期においてキャピタルゲインを得ることが出来る。したがって、今期 1 円投資するときのキャピタルロスは $-\Delta q_{t+1}$ になるのである。第三項は金利が小さく、かつ q の変化が少ない場合は無視できるほど小さくなる。上の式の右辺は資本の限界便益、左辺は限界費用と解釈することが出来るのである。

最後に、もう一つの利潤最大化の条件が必要になる。それは、無限先での資本ストック水準に関するものである。いま、企業が T 期に解散すると仮定しよう。すると、T 期末に企業は資本ストックを保有する動機はない。なぜなら、T+1 期に生産力を有していても利潤は増加しないためである。すなわち、T 期の資本の現在割引価値はゼロでなければならない。シャドウプライス q を利用すると

$$\left(\frac{1}{1+r}\right)^{T}q_TK_T=0 \tag{53}$$

これを無限先にまで延長すると

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t}q_tK_t=0 \tag{54}$$

*[14] この式はオイラー方程式と呼ばれることがある。

となる。この条件は横断条件 (Transversality Condition) と呼ばれるものであり最大化のための必要条件として、時には十分条件の一つとして利用される。この横断条件が必要なのか否かは、無限期間の問題ではかなり難しい問題を含んでいる[*15]。ここでは、一階の条件と横断条件を満たす経路が存在し、かつその経路上で目的関数が凹関数になっていれば、その経路は企業の利潤を (少なくとも局所的には) 最大化させていることになる、すなわち十分条件の一つであると了解して欲しい。

4.1.5 連続時間における利潤最大化

離散時間における利潤は

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s}\left[\pi\left(K_{t+s}\right)-I_{t+s}-\phi\left(\frac{I_{t+s}}{K_{t+s}}\right)I_{t+s}\right] \tag{55}$$

であった。連続時間では割引率を自然対数の底、e を利用し以下のようになる

$$\int_{t=0}^{\infty}e^{-rt}\left(\pi\left(K_t\right)-I_t-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t\right)dt \tag{56}$$

離散時間におけるシグマが広義積分に置き換わっていることに注意せよ。つぎに、制約式は

$$\frac{dK_t}{dt}\equiv\dot{K}_t=I_t \tag{57}$$

となる。このとき、我々はラグランジュアンの代わりに現在価値ハミルトニアンと呼ばれる以下の関数を作る

$$H=\pi\left(K_t\right)-I_t-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t+q_tI_t \tag{58}$$

まず、投資に関する一階条件は単に偏微分を 0 とし

$$q_t=1+\phi+\frac{I_t}{K_t}\phi' \tag{59}$$

となる。これは前節の結果と同一である。次に資本ストックに関しては

$$\dot{q}_t-rq_t=-\frac{\partial H}{\partial K_t} \tag{60}$$

が一階条件であり[*16]、この場合は

$$\pi\left(K_t\right)'+\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2\phi'=rq_t-\dot{q}_t \tag{61}$$

となる。この条件はオイラー方程式とも呼ばれる。経済学的な解釈は前節と同様であり左辺が資本の限界便益、右辺が資本のコストであり、金利のロスと失うキャピタルゲインである。横断面の条件は前節の条件の割引率を連続型に変形し

$$\lim_{t\to\infty}e^{-rt}q_tK_t=0 \tag{62}$$

である。この企業の利潤最大化行動は、二つの一階条件と横断条件を満たすような資本ストックと投資の経路がその解となる。

[*15] Arrow and Kurz(1970) は詳細な議論を展開しているので、興味ある学生は参照すること。

[*16] この条件はハミルトニアンダイナミックスとも呼ばれるものであり、ポントリャーギンの最大値原理から導かれる。最大値原理の証明は非常に困難であるが、簡易な証明は小山 (1995) に書かれている。

4.1.6 現在価値ハミルトニアンの一階条件の導出に関して

上記の最適化問題を有限視野にし定式化してみる。

$$\int_0^T e^{-rt}\left(\pi\left(K_t\right)-I_t-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t\right)dt \tag{63}$$

$$\frac{dK_t}{dt}\equiv\dot{K}_t=I_t \tag{64}$$

$$K_Te^{-rT}\geq 0$$

を通常のラグランジュアンを用いて記述すると

$$L=\int_0^T e^{-rt}\left(\pi\left(K_t\right)-I_t-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t\right)dt+\int_0^T e^{-rt}q_t\left(I_t-\dot{K}_t\right)dt+\lambda K_Te^{-rT}$$

ここで q_t および λ はラグランジュ乗数である。ここでの操作変数は K_t と I_t であるが、ラグランジュアンの中に $\dot{K}_t$ があることが問題を複雑にしている。K_t を変化させれば $\dot{K}_t$ も変化することが予想されるが、このままではどう変化するかがわかりにくい。そこで部分積分を用い

$$\begin{aligned}&\int_0^T e^{-rt}q_t\dot{K}_tdt\\&=\left[e^{-rt}q_tK_t\right]_0^T-\int_0^T \dot{\left(e^{-rt}q_t\right)}K_tdt\\&=e^{-rT}q_TK_T-q_0K_0-\int_0^T \dot{\left(e^{-rt}q_t\right)}K_tdt\end{aligned}$$

を利用する。すると

$$\begin{aligned}L=&\int_0^T e^{-rt}\left(\pi\left(K_t\right)-I_t-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t\right)dt+\int_0^T e^{-rt}q_t\left(I_t\right)dt-e^{-rT}q_TK_T\\&+q_0K_0+\int_0^T \dot{\left(e^{-rt}q_t\right)}K_tdt+\lambda K_Te^{-rT}\\L=&\int_0^T e^{-rt}\left(\pi\left(K_t\right)-I_t-\phi\left(\frac{I_t}{K_t}\right)I_t+q_tI_t-\left(rq_t-\dot{q}_t\right)K_t\right)dt\\&+\lambda K_Te^{-rT}-e^{-rT}q_TK_T+q_0K_0\end{aligned}$$

上記を K_t に関して微分すると

$$\left(\pi'\left(K_t\right)+\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2\phi'-\left(rq_t-\dot{q}_t\right)\right)=0$$

すなわち

$$rq_t-\dot{q}_t=\pi'\left(K_t\right)+\left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2\phi'$$

となり、現在価値ハミルトニアンを用いた場合と同じ一階条件を得ることが可能である。なお、I_t に関して微分すると

$$-1-\phi-\frac{I_t}{K_t}\phi'+q_t=0$$

でやはり現在価値ハミルトニアンを用いた場合と一致する。

4.1.7 Tobin の Q と調整費用関数

投資に関する一階条件を見てみよう。離散、連続時間に関わらず一階条件は以下の式であった。

$$q_t=1+\phi+\frac{I_t}{K_t}\phi' \tag{65}$$

ϕ は I/K の関数であり右辺を I/K で微分すると

$$2\phi'+\left(\frac{I_t}{K_t}\right)\phi" \tag{66}$$

であるが、これは仮定より正である。したがって、陰関数定理を利用可能であり I/K を q の関数として書くことが出来る。すなわち、

$$\frac{I_t}{K_t}=h\left(q_t\right),\quad h'>0,\quad h\left(1\right)=0 \tag{67}$$

上の式の意味を解釈しよう。q は資本のシャドウプライスであった。これは、資本の限界的な価値を意味しており、限界の q と呼ばれることもある。限界の q が 1 のとき、I/K は 0 である。すなわち、投資は行われない。q が 1 よりも大きいと、h は q の増加関数であることから、I/K は正の値をとる。すなわち、投資が行われる。一方 q が 1 より小さいときは、逆に投資はマイナスとなる。この q は投資決定において、Tobin の q と同じ役割を持つのである。次に、上の式をよくみると、I/K の決定において、q 以外のいかなる経済的情報も利用していないことがわかる。すなわち、生産水準や金利は投資に直接影響を与えず投資はただ、q にのみ依存して決定される。統計学的には q は投資・資本比率の十分統計量になっているといえる。これは極めて強い結果であり実証研究に与える経済学的含意は大きい。調整費用による投資理論が正しければ、I/K を q に回帰すれば、その他のいかなる説明変数も I/K に有意な影響を与えないことになるからである。実際この理論を用いて様々な実証研究が行われている。

問題は、この限界の q をどう計算するかである。限界の q は資本のシャドウプライスである。シャドウプライスというのは、直接観察できず、陰のなかにあるからシャドウプライスと呼ばれるのである。Tobin の (平均の)q は株式の時価総額と企業の資本の再調達価格から計算することができた。しかしながら、限界の q はそのようなデータから直接計算することはできない。

この限界の q と平均の q の関係に関して、Hayashi(1982) の定理が存在する。これは、特殊な状況下では限界の q は平均の q と一致することを示すものであり、多くの実証研究が依拠している重要な定理である。仮定として

1. 財・要素市場は完全競争
2. 生産技術は一次同次
3. 株式市場は効率的

以上の 3 条件を満たすとき、限界の q と平均の q は一致する。簡単なケースの証明を以下に示す。今企業が資本、労働の 2 つの生産要素をもつ新古典派生産関数 $F\left(K,L\right)$ を有するとしよう。すると、資本に関する

オイラー方程式は以下のようになる。

$$\dot{q}_t = rq_t - \frac{\partial F}{\partial K_t} - \left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 \phi' \tag{68}$$

ところで、

$$\left(q_t \dot{K}_t\right) = \dot{q}_t K_t + \dot{K}_t q_t \tag{69}$$

$$= K\left(rq - \frac{\partial F}{\partial K_t} - \left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 \phi'\right) \tag{70}$$

$$+ I\left(1 + \phi + \frac{I_t}{K_t}\phi'\right) \tag{71}$$

$$= Krq + I\left(1 + \phi\right) - F\left(K, L\right) + wL \tag{72}$$

t 期におけるキャッシュフローは

$$cashflow = \pi_t = F\left(K, L\right) - I\left(1 + \phi\right) - wL \tag{73}$$

であるから、整理すると

$$\left(q_t \dot{K}_t\right) = Krq - \pi_t \tag{74}$$

ここで、$x_t = q_t K_t$ と定義し、

$$\dot{x}_t = rx_t - \pi_t \tag{75}$$

を解く。まず rx_t を左辺に移項して e^{-rt} を乗じると

$$\left(\dot{x}_t - rx_t\right) e^{-rt} = -e^{-rt}\pi_t \tag{76}$$

部分積分の性質を用いると

$$\frac{de^{-rt}x_t}{dt} = -e^{-rt}\pi_t \tag{77}$$

両辺を積分すると

$$\int_{t=0}^{\infty} \frac{de^{-rt}x_t}{dt} dt = -\int_{t=0}^{\infty} e^{-rt}\pi_t dt \tag{78}$$

整理すると

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt}x_t - x_0 = -\int_{t=0}^{\infty} e^{-rt}\pi_t dt \tag{79}$$

右辺第一項は横断条件より 0 である。したがって、

$$K_0 q_0 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt}\pi_t dt \tag{80}$$

整理すると

$$q_0 = \frac{\int_{t=0}^{\infty} e^{-rt}\pi_t dt}{K_0} \tag{81}$$

右辺の分子は企業のキャッシュフローの現在割引価値であり、株式市場が効率的であれば、株価に等しい。分母は今期の企業資本ストックの総量であるから、右辺の Tobin の q、すなちわ平均の q に他ならない。左辺は限界の q であるから、上記の条件の下では、平均の q と限界の q は一致するのである。

林の定理が現実世界でどの程度適用可能か否かに関しては議論がある。明らかに、企業の生産関数は一次同次ではないし、市場は完全競争ではない。また、株式市場にバブルがないとする仮定にも疑問がないわけではない。しかしながら、林は 1982 年の論文で、実際に平均の q が投資の十分統計量に近いことを示している。近年のマイクロデータ、およびパネルデータを用いた、平均の q による投資関数の説明力は非常に弱いことが多い。むしろ単純な部分調整モデルのほうが投資関数として優れているとする研究もある。q 理論の投資の決定理論としての評価に関しては定まっていないのが現状である[*17]。

5 動学分析

本節では、連続時間のフレームワークを用いて簡単な動学分析を行ってみよう。ここでいう動学分析は、経済環境の変化に対し、企業の投資行動がどのように時間を通じて変化していくかを追跡することを意味する。この経済における動学を規定する方程式は

$$\dot{K}_t = h\left(q_t\right) K_t \tag{82}$$

$$\dot{q}_t = rq_t - \pi\left(K_t\right)' - \left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 \phi' \tag{83}$$

の二本の微分方程式と横断条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt} q_t K_t = 0 \tag{84}$$

である。いま、(82) と (83) の右辺が正、あるいは負の値をどのような時にとるか考えてみる。まず資本ストックに関しては

$$h\left(q_t\right) K_t > 0 \Longleftrightarrow q_t > 1 \tag{85}$$

である。したがって、限界の q が 1 より大きいか小さいかにより資本ストックが増加するか減少するかが決定される。限界の q に関してはより複雑であり

$$\dot{q}_t > 0 \Longleftrightarrow rq_t > \pi\left(K_t\right)' + \left(\frac{I_t}{K_t}\right)^2 \phi' \tag{86}$$

となる。右辺第一項は、利潤関数が凹関数であれば、資本ストックの減少関数となる。第二項は投資がゼロに近ければ無視することが出来る。したがって、投資がそれほど大きな値をとらないときは資本ストックが大きいほど、また q が大きいほど q は増加する傾向にある。また、投資がゼロに近いところでは右辺が K の減少関数として表される。

いま、q を縦軸に、K を横軸にとった平面を考える。図 1 の $\dot{q}_t = 0$ と $\dot{K}_t = 0$ 線は、それぞれ、q および K が変化しない線を表している。両者の交点では q と K の両方が変化しないため、経済はその点上ではもはや移動しない。したがってその点は定常状態である。$\dot{K}_t = 0$ は q=1 の水平線であり、これよりも q が大きいときすなわち q が一より大きいときに資本は増加する。したがって、資本が増加するか否かはこの線の上と下

[*17] 一部の実証研究では、q を企業パフォーマンスの指標として用いられている。おそらく、分子に株式の市場価値があることによるのであろうが、本節の議論にしたがえば q は単に資本が過少か過剰かをあらわす指標にすぎず、q が大きい企業とは、資本が過少であることを意味するだけであり、収益性とは直接の関係はない事に注意せよ。

かに依存する。同様に $\dot{q}_t = 0$ の左右、または上下で q が増加するか否かが決まる。この経済で定常状態に収束するのは両者の線に挟まれた、負の傾きを持つ直線一本のみであり、この直線を *saddle path* と呼ぶ。

このように、経済がどのように動いていくかを描写する図を位相図と呼ぶ。位相図は動学モデル分析における基本であり、いささか厳密さに欠けるところがあるが、非常に強力なツールであり、経済政策の効果を質的に分析するのに極めて適している。本講義、上級マクロ経済学の一つのゴールは、位相図を用いて、経済主体の動学最適化行動を描写し、様々な環境変化、将来予測に対応した行動を分析する能力を身につけることにある。

まずは、数式を用いて、saddle path の厳密な導出を行ってみよう。

5.1 線形近似

一般に 2 変数の一階の微分方程式を以下のように書くことにする。ただし、f, g は連続微分可能な関数である。

$$\dot{K}_t = f(K, q) \tag{87}$$

$$\dot{q}_t = g(K, q) \tag{88}$$

これらの式を定常状態 $\left(\overline{q}, \overline{K}\right)$ で線形近似 (一回の Taylor 展開) すると

$$\dot{K}_t = f\left(\overline{q}, \overline{K}\right) + f_k\left(\overline{q}, \overline{K}\right)\left(K - \overline{K}\right) + f_q\left(\overline{q}, \overline{K}\right)(q - \overline{q}) \tag{89}$$

$$\dot{q}_t = g\left(\overline{q}, \overline{K}\right) + g_k\left(\overline{q}, \overline{K}\right)\left(K - \overline{K}\right) + g_q\left(\overline{q}, \overline{K}\right)(q - \overline{q}) \tag{90}$$

$\left(\overline{q}, \overline{K}\right)$ が定常状態 $\left(f\left(\overline{q}, \overline{K}\right) = g\left(\overline{q}, \overline{K}\right) = 0\right)$ であることを利用すると、上の式は簡単な行列で示すことが可能であり

$$\begin{pmatrix} \dot{K} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_k\left(\overline{q}, \overline{K}\right) & f_q\left(\overline{q}, \overline{K}\right) \\ g_k\left(\overline{q}, \overline{K}\right) & g_q\left(\overline{q}, \overline{K}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K - \overline{K} \\ q - \overline{q} \end{pmatrix} \tag{91}$$

さて、定常状態では $\dot{K} = 0, \dot{q} = 0$ であるため、下記の式が成立している。

$$r = \pi\left(\overline{K}\right)', \overline{q} = 1,$$
$$h'(\overline{q}) = \frac{1}{\phi' + \phi' + \frac{\overline{I}}{\overline{K}}\phi''} = \frac{1}{2\phi'}$$

上記の関係を用い、設備投資の微分方程式を線形近似すると、下記のような近似式を得ることが出来る。

$$\begin{pmatrix} \dot{K} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{K^*}{2\phi'} \\ -\pi'' & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K - \overline{K} \\ q - \overline{q} \end{pmatrix} \tag{92}$$

ここで、この係数行列の固有値を λ_1, λ_2、固有ベクトルを P_1, P_2 としよう。そして $P = (P_1, P_2)$ を正方行

列とする[*18]。すると、ジョルダンの標準形に書き直すことが可能であり、

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{K^*}{2\phi'} \\ -\pi'' & r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{93}$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} \dot{K} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} K - \overline{K} \\ q - \overline{q} \end{pmatrix} \tag{94}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{K} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} K - \overline{K} \\ q - \overline{q} \end{pmatrix} \tag{95}$$

新たに変数を定義し

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \equiv P^{-1} \begin{pmatrix} K - \overline{K} \\ q - \overline{q} \end{pmatrix} \tag{96}$$

とすると、

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{K} \\ \dot{q} \end{pmatrix} \tag{97}$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{98}$$

この微分方程式は簡単に解くことが可能であり

$$z_{1t} = e^{\lambda_1 t} z_{10} \tag{99}$$

$$z_{2t} = e^{\lambda_2 t} z_{20} \tag{100}$$

ここで、

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \tag{101}$$

とすると、

$$K_t - \overline{K} = P_{11} e^{\lambda_1 t} z_{10} + P_{12} e^{\lambda_2 t} z_{20} \tag{102}$$

$$q_t - \overline{q} = P_{21} e^{\lambda_1 t} z_{10} + P_{22} e^{\lambda_2 t} z_{20} \tag{103}$$

ここで、λ_1, λ_2 が実数であったとしよう。両方とも正であると、K も q もその絶対値は非常に大きくなっていく。したがって定常状態には収束しない。一方両方とも負であるときは、いかなる値を P や z が取ったとしても、K と q は定常状態に収束していく。したがって、この場合はいかなる初期点からであっても経済は定常状態に収束していく。$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ の時は、$P_{12} z_{20}$ および、$P_{22} z_{20}$ が両方ともゼロであるときに限り、この経済は定常状態に収束していく。これは、

$$z_{20} = 0 \Longleftrightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} K - \overline{K} \\ q - \overline{q} \end{pmatrix}_2 = 0 \tag{104}$$

[*18] ときに、固有値が異なる二つの値をとらず、さらに固有ベクトルが 2 次元空間を張らないこともあるが、その場合は一般化固有ベクトルを使用する必要がある。ここでは、異なる 2 つの固有値があると仮定する。

を意味する。これは、K と q の平面における直線を意味する。この直線上でのみ、この経済は定常状態に収束していくのである。この直線を saddle path といいこのときの定常状態を saddle と言う。

$$P^{-1}=\left(\begin{array}{cc} P^{11} & P^{12} \\ P^{21} & P^{22} \end{array}\right)$$

とすると、saddle path は

$$P^{21}\left(K-\overline{K}\right)+P^{22}\left(q-\overline{q}\right)=0 \tag{105}$$

であらわされる事になる。

投資に関する微分方程式で固有値を計算すると

$$\lambda_1 \times \lambda_2=\frac{\pi"\overline{K}}{2\phi'}<0 \tag{106}$$

であり、固有値の積が負であることから、片方が正で片方が負であること、すなわちこの経済では定常状態が saddle であることがわかる[*19]。

マクロ経済学において定常状態が saddle であることは非常に重要な意味を持つ。一見、saddle は偶然にしか定常状態に収束しない不安定な状態に見えるかもしれない。しかし、マクロ経済モデルにおける定常状態ではほとんどの場合 saddle であり、saddle でない場合は非常に特殊な現象が生じている可能性が高い。

投資モデルにおける saddle について考えてみよう。いま、企業の資本ストック水準が定常状態よりも低い水準にあるとしよう。この資本ストックの水準は、投資によってしか変化させることが出来ない。すなわち、今期にいきなり横軸方向で定常状態水準に飛ぶ、すなわちジャンプすることは出来ない。資本ストックはジャンプできない変数なのである。一方 q はどうであろうか?q はその企業の将来収益の価値、または資本のシャドウプライスであった。これはどんな値でもとることが可能であり、ジャンプすることが可能な変数である。しかしながら、最適解ではオイラー方程式 (83) に従い動かねばならず、オイラー方程式ではジャンプは許されない。ジャンプせずに定常状態に収束させることができるのは、すなわち企業が投資をスムースに行うことで定常状態に移行できるような q の水準はユニークに定まりその点は saddle path 上にある。換言すれば、企業行動は常に saddle path 上にあり、外生的な要因が変化しない限り常に saddle 上にあるのが最適なのである。

なぜこのようなユニークネスが発生するのだろうか?一つの考え方は、この企業の問題は強凸制約の下での強凹関数の最大化であるため、最適点はユニークに定まると考えることが出来る。時間が無限であろうがなかろうが、凸問題の性質には変わりはないのである。

5.2 saddle path のシフト

もともと、定常状態に q と K があったとする。いま、資本の限界収益性 π' が上方にシフトしたとする。図 2 で示されているように、このとき、$\dot{q}_t=0$ は右にシフトする。限界収益が変化する前に、この企業が定常状態で操業しており、q は 1 に一致していたとする。このシフトによりどういう現象が生じるであろうか?限界収益が上昇したのだから、この企業の現在の設備資本ストック水準は過少であり、投資をすることが利潤最大化のためには必要である。どれだけの投資が必要であるか、決定するのは q であった。すなわち、q は投資の十分統計量であり、q の水準により投資水準も決定する。投資を増やすには q の上昇が必要である。q は新た

[*19] 同時に、固有値が実数であることも保証されることに注意せよ。

な定常状態に収束する新しい saddle path に向かい、上方にジャンプする。その後、q は定常状態に向かい単調に低下していく。その間、資本ストックは一貫して増加しつづける。換言するとシフト時点で q は 1 を大きく超えた水準にジャンプし、その後 1 に向かって低下しつづける。資本ストックは、古い定常状態水準から徐々に新たな定常状態水準まで増加していくのである。

資本の限界収益性が、今ではなく、将来、例えば一年後に増加することが判明したとしよう。このとき投資はどうなるだろうか?今現在の一階の条件は変化がないように見えるため、q と K はその今現在の定常状態水準に留まるように思われるかもしれないが、それは正しくない。現在の定常状態に居続けた場合、一年後にはその場所は定常状態ではなくなり、資本ストックは過小となる。ところが q の変化の方向は現在の q の水準と資本ストック水準、すなわち投資と資本ストック水準にのみ依存して決定される。最適条件であるオイラー方程式に従うと、投資が過小であるため、q は低下していき、そのため投資はさらに低下、資本ストックも低下し続け、生産が崩壊してしまう。これを避けるためには、将来、一年後に資本の限界収益の増加があることが判明したその瞬間に設備投資を増加させ、q も高める必要がある。初期時点における設備投資を増加幅は、一年後にちょうど、新たな saddle path に生産が乗るような水準として計算される。初期時点のジャンプにより、あとは、オイラー方程式に従い続けることで、定常状態に収束していくようになるのである。たとえ、現在時点では何も変化がおきていなくても、将来に何かしらの変化があると予想された時点で、企業の行動は変化する様子が位相図を使うと簡単に描写することができる。様々な経済環境の変化を想定して、位相図を用いて、企業にとり最適な設備投資行動を描写してみてもらいたい。

6 参考文献

投資と消費の動学モデルの、あまりテクニカルではない入門としては、

Fabio-Cesare Bagliano and Giuseppe Bertola (2008) *Models for Dynamic Macroeconomics*, Oxford University Press.

が Romer や Barro and Salai-I-Martin よりも包括的に、かつ詳しく説明している。

また、投資に関する理論は Adda and Copper(2003) の第八章に近年の実証分析の紹介があり参考になる。

日本語による理論の紹介は以下の吉川洋の二冊の本が詳細に説明している。

吉川洋 『マクロ経済学研究』、東京大学出版会 1984 年

吉川洋 『日本経済とマクロ経済学』、東洋経済新報社、1992 年

限界と平均の q の同値性を証明したのが林の貢献であり

Hayashi, F., “Tobin’s Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation,” *Econometrica*, 50, 1 January, 1982.

また、下記の Hyashi & Inoue はその後の実証研究の在り方に大きな影響を与えた。

Hayashi, F., and T. Inoue, “The Relation between Firm Growth and Q with Multiple Captial Goods: Theory and Evidence from Panel Data on Japanese Firms,” *Econometrica*, 59, 3, 1991.

Tobin の q を用いて日本の系列に資本市場の代替機能があるとし、おもに企業統治分析において一大議論を巻き起こしたのが

Hoshi, T., A. Kashayp and D. Sharfstein, “Corporate Structure, Liquidity and Investment: Evidence from Japanese Industrial Groups, ” *Quarterly Journal of Economics*, February, 1991.

ここでは触れなかった、irreversible investment に関しては、上記の Bagliano and Bertola にも若干の説明があるが、設備投資に関しては本格的に勉強したい者は下記の本を入手する必要がある。

Dixit, A., and R. Pindyck, 1994 *Investment under Uncertaintiy*, Princeton, NJ: Princenton University Press.

Cabellero は非連続的な投資に関して多くの貢献を行っている。Handbook of Macroeconomics の彼の展望論文は、設備投資に関して本格的に研究する場合の出発点としてふさわしいものである。

Caballero, R.J., 1999, “Aggergate Investment,” in Taylor and Woodford ed, *Handbook of Macroeconomics*, 1B, North-Holland.

微分方程式の定性的性質に関する読みやすい優れたテキストが

Perko, L., 1991 *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag.

ハミルトニアンを用いた動学的最適化の中心となるのは最大値原理と呼ばれるものであるが、この証明は極めて困難である。極めて簡易な説明は

小山昭雄　『経済数学教室 8』、岩波書店、1995 年

古典であるが、いまなお名著の誉れ高く、特に横断条件について興味深い考察のあるのは

Arrow, K.J., and M. Kurz, 1970, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Baltimore, Johns Hopkins Press.

おそらくいちばん簡単なのは以下の本の appendix である。

R.J.Barro, and X. Sala-I-Martin, (2003) *Economic Growth, second edition* , New York: MacGraw-Hill.

図 1

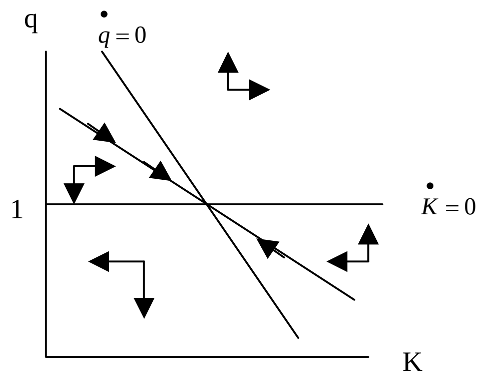

図 2