第3講　パネルデータ分析の基礎

3.1　はじめに

本章ではパネルデータ分析の基礎的な統計手法を概観する[1]。ここで論じる手法は基本的には分散分析の拡張であり、経済モデルで扱われる動学的な要素や意思決定に関わる選択モデルは次章以後で扱う。実際、パネルデータは年次データであったり、あるいは 5 年に一回のデータであったりして、データ頻度が低いことが多く、本章で論じる静学モデルを用いることが多い。

本章で強調したいことは、第一に、パネルデータ分析手法は相互に関連しているということである。考えればわかるように、パネルデータは時系列方向の情報とクロスセクション方向の情報を含んでおり、パネルデータ分析で集約する情報は、これらの情報を加重平均したものとなっている。

第二に、仮説検定の哲学に従って、誤ったモデルを残さない、あるいは誤ったモデルに基づいて結論を導くことのないように細心の注意を払うことが必要だということである。現在、多くの実証研究ではモデルの仮説検定を行わずに、様々な推定方法に基づく結果を羅列して、与えられたデータに対してどの推定が望ましいかを判断することを放棄しているように見受けられる。計量経済学の検定では（1）理論が実際の数値と矛盾しないことを検討すること、（2）与えられたデータに対して適切な分析方法を用いているかを検討すること、を主たる目的としている。パネルデータを用いることの利点は、そのデータサイズの大きさのおかげで、様々な分析手法の中から適切な手法を選び、より適切な分析が出来るということにある。同時に、様々な誤差が複合的に入り込んでおり、それを解きほぐすことによって、理論の問題が明らかにあるという側面もある。これらの作業の重要性を強調しておきたい。

第三に、パネルデータではデータが不完備になることは常に起こることであって、むしろパネルデータの常態であると考えるべきであるということである。本章で論じるように、多くの場合推計上あまり大きな問題にはならないが、不完備の程度について事前にチェックしておくことが大切である。

3.2　固定効果推定

第 1 章で論じた二元配置誤差構成要素モデルをさらに簡単化（$\alpha = 0, \lambda_t = 0$ と仮定）して固定効果推定を説明する。基本的な考え方は次のようにまとめることが出来る。

$$y_{it} = \beta x_{it} + \mu_i + \nu_{it} \tag{1}$$

[1] 本章は北村・藤木 (1995)、北村・中村（1998)、Fujiki and Kitamura (1995) の成果を用いている.

ここで μ_i は固定効果を表す。$\nu_{it} \sim IN(0, \sigma^2)$ とする。
（1）式の個々の主体 i に関して時間平均をとる。

$$\bar{y}_i = \beta \bar{x}_i + \mu_i + \bar{\nu}_i \tag{2}$$

時間とともに変化しない固定効果を（1）式から（2）式を引くことで消去すると次のようになる。

$$y_{it} - \bar{y}_i = \beta(x_{it} - \bar{x}_i) + (\nu_{it} - \bar{\nu}_i) \tag{3}$$

ここで、（3）式を最小二乗法推定すれば最良不偏推定量 $\tilde{\beta}$ を得ることができる。さらに、それを（1）式に代入して固定効果 $\tilde{\mu}_i$ を得る。

$$\tilde{\mu}_i = \bar{y}_i - \tilde{\beta}\bar{x}_i \tag{4}$$

この一連の推計方法を最小二乗ダミー変数推定 (least square dummy variables: LSDV) と呼ぶ。標本数 N が大きい場合に、固定効果 $\tilde{\mu}_i$ を推計すると大幅に自由度を失うことになる。時間 T が無限大になれば、この LSDV 推計の全てのパラメータは一致推計となる。しかし、T が固定されており、N が無限大になれば、β だけが一致推定となり、固定効果 μ_i は一致推定とはならない[2]。

パネルデータを用いて様々な方向の統計量を計算すると相互の関係が明らかになる[3]。まず、モデル全体（プーリング）の平均を $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ と定義すると

$$\tilde{x} = \frac{1}{TN}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} x_{it} \tag{5}$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{TN}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} y_{it} \tag{6}$$

この変数から各個体の残差平方和と x と y それぞれに関する残差を相乗したものを次のように定義する。

$$S_{xx}^{pool} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \tilde{x})^2 \tag{7}$$

$$S_{xy}^{pool} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \tilde{x})(y_{it} - \tilde{y})^2 \tag{8}$$

$$S_{yy}^{pool} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \tilde{y})^2 \tag{9}$$

[2]経済分析上、固定効果を推計することで潜在変数を明らかにしたい場合には、固定効果推計が必要である。しかし、大量の固定効果を推計しても何ら経済学的に解釈しないのであれば、固定効果をもう少し集約した効果、例えば、産業分類や地域分類などに置き換えて経済解釈を行った方が有意義な場合もある。

[3]Greene (2003, Chapter 13), pp.289-90 を参照。

同一個体内で被説明変数と説明変数の時系列 (ウィズイン) 平均を次のように定義する。

$$\bar{x}_i = \frac{1}{T}\sum_t x_{it} \tag{10}$$
$$\bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_t y_{it} \tag{11}$$

この変数からの個体内（ウィズイン）時系列平均の残差平方和と x と y それぞれに関する残差を相乗したものを次のように定義する。

$$S_{xx}^{with} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_i)^2 \tag{12}$$
$$S_{xy}^{with} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i) \tag{13}$$
$$S_{yy}^{with} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \bar{y}_i)^2 \tag{14}$$

次に、個体間（ビトウィーン）の残差平方和を次のように定義する。

$$S_{xx}^{btw} = \sum_{i=1}^{N}T(\bar{x}_{it} - \tilde{x})^2 \tag{15}$$
$$S_{xy}^{btw} = \sum_{i=1}^{N}T(\bar{x}_{it} - \tilde{x})(\bar{y}_i - \tilde{y}) \tag{16}$$
$$S_{yy}^{btw} = \sum_{i=1}^{N}T(\bar{y}_i - \tilde{y})^2 \tag{17}$$

以上より、次のような関係が導かれる。

$$S_{xx}^{pool} = S_{xx}^{with} + S_{xx}^{btw} \tag{18}$$
$$S_{xy}^{pool} = S_{xy}^{with} + S_{xy}^{btw} \tag{19}$$
$$S_{yy}^{pool} = S_{yy}^{with} + S_{yy}^{btw} \tag{20}$$

推計される β に関しては、プーリング推定（β^{pool}）、ウィズイン推定（β^{with}）、ビトウィーン推定（β^{btw}）に対しておのおのの次のような関係が導かれる。

$$\beta^{pool} = [S_{xx}^{pool}]^{-1}S_{xy}^{pool} = [S_{xx}^{with} + S_{xx}^{btw}]^{-1}[S_{xy}^{with} + S_{xy}^{btw}] \tag{21}$$
$$\beta^{with} = [S_{xx}^{with}]^{-1}S_{xy}^{with} \tag{22}$$
$$\beta^{btw} = [S_{xx}^{btw}]^{-1}S_{xy}^{btw} \tag{23}$$

これより次の式を得る。

$$S_{xy}^{with} = S_{xx}^{with}\beta^{with} \tag{24}$$
$$S_{xy}^{btw} = S_{xx}^{btw}\beta^{btw} \tag{25}$$

これを (21) に代入すると次のように整理できる。

$$\beta^{pool} = m^{with}\beta^{with} + m^{btw}\beta^{btw} \tag{26}$$

ここで

$$m^{with} = [S_{xx}^{with} + S_{xx}^{btw}]^{-1}S_{xx}^{btw} = I - m^{btw} \tag{27}$$

(23) 式はプーリング推定はウィズイン推定とビトウィーン推定の加重平均であることを示している。もしウィズイン推定の変動が小さく m^{with} が小さい場合には、ビトウィーン推定とプーリング推定は近似してくる。

3.3 ランダム効果推定

既に述べた通り、固定効果推定では各主体に対してダミーを割り当てるために、N が大きくなれば、推定すべきパラメータの数が膨大なものになり、その結果、推定における自由度は著しく低下する。固定効果 μ_i をランダム（確率変数、$\mu_i = IID\ (0, \sigma_\mu^2)$）だと仮定すれば、この問題は回避できる。ランダム効果推定を用いるのに適しているのは母集団から N 個を無作為に抽出したような場合である[4]。

ランダム効果モデルでは、固定効果 μ_i を確率変数として扱い、μ_i は撹乱項 u_{it} から独立していると仮定する。

$$\mu_i \sim IID(0, \sigma_\mu^2) \tag{28}$$
$$u_{it} \sim IID(0, \sigma_u^2) \tag{29}$$

単純化のために説明変数はひとつとし、μ_i を確率変数とする。誤差項は次のように表せる。

$$v_{it} = \mu_i + u_{it}$$

ここで

$$var(v_{it}) = \sigma_u^2 + \sigma_\mu^2$$
$$cov(v_{it}, v_{is}) = \sigma_\mu^2 \qquad for\ t \neq s$$
$$cov(v_{it}, v_{js}) = 0 \qquad for\ \forall\ t, s \quad if\ i \neq j$$

[4]家計に関するサンプル調査等がこれに相当する。

これは同一主体内の誤差項 μ_i と u_{it} が相関していることを表し、効率的な推定値を得るためには一般化最小二乗法（generalized least square: GLS）を用いる必要がある。Maddala (1971a,b) に従って以下のように簡略化できる[5]。

$$\beta_{GLS}^{rnd} = F\beta^{with} + (1-F)\beta^{btw} \tag{30}$$

ここで、$F^{with} = \frac{S_{xx}^{with}}{S_{xx}^{with}+\theta S_{xx}^{btw}}, \theta = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2+T\sigma_\mu^2}$ である。
先の (22)（23）より

$$\beta^{with} = \frac{S_{xy}^{with}}{S_{xx}^{with}} \tag{31}$$

$$\beta^{btw} = \frac{S_{xy}^{btw}}{S_{xx}^{btw}} \tag{32}$$

これを（30）に代入して整理すると、

$$\beta_{GLS}^{rnd} = \frac{S_{xy}^{with} + \theta S_{xy}^{btw}}{S_{xx}^{with} + \theta S_{xx}^{btw}} \tag{33}$$

と表せる。すなわち、ランダム効果推定（GLS）は固定効果（ウィズイン）推定（LSDV）とビトゥイーン推定（OLS）の加重平均であり、$\theta = 1$ の時には、$\sigma_\mu^2 = 0$ であり、固定効果（ウィズイン）推定（LSDV）と一致し、$\theta = 0$ の時には、$\sigma_u^2 = 0$ であり、ビトゥイーン推定（OLS）と一致する。θ がそれ以外の値をとる時は、ランダム効果推定が固定効果（ウィズイン）推定（LSDV）とビトゥイーン推定（OLS）に比べてより有効である。しかし、ビトゥイーン推定が一致推定でなければ、ランダム効果推定も一致推定とはならない。

3.4 不均一分散の問題

計量経済学では誤差の分散が均一でないために推計にバイアスが生じる不均一分散 (heteroskedasticity) は重要な問題として取り上げられてきた。経済主体の個別の違い (heterogeneity) に分析の焦点を当てるパネルデータには常につきまとう問題である。Mazodier and Trognon (1978) や Baltagi (2001, Chapter 5) によれば、不均一分散が存在するときに推計を行うと、一致推定は得られるが、有効推定ではなく、推計パラメータは推計誤差のロバスト修正を行わなければ、バイアスが残ることが知られている。問題は不均一分散が固定効果 μ_i から発生しているのか、撹乱項 u_{it} から発生しているのかで扱いが違ってくるということである。Mazodier and Trognon (1978) では不均一分散が固定効果 μ_i から発生している場合について考察している。この場合、固定効果は時間を通して固定されているので、分散がある時間に拡大す

[5] Greene (2003, Chapter 13), pp.295-6 も参照している。

るといった従来から考えられてきた不均一分散の問題を扱うのは実証的には難しい。

Baltagi (2001, Chapter 5) では撹乱項 u_{it} から発生している場合を扱っているが、データを $[y_{it} - (1-\sqrt{\theta_i})\bar{y}_i]$ のように変換した上で最小二乗法（OLS）を用いて推計する。ここで

$$\theta_i = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + T\sigma_{\mu_i}^2} \tag{34}$$

である。また、最小二乗法推計の誤差項は不偏一致推定であることを用いて、次のような平均残差平方和を求める。

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_{it}^2}{T-K} \tag{35}$$

この経済主体毎に計算される分散共分散行列と θ_i を用いて、実行可能な一般化最小二乗法 (feasible generalized least square estimation: FGLS) で推計すれば、少なくとも撹乱項の不均一分散の問題は解決できる。

一般にパネルデータでは不均一分散の問題が存在しているので、パラメータの推計においては White(1980) の heteroscedasticity consisitent estimation を用いて誤差バイアスをロバスト修正しておくべきである。誤差項の持つもう一つの問題である、系列相関 (autocorrelation) については第 4 章で論じる。

3.5 モデル選択のための検定

計量経済学の検定には一般に二つの意味がある。第一に、理論モデルが正しいかどうかを検定するということである。これは、理論的に演繹された関係式が統計的に支持されるかどうかを確認する作業であり、仮説検定の基礎にある考え方である。しかし、既に述べたように、パネルデータ分析は多様な経済主体の多様な状況に対する反応を含んでいるという意味で、同質的な経済主体の行動関係を仮説検定するということだけでは不十分である。

第二には、与えられたデータに対して適切な推定方法が用いられているかどうかを検証するということである。これは、実験計画法あるいは分散分析を基礎にして、集められたデータから、様々なノイズやコントロールできる要因を取り除いていく作業の一環と考えることができる。一般にパネルデータは時系列データやクロスセクションデータよりも多くの観察点を含み、事前に全体的な傾向を把握することが難しいことが多い。このような場合、手元にあるパネルデータをどのような手法で分析するのが望ましいかは、データ自体に決めさせるというのが正当な考え方である。そのためには、システマティックな検定手続きが必要になる[6]。

[6] もちろん、データ自体に決めさせると言っても、理論モデル設定が悪く、用いられた変数に

3.5.1 仮説検定

具体的なモデル選択のための検定について論じる前に、仮説検定の意義と手法について概観しておきたい。

仮説検定の理論はネイマン（Neymaa, Jerzy）とピアソン (Peason, Egon. S. カール・ピアソンの息子) の共同研究によって体系づけられ[7]、今日では標準的な手続きとなっている[8]。統計パッケージでもかなり自動的に仮説検定を行うようになり、研究者が意識して帰無仮説と対立仮説を立てて検討することも少なくなっている。その結果、研究者の仮説検定に対する意識を低くしているとも言えるので、ここで再確認しておきたい。

本来、仮説検定においては、主張したいことを対立仮説にし、否定したい仮説を帰無仮説にすることが原則とされている。これには、次の２つの理由がある。

第一に、仮説検定が非対称であるということがある。すなわち、仮説が偽であることを立証することはできるが、真であることを積極的に証明することはできないということである。つまり、仮説とデータが矛盾していれば仮説は間違っているとは言えるが、矛盾しないからといって、それが正しいとは言えないということである。データと矛盾しない仮説は他にも沢山あり得るからである[9,10]。

第二の理由として、仮説検定の過誤の問題がある。統計的検定量が決まると、次に帰無仮説を棄却して、対立仮説を採択するための基準として棄却域を決める。これは有意水準 1% 、5% 、10% の 3 段階で判断されるのが通常となっており、それに応じた水準で棄却域を決めればいいということである。このように棄却域を決めたとしても、帰無仮説と対立仮説の違いが微妙であるような場合には、仮説検定が２種類の過誤を犯す可能性が出てくる。それらは、帰無仮説が正しいときに帰無仮説を棄却してしまう誤りを**第１種の過誤**と、対立仮説が正しいときに帰無仮説を採択してしまう誤りを**第２種の過誤**である。この過誤にも非対称性がある。すなわち、第１種の過誤については有意水準 α を事前に与えて、棄却域を設定すれば、過誤を犯す確率をコントロールできるが、第２種の過誤については有意水準 α と標本数 n を所与

間違えがあれば、統計量は不十分となる。これらの問題は基本的にはモデルの特定化に問題があることによって生じていると考えられるので、理論モデルに戻って、検討し直す必要があり、小手先の修正は勧められない。

[7] Neyman and Pearson (1928a,b) を嚆矢として、10 編の共同論文が書かれた。

[8] 仮説検定の詳細については Lehmann(1986) を参照。

[9] この考え方は，カール・ポッパーの反証可能性に通じるものがある。すなわち、仮説に矛盾する事実が出てくれば仮説を棄却し、矛盾が出てこなければ、その仮説を一つの可能性として保持しておく。しかし、それはその仮説が真理に到達したと考えるのではなく、次の矛盾が発見されるまでの間、生き延びている仮説であると考える。科学の進歩はこのような反証可能性を備えた仮説検定の繰り返しによって漸進するというのがカール・ポッパーの科学史観である。ポッパーに先行するネイマン・ピアソンにすでにその科学史観が見出されると考えてもいいだろう。

[10] よく実証研究で、仮説が棄却できないということをもって、その仮説が正しいという判断をしている場面を見かけるが、これは正しくない。仮説が棄却できないということは文字通り、棄却せずに残しておくという程度の結果であって、それ以上の積極的な評価は仮説検定では出来ない。

とすれば、過誤を犯す水準 β[11]は仮説水準 μ に応じて変動し、コントロールできない。ただし、標本数 n を変化させることができれば、過誤確率 β も固定できる。もっとも、調査が終わって標本数を変動させることは現実的ではないと考えれば、やはり、帰無仮説に否定したい仮説をおいて、第 1 種の過誤を最小に抑えるというのが現実的な対応となる。

悩ましいのは、20-30% の有意水準であれば帰無仮説を棄却できるような場合である。この場合、第 1 種の過誤を犯さないためには、棄却域を厳しく設定し、帰無仮説は棄却できないという判断をすべきであるが、これは帰無仮説が正しいということではない。対立仮説を帰無仮説として検定して有意水準がさらに低くなる場合には、対立仮説も棄却できないということが起こりうる。また、総合的に判断すれば、対立仮説の方が尤もらしいと考えられる場合がある。仮説検定論としてはこの両者はともに棄却できないが、現実的な判断としては棄却できない程度を勘案して、対立仮説を選択するという判断はありうる[12]。これは、先に、仮説検定によって仮説を棄却することはできても、正しい仮説を選択することにはならないと指摘したことと関連している。対立する仮説が統計的に棄却できない場合には、その中で理論や統計量に照らし合わせて尤もらしい仮説を選ぶ作業をしなければならないが、このためには、仮説検定の棄却域以外の判断基準を持ち込まなければならない。

3.5.2 具体的な検定手順

以下では様々な推定法に基づく静学モデルを対象にしたモデル選択の手順を説明する。

第一に、固定効果推定法が正当化されるかどうかは、先ず、一元配置固定効果推定法（LSDV）とプーリング推定法 (OLS) を比べる。これは一元配置固定効果推定法における経済主体別の定数項が全て等しいという制約が課される場合がプーリング推定法であるとして、その制約について F 検定でテストする。つまり、制約が無効であるとの帰無仮説が棄却されると、一元配置固定効果推定法が正当化される。次に、二元配置固定効果推定法がプーリング推定法や一元配置固定効果推定法に対して正当化されるかどうかも同様に係数制約問題に関する F 検定を通して判断できる。

第二に、ランダム効果推定法がプーリング推定法に対して正当化されるかどうかについてはラグランジュ乗数法 (Lagrange Multiplier test) を用いる。すなわちプーリング推定法（OLS）の誤差項が平均的にゼロであるとの帰無仮説についてラグランジュ乗数統計量をもとめカイ二乗検定を行うのである。

---

[11]従って、$1-\beta$ は過誤を犯さない確率となり、これを検定力（power）と呼ぶ。これは、対立仮説が正しい時に、とりうる全ての μ の値に対して帰無仮説を棄却する確率を表わしている。

[12]卑近な例を用いれば、90 点以上を合格ラインにとしていたテストで、一人が 75 点、もう一人が 20 点だったときに、両者とも不合格ではあるが、補欠として一人選ぶとすれば 75 点の学生を選んだ方がいいのではないかという議論だと考えればわかりやすいかもしれない。

この結果、帰無仮説が棄却されると、誤差項に経済主体毎の異質性が存在することを意味し、ランダム効果推定法（GLS）が正当化される。

第三に、固定効果推定法とランダム効果推定法の間のモデル選択は Hausman test を用いる。これは、個別主体要因が、説明変数と無相関であるとの帰無仮説を立て、それをカイ二乗検定するものである。仮説が棄却されると固定効果推定法が正当化されることとなる。

上述の手続きをトーナメント方式で順次行って行くことによって最適な推定方法が選択できる。モデル選択の構造は図表 3.1 にまとめられている。具体的な検定テストの考え方は以下で順に説明していきたい。

図表 3.1　モデル選択の構造

3.5.3　F 検定

これまでの議論から明らかなように、まず時系列推定法、すなわち各経済主体別の定数項および傾きが全てばらばらの場合と、それらが全て等しいという制約が課されるプーリング推定法の場合について F 検定でテストする。

因みに、ここで用いる F 検定は分散分析で用いる F 検定に準じるものである。すなわち、ある帰無仮説の下で推定される残差平方和（RSS_0）を自由度 (ν_0) で割ったものは、その自由度のカイ二乗分布に従い、対立仮説の下でも同様に残差平方和 (RSS_1) を自由度 (ν_1) で割ったものを求め、帰無仮説と対立仮説の比をとったものは F（ν_0, ν_1）分布に従うという関係を用いる。

$$F(\nu_0, \nu_1) = \frac{RSS_0/\nu_0}{RSS_1/\nu_1} \tag{36}$$

具体的には、全ての定数項と傾きが共通であるとの帰無仮説の下に、第一自由度 $(N-1)(K+1)$、第二自由度 $(NT - N(K+1))$ の F 分布に従う。ここで K は定数項を除く説明変数の数を表している。この検定量は次のように表せる。

$$F(pool\ vs\ time\ series) = \frac{(RSS_{pool} - RSS_{TimeSeries})/(N-1)(K+1)}{RSS_{TimeSeries}/(NT - N(K+1))} \tag{37}$$

ここで、RSS_{pool} はプーリング推定法の残差平方和、$RSS_{TimeSeries}$ は時系列推定法の残差平方和を表している。他の変数はすでに定義した通りである。

次に、単純なプーリング推定法が棄却された場合、各主体の定数項はばらばらだが、傾きは等しいという一元配置固定効果推定法を帰無仮説として、時系列推定法を F 検定でテストする。具体的な F 分布は次のようになる。

$$F(oneway\ fixed\ vs\ time\ series) = \frac{(RSS_{of} - RSS_{TimeSeries})/(N-1)}{RSS_{TimeSeries}/(N(T-1)K)} \tag{38}$$

ここで、RSS_{of} は一元配置固定効果推定法の残差平方和である。ここで帰無仮説が棄却されなければ、一元配置固定効果推定法が採択される。

さらに、一元配置固定効果推定法が時系列推定法に対して採択されたとして、これがプーリング推定法に対して正当化されるかどうかを検定する。すなわち、一元配置固定効果推定法において定数項が全て等しい場合がプーリング推定法である。このとき第一自由度 $(N-1)$、第二自由度（$NT-(N+1)$ ）の F 分布に従う。

$$F(pool\ vs\ oneway\ fixed) = \frac{(RSS_{pool} - RSS_{of})/(N-1)}{RSS_{of}/(NT-(N+1))} \tag{39}$$

最後に、一元配置固定効果推定法がプーリング推定法に対して採択されたとして、これが二元配置固定効果推定法に対して正当化されるかどうかを検定する。すなわち、二元配置固定効果推定法における時間ダミーのパラメータがすべてゼロである場合が一元配置固定効果推定法となるとすると、F 分布は第一自由度 $(T-1)$、第二自由度 $(NT-(N+1))-(T-1))$ に従う。

$$F(oneway\ fixed\ vs\ twoway\ fixed) = \frac{(RSS_{of} - RSS_{tf})/(T-1)}{RSS_{tf}/(NT-(N+1)-(T-1))} \tag{40}$$

ここで、RSS_{tf} は二元配置固定効果推定法の残差平方和である。

このように、F 検定を順次行うことによって時系列 (個別) 検定とプーリング検定、一元配置固定効果推定、二元配置固定効果推定の間に序列をつけることが出来る。

3.5.4 ハウスマン検定

ハウスマン検定はモデル特定化を検証するために用いられている。帰無仮説 H_0 はモデルの特定化が正しいというものであり、対立仮説 H_1 はモデルの特定化に誤りがあるというものである。これは、簡単に言えば、二つの仮説に基づいて推定されたパラメータが等しいかどうかを検定して、等しくなければ、モデルの特定化に問題があるということになる。

次のようなモデルを考えよう[13]。

$$y = \beta x + u \tag{41}$$

[13] 以下の説明は Maddala(2001、pp.494-495）に従っている。

OLS 推定するためには、x は u から独立していなければならない。仮説検定の形で表すと次のようになる。

$$H_0: x \text{ と } u \text{ は互いに独立}$$
$$H_1: x \text{ と } u \text{ は互いに依存}$$

ここで、ハウスマン検定のための設定として、β に関して次のような二つの推定が得られたとしよう。

$\widehat{\beta}_0$は H_0の下で一致かつ有効推定であるが、H_1の下では一致推定ではない。
$\widehat{\beta}_1$は H_0でも H_1の下でも一致推定であるが、H_0の下では有効推定ではない。

そこで $\widehat{q} = \widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_0$ と定義する。ここから、Hausman は次の関係を導いた[14]。

$$var(\widehat{q}) = var(\widehat{\beta}_1) - var(\widehat{\beta}_0) \quad H_0\text{の下でそれぞれの分散を推定}$$

$\widehat{V}(\widehat{q})$ を $var(\widehat{q})$ の一致推定とすると、次の統計量は自由度 1 のカイ二乗分布に従うかどうかで帰無仮説 H_0 を検定できる。

$$m = \frac{\widehat{q}^2}{\widehat{V}(\widehat{q})} \sim \chi^2(1) \tag{42}$$

具体的にパネルデータ分析に関して、固定効果かランダム効果のどちらが望ましいかというテストをするためには次のような仮説を検定することになる。

$$H_0: \text{ランダム効果は説明変数 } x_{it} \text{と相関していない}$$
$$H_1: \text{ランダム効果は説明変数 } x_{it} \text{と相関している}$$

H_0 の下ではランダム効果推定（$\widehat{\beta}_r$）が有効一致推定である。固定効果推定 $\widehat{\beta}_f$ は帰無仮説に関係なく一致推定となる。ここで $q = \widehat{\beta}_f - \widehat{\beta}_r$ と定義し、$V(q) = V(\widehat{\beta}_f) - V(\widehat{\beta}_r)$ をハウスマン検定、$m = \widehat{q}'[\widehat{V}(\widehat{q})]^{-1}\widehat{q} \sim \chi^2(k)$ を計算することになる。β が $k \times 1$ ベクトルであり、V_1 と V_0 が行列式で表される場合には、上のハウスマン検定量は次のように書き換えられる。

$$m = \widehat{\mathbf{q}}'[\widehat{\mathbf{V}}(\widehat{\mathbf{q}})]^{-1}\widehat{\mathbf{q}} \sim \chi^2(k) \tag{43}$$

結果はスカラーの場合と全く同じである[15]。

---

[14] まず、$var(\hat{q}) = var(\hat{\beta}_1) - var(\hat{\beta}_0)$ が成り立つためには、$cov(\hat{\beta}_0, \hat{q}) = 0$ を証明しなければならない。この証明は Maddala(2001, pp.495-496) で与えられている。

[15] ここで用いる k は推計すべきパラメータ β から定数項と時間ダミーを除いたパラメータの数を表している。

3.5.5 Breusch-Pagan 検定

もう一つのモデル特定化テストとしては固定効果の分散がゼロかどうかを検定する Breusch-Pagan 検定がある。

次のようなモデルを考えよう。すなわち、定数項 μ は個別固定効果 μ_i ではなく、すべての i に対する定数である。

$$y_{it} = \mu + \mathbf{x}_{it}\beta + u_{it} \tag{44}$$

これは個別固定効果が存在しないのでプーリング最小二乗法推定ができる。その残差項を $\widehat{u}_{it}$ とすると、つぎのような統計量を定義できる。

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{t=1}^{T}\widehat{u}_{it}\right)^2 \tag{45}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{u}_{it}^2 \tag{46}$$

これに対して Lagrange Multiplier (LM) 統計を次のように定義すると、この統計量は自由度 1 のカイ二乗分布に従うはずである。

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)}\left(\frac{S_1}{S_2} - 1\right)^2 \sim \chi^2(1) \tag{47}$$

この検定が有意であれば、プーリング推定を棄却し、ランダム効果推定を採択することが望ましいことを意味する。

ハウスマン検定と Breusch-Pagan 検定をあわせるとプーリング推定、ランダム効果推定、固定効果推定の間に序列をつけることが出来る。

3.6 不完備パネルデータ

3.6.1 不完備パネルデータの分類

これまで、パネルデータはすべて揃っていて欠損がない完備パネルデータを想定していた。しかし、実際のパネルデータは個人や企業が回答拒否して観察値が欠落していることがある。また、さらには、企業であれば倒産したり、新規参入してくることもあるし、個人であれば、死亡したり、移転して追跡不可能になることもある。むしろ、パネルデータは不完備な状態の方が当たり前とさえ言える。では、不完備パネルデータを利用するために注意すべき問題点は何だろうか。

データの問題として、無作為（ランダム）にデータが欠測する場合と、有為に欠測する場合（例えば、企業倒産や個人のサンプルからの脱落）とでは

意味が違ってくる。無作為（ランダム）欠測の場合、一般に不完備パネルデータであっても、その平均、分散の計算をデータサイズを適切に考慮して計算し、データサイズに応じたウェイト付けした加重最小二乗法 (weighted least square=WLS) を用いて推定すれば問題はない。問題はデータの欠測に何らかの法則性 (self-selection reasons) があり、残ったサンプルが元のサンプルの性格と違ってくる場合である。この場合にはいわゆるサンプル・セレクション・バイアス問題に直面する[16]。

誤差項の分散に関する推定は ANOVA(分散分析) 法[17]や最尤法[18]が用いられている。ANOVA 法は、完備データに対しては最良不偏推定が得られることが知られている、不完備データに関しては、推定は誤差項の分散の関数として表されているが（Townsend and Searle (1971)）、不偏推定を得ることは可能である。しかし、等分散性、無相関性は保障されていないので、最良不偏推定とはならない。最尤法は十分統計量の関数となり、一致推定であり、漸近的に有効推定となることが示されているが、誤差項の分散を推定するために多くの自由度が失われている。

Baltagi and Chang (1994) は不完備パネルデータを用いて一元配置誤差構成要素モデルのモンテカルロ実験を行った。その結果、次のようなことが明らかにされた。（１）推定されたパラメータに関しては ANOVA 法による一般化最小二乗法の推定も、最尤法の推定もほとんどかわらないこと。（２）誤差項の個別分散推定においては ANOVA 法による推定は最尤法に比べて精度が低い。とりわけ、データの不完備度が高かったり、分散構成比 (variance component ratio) が１より大きい場合には、それが顕著となる。（３）不完備データから完備データ部分だけを摘出して推定することは、有効性を大幅に失う。

これらの結果より、不完備データだからといって、一概にそのサブセットである完備データにまで情報量を落とすことは薦められないし、現在では一般に用いられているパネル・データ推定プログラムでも不完備データに応じて自動的に推定を調整してくれるようになり、推定量が完備データと比べれば最良ではないとしても、不完備データの問題は大幅に縮小されるようになっている[19]。

[16] よく知られている事例は、ニュージャージー (New Jersey) およびインディアナ州ギャリー（Gary）における所得維持政策実験である。ここでは、家計簿をつけることに便益を感じない参加者が脱落し、軍隊に召集された人も脱落し、さらにこの実験から何の恩恵も受けない高額所得者も脱落した。このように、一定の傾向を持った人々が脱落することで実験計画の無作為化と局所管理の原則が破られていった。Hausman and Wise (1979) はこの脱落問題の引き起こすバイアスを推計している。彼らによれば脱落のバイアスは小さいが有意であることが明らかにされている。

[17] ANOVA 法については (Searle (1971)、Townsend and Searle (1971)、Wallace and Hussain (1969)、Swamy and Arora (1972)、Fuller and Battese (1974)、Henderson (1953) などを参照。

[18] 最尤法については Jennrich and Sampson (1976)、Harville (1977)、Das (1979)、Corbeil and Searle (1976a,b)、Hocking (1985) などを参照。

[19] もちろん、不完備データにも程度があり、あまりにデータの欠落が多いようだと利用上問題が出てくることもあることには注意を要する。

パネルデータの不完備性はいくつかの理由で発生するが、調査対象サンプルの一定比率を順次入れ替えるローテーション方式 (rotating panel) が採用されている場合にも発生する。

例えば、6 期間パネル調査を行っていて、毎期 6 分の 1 サンプルずつ入れ替えるという方式である。このような調査方法をとるのは、サンプルを一度に全部取り替えると前期からの連続性が全く失われてしまうが、6 分の 5 サンプルが残っていれば連続性はある程度確保される。このローテーションの 6 分の 1 に入るサンプルがランダムに選ばれているとすると (実際の家計調査では全国から選ばれているサンプルが無作為に入れ替えられる)。

図表 3.2 ローテーション・パネルの構造

もう一つの理由は、第 2 章で論じたようにサンプルから脱落してしまう場合である。これが特定の質問に対して拒否したい人が回答拒否ということで脱落したとすれば、これはシステマティックなものであり、ランダムな脱落とは違う取扱が必要になる。

さらに、サンプルから脱落するのではなく、一部の質問に答えないあるいは答えられないという問題（incidental truncation problem）もある。Heckman の賃金関数のサンプルセレクション・バイアスの問題などがこれに入る (調査のある時点で失業して賃金所得がなくなるケースなど)。

3.6.2 不完備パネルデータの推計

データの脱落が完全にランダムである場合には、不均一分散の時に論じたように、分散共分散行列を調整して実行可能な一般化最小二乗法 (FGLS) で推計する。すなわち、調整係数は次のように定義できる。

$$\lambda_i \equiv 1 - \sqrt{\frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + T_i \sigma_{\mu_i}^2}} \tag{48}$$

この係数を各主体の時系列平均に掛けて、それを各変数から引いて調整した式をランダム効果推定すればよい。

$$\mathbf{y}_{it} - \lambda_i \bar{\mathbf{y}}_i = (\mathbf{x}_{it} - \lambda_i \bar{\mathbf{x}}_i)'\beta + \varepsilon_{it} \tag{49}$$

具体的な推計モデルを考えてみよう[20]。

[20] 以下は Wooldridge(2002, chap17), pp.578-580 を引用している。

$$y_{it} = \mathbf{x}'_{it}\beta + \mu_i + u_{it} \quad t = 1,\ldots,T \tag{50}$$

$\mathbf{x}_{it}$ は $1\times k$ 行列、β は $k\times 1$ 行列。μ_i は $\mathbf{x}_{it}$ と相関している。

ここで、ある時点においていくつかの主体 i が観察されないケースを考えよう。具体的には $t=1$ 期にはすべての主体 i がサンプルに入っているとする。主体 i がランダムに欠落する場合、$\mathbf{s}_i \equiv (s_{i1},\ldots,s_{iT})'$ を $T\times 1$ 行列の選択指標（selection indicators) を考える。ここで $(\mathbf{x}_{it}, y_{it})$ が観察されれば $s_{it}=1$、観察されなければ $s_{it}=0$ とする。

$\{(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i,\mathbf{s}_i): i=1,2,\ldots,N\}$ を母集団からランダムに選ばれたサンプルであるとする。選択指標 s_i はどの期にどの i が欠落しているかを示す。

(1) 式の β の推定量は次のように表せる。

$$\begin{aligned}\hat\beta &= \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}s_{it}\ddot{\mathbf{x}}'_{it}\ddot{\mathbf{x}}_{it}\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}s_{it}\ddot{\mathbf{x}}'_{it}\ddot{y}_{it}\right)\\ &= \beta + \left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}s_{it}\ddot{\mathbf{x}}'_{it}\ddot{\mathbf{x}}_{it}\right)^{-1}\left(N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}s_{it}\ddot{\mathbf{x}}'_{it}u_{it}\right)\end{aligned} \tag{51}$$

ここで

$$\ddot{\mathbf{x}}_{it} \equiv \mathbf{x}_{it} - T_i^{-1}\sum_{r=1}^{T}s_{ir}\mathbf{x}_{ir}, \quad \ddot{y}_{it} \equiv y_{it} - T_i^{-1}\sum_{r=1}^{T}s_{ir}y_{ir}, \quad T_i \equiv \sum_{t=1}^{T}s_{it}$$

不完備パネルデータの固定効果が一致推定になるためには、全ての t に対して、$E(S_{it}\ddot{\mathbf{x}}'_{it}u_{it})=0$ が成り立つ必要がある。$\ddot{\mathbf{x}}_{it}$ はすべての $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{s}_i$ に依存しているので次のような強い外生性条件が満たされる必要がある。

条件 (a) $E(u_{it}\mid \mathbf{x}_i,\mathbf{s}_i,\mu_i)=0 \quad t=1,2,\ldots,T$

条件 (b) $\sum_{t=1}^{T}E(s_{it}\ddot{\mathbf{x}}'_{it}\ddot{\mathbf{x}}_{it})$ が非ゼロ行列である

条件 (c) $E(\mathbf{u}_i\mathbf{u}'_i \mid \mathbf{x}_i,\mathbf{s}_i,\mu_i)=\sigma_u^2\mathbf{I}_T$

条件 (a) と条件 (b) が満たされていれば、固定効果推定は不完備データのもとでも一致推定となる。

ランダム・ローテーションパネルやその他のランダムな欠落パネルの場合には、$\mathbf{s}_i$ は $(\mathbf{u}_i,\mathbf{x}_i,\mu_i)$ から独立しており、一般的な固定効果推定の下では $E(\mathbf{u}_{it}|\mathbf{x}_i,\mu_i)$ が成り立つ。

ランダム効果推定が成り立つためには、$\mathbf{s}_i$ と μ_i が独立している必要がある。すなわち、選択指標 $\mathbf{s}_i$ が個人効果 μ_i と相関していると思われるような場合には、例え、$E(\mu_i|\mathbf{x}_i)=0$ であっても、ランダム効果推定は不一致となる。

条件 (c) が加われば、固定効果の推定は有効となる。条件 (a),(c) より

$$Var\left(\sum_{t=1}^{T} s_{it}\ddot{\mathbf{x}}_{it}' u_{it}\right) = \sigma_u^2 \left[\sum_{t=1}^{T} E(s_{it}\ddot{\mathbf{x}}_{it}'\ddot{\mathbf{x}}_{it})\right] \tag{52}$$

固定効果推定の漸近分散は次のように表せる。

$$\hat{\sigma}_u^2 \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} s_{it}\ddot{\mathbf{x}}_{it}'\ddot{\mathbf{x}}_{it}\right)^{-1} \tag{53}$$

$\hat{\sigma}_u^2$ は次のように求められる。

$$E\left(\sum_{t=1}^{T} s_{it}\ddot{u}_{it}^2\right) = E\left(\sum_{t=1}^{T} s_{it}E(\ddot{u}_{it}^2 \mid \mathbf{s}_i)\right) = E\left\{T_i\left[\sigma_u^2(1-1/T_i\right]\right\} = \sigma_u^2 E\left[(T_i-1)\right] \tag{54}$$

$s_{it}=1$ の時固定効果推定の誤差は $\hat{u}_{it} = \ddot{y}_{it} - \ddot{\mathbf{x}}_{it}\hat{\beta}$ とする。

$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(T_i-1) \xrightarrow{p} E(T_i-1)$ であるので

$$\hat{\sigma}_u^2 = \left[N^{-1}\sum_{i=1}^{N}(T_i-1)\right]^{-1} N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} s_{it}\hat{u}_{it}^2 = \left[\sum_{i=1}^{N}(T_i-1)\right]^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} s_{it}\hat{u}_{it}^2 \tag{55}$$

したがって $\underset{N\to\infty}{plim}\,\hat{\sigma}_u^2 = \sigma_u^2$ が成り立つ。

これらの結果から、不完備パネルデータの推計が有効一致推定となるための条件が明らかになった。現実的には、これらの条件がある程度満たされていることが確認できれば、不完備パネルデータであっても、推計上、問題になることはない。逆に、これらの条件が大幅に毀損されている場合には、サンプルを削減するなり、分析方法をパネルデータ分析から各時間毎のクロス・セクション分析やプーリング推定に変更するなどしなければならない。

3.7 STATA コード

ここでは次のような簡単な生産関数を推計してみよう。

$$\begin{aligned} \ln Y_{it} &= \alpha_0 + \alpha \ln K_{it} + \beta \ln L_{it} + \gamma debt/asset_{it} + \delta(debt/asset)_{it}^2 \\ &\quad + \zeta(own\ capital\ ratio)_{it} + \eta(sales\ share)_{it} + \varepsilon_{it} \end{aligned} \tag{56}$$

これは、コブ・ダグラス型生産関数に全要素生産性 (TFP) に相当する部分に負債資産比率やその二乗、自己資本比率などの財務関連データ[21]と売上シェ

[21] これらはコーポレート・ガバナンス関連の変数であるとされ、債権者の関心を表す負債比率や株主資本である自己資本比率が企業生産にどのように影響を与えているかを見ようとするものである。

アによって表される市場競争の条件を代入して、その効果を見ようとするものである。データは第 7 章で論じる経済産業省の『企業活動基本調査』を用いている。

推計式では $\ln Y_{it} = \ln rs$、実質売上高、$\ln K_{it} = \ln k$、実質資本ストック、$\ln L_{it} = \ln L$、労働者数、$debt/asset_{it} = darat$、負債資産比率、$(debt/asset)^2_{it} = darat2$、負債資産比率の 2 乗、$(own\ capital\ ratio)_{it} = ocaprat$、自己資本比率、$(sales\ share)_{it} = ssuriagesyea$、売り上シェア、という表示になっている。

本章で用いた推計方法と検定は STATA では次のように書くことができる。

```
xtreg lnrs lnk lnL darat darat2 ocaprat ss, i(arin) fe
xtreg lnrs lnk lnL darat darat2 ocaprat ss, i(arin) re
xttest0
hausman
```

まず、固定効果推定は STATA では推計式の末に fe と書けばよい。ランダム効果推定は re と入れる。Breusch-Pagan 検定は xttest0 と書けばよく、ハウスマン検定は hausman と書く。ここでは固定効果を個別企業に割り振らずに産業分類 (ここでは arin という表示になっている) に振っている。これは i(arin) と書ける。

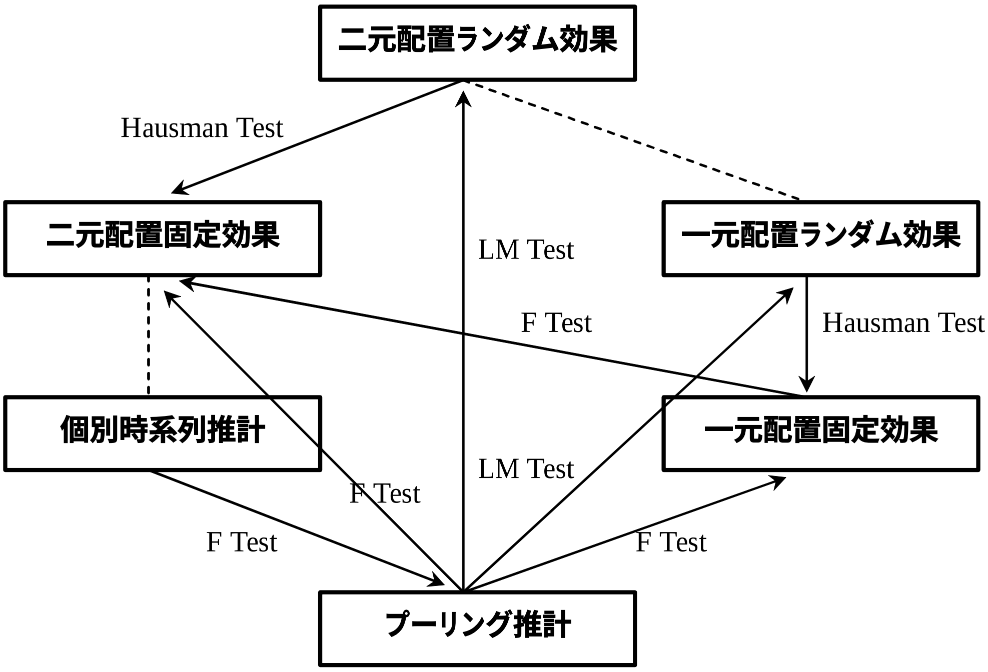
図表 3.3 は固定効果推定、ランダム効果推定の結果をまとめたものである。標本数は 26195 であり、産業分類は 33 種類に分かれている。推計されたパラメータは固定効果推定とほぼ同じであり、推定方法がパラメータ推計にバイアスを与えていないことがわかる。

資本と労働にかかるパラメータの合計は 1.027 であり、ほぼ 1 に近似できる。しかし、それ以外の財務変数や市場競争変数も有意に効いており、単純なコブ・ダグラス生産関数では無視されている要因も生産に影響を与えていることが示されている。F テストは固定効果推定とプーリング推定を比較したものであるが、固定効果が有意ではないという帰無仮説は棄却されている。

Breusch-Pagan 検定はプーリング推定とランダム効果推定を比較するもので、ここではプーリング推定が棄却され、ランダム効果推定が残る。ハウスマン検定はランダム効果推定が説明変数と相関していないという帰無仮説を棄却するもので、固定効果推定が残る。

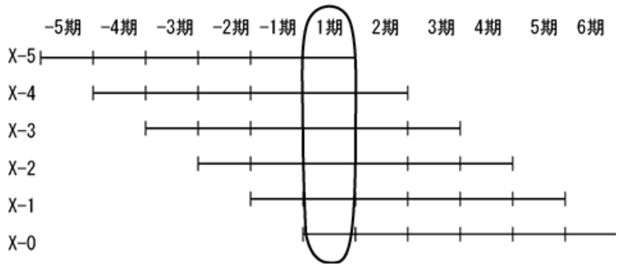
これら一連の仮説検定を STATA コードを書けば一度に行うことができる。この生産関数の推計においては、固定効果推定が望ましい統計手法として残ったと言える。当然ながら、これの結果は与えられたデータの与えられた期間に関して固定効果推定が棄却されないというだけのことであり、他のサンプルでは違った結果になることは十分あり得る。

図表 3.1



注）　矢印は各検定・診断テストについて、矢の根元が帰無仮説、矢の先が対立仮説を表している。

図表 3.2



図表3.3

Dependent Variable: Inrs	Fixed		Random	
	Estimated Coefficient	t-statistics	Estimated Coefficient	z-statistics
Ink	0.1637300	50.09	0.1641548	50.24
InL	0.8635048	151.85	0.8632702	151.88
darat	-0.5927591	-9.42	-0.5957934	-9.47
darat2	-0.0163443	-4.51	-0.0163759	-4.52
ocaprat	-0.7173559	-11.87	-0.7204153	-11.92
ss	7.5123060	22.67	7.4631300	22.61
_cons	-0.0698154	-1.01	-0.4007013	-4.54
Diagnostic Test				
Number of observation	26195		26915	
Number of groups	33		33	
R-sq: within	0.7299		0.7299	
between	0.4554		0.4564	
overall	0.6123		0.6124	
F test that all u_i=0:	F(32, 26156) = 527.74 Prob>F = 0.0000			
sigma_u	0.3940		0.3103	
sigma_e	0.6337		0.6337	
rho	0.2788		0.1934	
Breusch and Pagan Lagrangian multiplier test for random effects:	chi2(1) = 1.1e + 07 Prob > chi2 = 0.0000			
Hausman specification test	chi2(6) = 22.06 Prob>chi2 = 0.0012			