第 1 講　パネルデータ分析の考え方

1.1　はじめに

近年、パネルデータが利用可能になり、実証研究でも盛んに使われるようになってきた。パネルデータ分析の手法についても日々新たなアプローチが提案されている。パネルデータ分析に関する主要な文献としては Maddala(1993)、Mátyás and Sevestre (1996)、Hsiao(2003)、Baltagi(2001)、Lee(2002)、Wooldridge(2002a), Arellano(2003) などを挙げることができるが、*Journal of Econometrics*、*Econometrica* などではパネルデータ推定に関する論文が頻繁に掲載されている。また、Greene(2000)、Maddala(2001)、Johnston and DiNardo(1997)、Woolridge(2000a) などの計量経済学の教科書でもパネルデータ分析の手法が紹介されるようになってきている。さらには、*Handbook of Econometrics* (North-Holland) には Chamberlain (1984) と Arellano and Honoré (2001) の 2 本のパネルデータに関するサーベイ論文が含まれている。

欧米と比べると、日本でのパネルデータ利用の歴史は浅く、日本語で書かれた研究書や展望論文、概説書は少ない。本章ではパネルデータ分析の考え方とその意義、統計的基礎について論じる。その中で強調しておきたいのは、パネルデータは同一主体の時系列方向のデータが複数のクロスセクション・データとして入っているものであり、データとしてはクロスセクション・データの分析手法と時系列データの分析手法を組み合わせて使っているということである。従って、パネルデータ分析で用いられ統計手法として全く新しい統計手法があるわけではなく、既存の手法をパネルデータの特徴に合わせて改良したものだということである。このことは、既存の統計手法の問題点や論争点がそのままパネルデータ分析の方法にも持ち込まれてきていることも意味している。

1.2　パネルデータ分析の考え方とその意義

1.2.1　パネルデータ分析の考え方

パネルデータ分析の統計学上の一つの起源は、ガウス（Gauss, Carl Friedrich）、アイリー (Airy, George Biddell)、ポアンカレ (Poincaré, Henri) などによる天文観測の観測誤差の理論にある。ガウスは『誤差論』の中で「不規則で偶発的な誤差と規則的で定数的な誤差があり、規則的誤差の原因は念入りに捜し出し、それらの原因を取り除くかあるいは少なくともそれらの効果と大きさを調べ、それによる個々の観測への影響を確かめ、あたかも誤差が全く存在しなかったように修正することは観測者の仕事である。ところが、不規則的誤差の本質はこれとは完全に異なるものである。それはその性質上計算に

よって左右されることはない。したがって観測においてはこれをやむをえないこととするが、組み合わせをうまく行って、それの観測から導かれる量への影響をできるだけ弱めなければならない」(p.2) と述べている。

ガウスは、このような偶発 (確率) 的誤差が正規分布によって適切に表現されることを示し[1]、誤差をコントロールしたうえで最適観測値を予測する手法として**最小二乗法**を導出した[2]。

ガウスは規則 (系統) 的誤差は原則的に取り除くべきであるという考え方を持っていた。これは科学的実験においては系統的誤差を減少させるべきであるという原則に結びついていった。

今ひとつの起源は、近代統計学の生みの親であるフィッシャー（Fisher, Ronald A.）の一連の研究（1932, 1971, 1973a, 1973b)、とりわけ分散分析にある。分散分析とは、ある処理を与えた処理群（treatment group）と対照群（controll group）を比較して、処理の効果を明らかにするための手法であり、二つの群の分散を比較するという検定を行うことから分散分析と呼ばれている。フィッシャーはこのアプローチを広い意味で**実験計画法**の中で用いている。

実験計画法とは目的の結果を導出するために、実験をいかに効率的に計画するかという問題にかかわるものであり、実験結果を左右するような因子を適切に選び出しそれを組み合わせ、個々の因子の影響を抽出できるような実験を、なるべく効率的に行うように実験をデザインするということである[3]。フィッシャーはこのような実験計画に関して 3 原則を提唱している。それは、(1) 反復、(2) 無作為化、(3) 局所管理である。第一に、1 つの処理に対してもデータはばらつくので、そのばらつきを評価できるように何度か同じ処理に対して実験を行う必要がある、第二に系統的な誤差を確率的な誤差に転化するために実験を無作為化する必要がある、第三に、実験全体の無作為化や均一化が難しい場合には、局所的に均一化するような管理が必要になる。

フィッシャーは、ガウス以後の実験方法とは逆に、系統的誤差を取り除くのではなく、誤差を統計的に管理することを目指し、そのことを通して精度が保証された誤差の推定を重視したのである。[4]

ところで、経済は一般に管理実験ができない。とすれば実験計画法がどのように役立つのだろうか。我々の考えではパネルデータ分析とは、パネル経済データをあたかも実験データのように扱う点に特徴がある。すなわち、経済には様々なショックや確率的な変動が連続的に生じており、分析対象としたい経済関係に与える影響を様々な因子（要因）に分類してコントロールし

[1]ガウス分布　ガウスは天文学の観測データを数学的に分析するに際して、データの測定誤差がある基本的な法則に従うことを仮定して誤差理論を確立した。この基本的法則というのが誤差関数 (error function) であり、今日正規分布と呼ばれているものの原型である。

[2]統計学説史上はフランスのルジャンドル (Legendre, Adrian Marie: 1752-1833) が『彗星軌道の決定のための新方法』(1805) の中で、最小二乗法という概念をはじめて導入したことが知られている。ガウスは最小二乗法を扱った『円錐曲線を描いて太陽の周囲を回る天体運動論』を 1806 年にドイツ語で脱稿しながら、諸般の事情でラテン語で出版されたのが 1809 年になってしまった。その後、ルジャンドルとガウスの間で、最小二乗法をはじめに考えたのは自分だという主張が書簡を通して交わされた。この間の詳細については安藤（1995）を参照されたい。

[3]以下の議論は広津（1992、第 1 章）を参照している。

[4]芝村良（2004)『R.A. フィッシャーの統計理論』、(九州大学出版会) 第 1 章を参照。

た上で、分析するという意味で実験計画法の手法が利用できるのである。具体的には、以下で論じる**誤差構成要素モデル**(erro components model) とは、誤差項を純粋な撹乱項とそれ以外の因子による誤差を分離しようとするものであり、こうすることによって、無作為化と局所管理ができることになる。現実の経済データをあたかも管理実験データであるかのように扱い、その結果、様々な属性をもった heterogeneous な主体それぞれの属性をコントロールしながら、最も関心の高い説明変数の被説明変数への効果を抽出することができるようになるということである。

図表 1.1　パネルデータの構造

パネルデータの基本構造は図 1 で表せる。**プーリング・データ**とは時系列、クロスセクションのデータを全て合体して全ての変数が共通の母集団から発生していると考えて、データを一括して扱うケースである。**ビトウィーン・データ**とは、プーリング・データに近い考え方だが、時系列方向に個別主体毎の平均を取り、それをクロスセクション・データとして分析するものである。このデータの扱い方は一回限りのクロスセクション・データでは個別主体が特定の時間効果を受けているために推定にバイアスがかかる恐れがあるが、個別主体について時系列方向で何回分かのデータ集めて平均をとれば、そのような特定時点の効果を緩和することができるという考え方に基づいている。このデータでは時系列方向の変動ではなく、個別主体間の違いを見ることに主眼をおいたものである。それに対して、時系列データあるいはウィズイン・データとは個別主体毎の時系列方向のデータのみを扱うもので、データが時系列内で大きく変動する場合には、プーリング・データやビトウィーン・データとして扱うことは出来ない。

このような関係を数式で表すと次のようになる。

$$y_{it} = \alpha + X_{it}^{'}\beta + u_{it} \quad i = 1, ...N;\ t = 1, ...T \tag{1}$$

ここで i は個別経済主体（例えば、個人、家計、企業、国家）を表し、クロスセクション方向の情報であり、ｔ は時間を表し、時系列方向の情報を与える。誤差に関して一般的な**二元配置誤差構成要素**（two-way error component）モデルを想定する[5]。

$$u_{it} = \mu_i + \lambda_t + \nu_{it} \tag{2}$$

ここで、μ_i は観察不可能な経済主体独自の個別効果を表し、λ_t は観察不可能な時間効果、ν_{it} は撹乱項を表す。$\lambda_t = 0$ の場合は、(2) 式は**一元配置誤差構成要素**(one-way error component) モデルととなる。

$$u_{it} = \mu_i + \nu_{it} \tag{3}$$

[5]原理的には n 次元配置誤差構成要素モデルを考えることは可能だが（例えば、個別主体、時間、地域、コーホート、産業などの誤差要素が考えられる)、計量経済学の標準的な説明としては二元配置モデルを扱うのが一般的であので、ここでもそれに従っている。

(1) 式のようなモデルに対して、先ず、利用可能なデータをクロスセクション、時系列に関係なく無差別にプーリングした上で **OLS 推定**を行う (pooling estimation)。これは全ての経済主体が同じ定数項、同じ傾きを持つと仮定しているモデルであり、個別の異質性、ダイナミズムは存在しないことを意味する。第二に、経済主体の異質性を考慮して、モデルの傾きは同一だが、定数項がそれぞれの主体で異なっているという**一元配置固定効果推定法**（one-way fixed effect estimation）で推計してみる。この場合、固定効果としてダミー変数が入ってくるので、**最小二乗ダミー変数モデル**(Least Squares Dummy Variable Model ; LSDV) と呼ばれる推定方法を用いる。第三に、定数項が個別に固定的なものというよりランダムに決まっていると考えると**一元配置ランダム効果推定法**(one-way random effect estimation) を用いる。ここでは個別ランダム効果が説明変数と無相関であることを仮定して、誤差項の分散共分散行列を勘案して、変換した $y_{it} - \theta\overline{y}_i$ を $X_{it} - \theta\overline{X}_i$ 上で回帰する**一般化最小二乗法**(Generalized Least Squares; GLS) を用いる。ここで θ は個別ランダム効果と攪乱項の加重比を表す。第四に、一元配置固定効果推定法や一元配置ランダム効果推定法のそれぞれに、年毎に生じた共通のショックの効果を取り除くために時間（年）ダミーを導入することもある。これらはそれぞれ、二元配置固定効果推定法と二元配置ランダム効果推定法と呼ばれる。これはサンプル期間中に生じた経済全体に影響を与えた景気循環や構造変化などの影響をコントロールしようとするものである。このようにモデルを拡張していき、それぞれのモデルが与えられたパネルデータにどのように適合するかを検定して、適切にパネルデータを利用することが重要になってくる。

1.2.2 統計的意義

Baltagi(2001) や Hsiao(2002) はパネル調査の一般的利点として次のような点を挙げている。

（1）パネルデータには時系列データやクロスセクションデータだけではコントロールできない個体別の多様性が含まれており、それをコントロールすることで標本に含まれる共通の効果を知ることができる。

（2）パネルデータは膨大なクロスセクションデータを複数年にわたって結びつけたものであり、その情報量は極めて大きい。これによって、多重共線性の問題は解消され、推計上の自由度は増し、推計の不偏性は向上する。

（3）パネルデータを用いることによって、異時点間の最適化行動をミクロレベルで捉えることができる。

（4）個票を用いた調査にはマクロの集計誤差やバイアスは含まれていない。

同時にパネル調査の限界あるいは問題点として次のような点が挙げられている。

（１）パネル調査に限られたことではないが、標本抽出の問題は大きい。どのような基準で標本を選んでも、回答拒否に一定の傾向があれば、サンプル・セレクッション・バイアスが生じることになる。調査の中でどれぐらい記憶に頼るかでも回答に含まれる誤差が違ってくる。また調査の頻度や調査期間も統計の質に影響を与える。

（２）ある経済行動を選択しない（例えば労働供給をしない）という自己選択 (self selectivity) を行えば、その選択を行っていた場合に得られるであろう潜在的経済的成果（例えば賃金）はデータには現れてこないという問題はどうしても避けられない。

（３）回答拒否 (non-response) や脱落サンプル (attrition) も不可避である。

（４）クロスセクション方向の標本数に比べれば、時系列方向の観察点は極めて短い。

これらの問題はパネル調査の重要性を否定するものではなく、むしろこれらの問題に対する様々な対応策がパネルデータ分析の手法の改善につながっているのである。

欧米諸国では、これまで多くのパネル調査が行われてきており、それらのデータを使った極めて実用的な実証研究が数多く発表されてきている。以下では諸外国のパネル調査の実態を概観しておこう。

アメリカでは、ミシガン大学が Panel Study of Income Dynamics (PSID) として 1968 年に 4802 家計（約 31000 人）に対して、毎年、所得・社会扶助受給・税金・世帯内移転・家族構成・労働供給・住宅・人種・健康状態などの社会経済変数（累積約 5000 変数）に関する様々な質問を行ってきた。

オハイオ州立大学とアメリカ連邦政府統計局による National Longitudinal Surveys of Labor Market Experience (NLS) は 5 つの人口階層別に調査を行っている。すなわち、(１)1966 年時点で 45-49 歳であった男性 (5020 人)、(２)1966 年時点で 14-24 歳であった男子（5225 人）、(３)1967 年時点で 30-44 歳であった女性（5083 人）、(４)1968 年に 14-21 歳であった女子 (5159 人)、(５)1979 年に 14-24 歳であった若年男女、このサンプルは NLSY79 と呼ばれ、1986 年には彼らの子供も含まれるようになった。また追加的に 1996 年に 12-16 歳の若者が 1997 年調査から NLSY97 として加えられた（12686 人)。経済変数としては学歴、職歴、結婚・出産、教育投資、育児補助、薬物使用、アルコール依存など労働供給サイド側の様々な情報が含まれている。

カナダでは 1993 年からカナダ統計局 (Statistics Canada) が 15000 家計（約 31000 人）を対象に The Canadian Survey of Labor Income Dynamics (SLID) を集めはじめた。

ヨーロッパには、1984 年からドイツの 5921 家計を調査している The German Social Economic Panel、1985 年からベルギーの 6471 家計について調査している The Belgian Socioeconomic Panel、フランスで 1985 年より 715 家計（後に 2092 家計に拡大）を対象としている The French Household Panel がある。

ハンガリーでは 2059 家計を対象に The Hungarian Household Panel (1922-96)、イギリスでは 1991 年から 5000 家計を対象に The British Household Panel Survey (BHPS) が毎年調査を行っている。オランダでは The Dutch Socio-Economic Panel (ISEP) が 1984-97 年にオランダ統計局によって調査され、ロシアでは 1992 年に The Russian Longitudinal Monitoring Survey (RLMS) が経済改革の効果を調査する目的で行われた。スイスでは 1999 年から 5074 家計（7799 人）を対象に The Swiss Household Panel (SHP) が集められている。ルクセンブルグでは 1985 年より 2012 家計（6110 人）を対象に The Luxembourg Panel Socio-Economique “Liewen zu L・zebuerg” (PSELL) が調査されはじめ、1994 年には対象が 2978 家計（8232 人）に拡大された。

欧州委員会統計局（EuroStat）は 1994 年より The European Community Household Panel (ECHP) を集めている。オーストリア、フィンランド、スウェーデンを除く欧州連合加盟国を対象に調査されている。ECHP はヨーロッパ各国の既存のパネル調査と統合され、国際比較可能なデータベースとして整備されつつある。

1.3 パネルデータ分析で用いる推測統計の考え方

パネルデータ分析で用いる統計学上の分析手法は多岐にわたっているが、その起源は推測統計の成立と期を一にしている。現代の科学的思考方法として、事前に法則を演繹して、それから個別の事象を推察するのではなく、幾つかの事象を集めて、そこから法則を帰納しようというものがあって当然である。これは結果から原因を導き出そうというもので、逆確率の方法と呼ばれる。この考え方を推測統計問題に持ち込んだのがトーマス・ベイズ（Bayes, Thomas）である。彼は確率法則を用いて、実験の観測結果からその結果をもたらした母集団特性に関して推測するという帰納法を提示した。[6]

ベイズの逆確率に基づく統計的推測方法はフィッシャーによって、（1）確率概念が主観的であり、（2）事前分布の設定も恣意的である、といった理由から、厳しく批判され、一時期はそれほど用いられなくなった。フィッシャーは後述するように事前確率ではなく、尤度という概念を用いて推測統計を構築していった。また、ベイズの理論は 1950 年代にサベージ (Savage, Leonard J) らによって主観的確率に基づくベイズ理論として再構築され、ゼルナー

[6]ベイズの定理（Bayes’ theorem）。A が得られた結果 $H_1, H_2, \ldots H_k$ を原因とする。われわれが知りたいのは A が起こったときに原因が H_i である確率すなわち $P(H_i \mid A)$ であるが、われわれが知ることができるのは原因に対する**結果の確率**$P(A \mid H_i)$ である。ベイズの定理は結果に対する**原因の確率**$P(H_i \mid A)$ を計算する公式を与える。

$H_1, H_2, \ldots H_k$ は互いに背反で、かつ $H_i \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k = \Omega$ のごとく全ての場合をつくしているとする。このとき、規則

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{sum\{P(H_j) \cdot P(A \mid H_j)\}}$$

が成り立つ。ここで $P(H_i)$ は H_i の事前確率（prior probability）、$P(H_i \mid A)$ は事後確率（posterior probability）と呼ばれる。

(Zellner, Arnold) などを経て、現在では確固たる一分野を形成している[7]。

以下ではパネルデータ分析で用いる推計方法の基礎的な考え方を歴史的な流れの中で解説しておきたい。このような歴史的流れをたどることで、現在の推計方法を巡る論争の理解が深まると考えるからである。

1.3.1 最小二乗法

前述のように、ガウスが天文観測に関わるデータ分析の中から導出した線形モデルの統計的推計方法が最小二乗 (Ordinary Least Squares; OLS) 法である。

ここで、観察されたサンプル $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ が平均 μ_Y、分散 $var(Y) = \sigma_Y^2$ に従う分布から発生したと考えよう。サンプルは次のような線形モデルに従っていると考えられる。

$$Y_i = \mu_Y + \varepsilon_i \quad E(\varepsilon_i) = 0,\, var(\varepsilon_i) = \sigma_Y^2$$

$E(Y_i) = \mu_Y$、誤差の流列は次のように表せる。

$$e_i = Y_i - \mu_Y \quad i = 1, \ldots, n$$

これを最小化するように μ_Y を選ぶ。すなわち、

$$\min \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \min \sum_{i=1}^{n} (y_{i-}\mu_Y)^2$$

これが最小二乗法であり、残差平方和 (sum of squared errors, SSE) を μ_Y で微分すると

$$\frac{\partial SSE}{\partial \mu_Y} = \frac{d\sum_{i=1}^{n}(y_{i-}\mu_Y)^2}{d\mu_Y} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu}_Y) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{\mu}_Y \Rightarrow \hat{\mu}_Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$$

ここではサンプル平均 $\hat{\mu}_Y$ が最小二乗法推計値となっていることを意味している。この推計が最良線形不偏推定量 (Best Linear Unbiased Estimator; BLUE) であることは**ガウス・マルコスの定理**（Gauss-Markov's theorem）として知られている。

最小二乗法は今日、計量経済学で最も頻繁に使われる推計方法であり、パネルデータ分析でもデータをすべてプーリングして回帰分析する際には最小二乗法を用いている。

[7]最近の参考文献としては Koop(2003) や Lancaster(2004) を挙げておきたい。

1.3.2 操作変数法

連立方程式を解いてパラメータを推計するという作業は計量経済学ではよく行われている。また経済理論上、経済変数が同時に決定されるということもよくある。このような場合には変数の内生性を考慮した推計が必要になる。操作変数法はそのような問題に対処するための推計方法である[8][9]。

操作変数法の最も簡単な説明は次のようなものである。

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + u \tag{4}$$

ここで x が外生変数ではなく、u と相関しているとすれば、次のような関係が見出される。

$$Cov(x, u) \neq 0 \tag{5}$$

この場合、パラメータ β_0 と β_1 の推計値は x の内生性のために一致推定にはならない。そこで、x とは相関しているが、u とは無相関な変数 z を導入する。

$$Cov(z, u) = 0 \tag{6}$$

$$Cov(z, x) \neq 0 \tag{7}$$

この変数 z に相当するものが内生変数 x に対する操作変数と呼ばれるものである。ここで $Cov(z, u) = 0$ を直接テストする方法はないが、$Cov(z, x) \neq 0$ をテストするには、次の式を推計してパラメータ π$_1 = 0$ を検定すればよい。すなわち、

$$x = \pi_0 + \pi_1 z + v \tag{8}$$

ここで $\pi_1 = Cov(z, x)/Var(z)$ であるので、(7) 式が成立するためには、$\pi_1 \neq 0$ であることが必要十分条件となるのである。

ところで、操作変数を用いた (4) 式の推計値は次のように表せる。

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})(x_i - \bar{x})} \tag{9}$$

[8]操作変数法に関する基本文献は Bowden and Turkington (1984) である。Wooldridge (2003) の 15 章は簡便で包括的な導入になっている。本節でも Wooldridge(2003) を参照している。

[9]操作変数法をはじめて導入したのは Philip G. Wright(1928) の補論 B であるとされているが、この補論を誰が書いたかは明らかではなかった。最近、Stock and Trebbi (2003) が統計的な文献鑑定法を用いて、遺伝子統計学者であり Philip Wright の長男であった Sewall Wright が書いたのではないかという議論に対して、文献鑑定法によれば Philip Wright が書いたものであるという結論を導いた。

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \tag{10}$$

ここで $z = x$ であれば、推計値は最小二乗法と一致する。上の (6) 式、(7) 式が満たされるとすると、操作変数法による推計パラメータは一致推定となる。すなわち $p\lim(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ となる。もし、(6) 式か (7) 式が満たされない場合は推計パラメータは一致推計とはならない。とりわけ、x と u が相関していれば、推計パラメータはバイアスを持つ。特に標本数が少ない場合にはかなり大きなバイアスを持つことが知られている。

実証研究上、適切な操作変数を見つけることは極めて難しいことが知られている[10]。とりわけ z と x の相関が弱い場合には問題がある。変数 z と誤差項 u が相関している場合の操作変数法による推計値の確率極限は次のように表せる。

$$p\lim \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{Corr(z,u)}{Corr(z,x)} \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_x} \tag{11}$$

σ_u と σ_x は、u と x に関する標準偏差である。問題は例え、$Corr(z,u)$ が小さくても、$Corr(z,x)$ も小さければ操作変数による推計値 $\hat{\beta}_1$ は大幅な不一致推定となるということである。現実的に考えて、操作変数を用いるよりも最小二乗法を用いた方が不一致性の程度が低くなることもあり得る[11]。

ここまでは一部の説明変数が内生変数である時の対処法として操作変数法を論じてきたが、実証上は内生変数であるかどうかを検定することも大切であろう。次のようなモデルで説明変数 y_2 の内生性の疑いがある時を考えよう。

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + \beta_2 z_1 + \beta_3 z_2 + u_1 \tag{12}$$

ここで z_1 と z_2 は外生変数であり、他に操作変数として z_3 と z_4 を考えることができる。この時、上の式を最小二乗法と操作変数法で推計し、パラメータが有意に違うかどうかを Hausman (1978) に従ってカイ二乗検定することによって、説明変数 y_2 が内生であるかどうかを確かめることができる[12]。

別の方法としては説明変数 y_2 が内生変数であると仮定して次のような式を推計する。

$$y_2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 + v_2 \tag{13}$$

先に仮定したように z_j は u_1 とは無相関であるので、v_2 が u_1 と無相関であれば、y_2 も u_1 とは無相関になる。ということは次の式でパラメター δ$_1 = 0$ が y_2 も u_1 とは無相関のための必要十分条件になる。

[10] 原則としては最適な操作変数とは（6）（7）式の制約を満たし、かつ（4）式の真のパラメータと（9）（10）式の操作変数法による推計パラメータの差を最小にするものである。

[11] これは Weak Instrumental Variables の問題として知られており、Staiger and Stock (1997)、Nelson and Sartz (1990) らの他に Gary Chamberlain、Jerry Hausman、Christopher Sims らも問題提起をしている。

[12] 一般的には Durbin-Wu-Hausman test あるいは Wu-Hausman test として知られている。Bowden and Turkington (1984, pp.50-52) や Davidson and MacKinnon (2004, pp.338-340) を参照。

$$u_1 = \delta_1 v_2 + e_1 \tag{14}$$

これを直接検定する方法はないので、(13) 式を最小二乗法で推計し、残差として $\hat{v}$ を計算し、これを (12) 式に代入し最小二乗法で推計する。

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 y_2 + \beta_2 z_1 + \beta_3 z_2 + \delta_1 \hat{v}_2 + \varepsilon \tag{15}$$

t 検定で δ$_1 = 0$ が棄却されれば、y_2 は内生変数であるということになる。

過剰識別制約とは操作変数の数 (l) が、内生変数の数 (k) を超えている分 ($l - k$) を過剰識別制約と呼び、この過剰な操作変数を使って、操作変数と (4) 式で表わしたようなもともと推計したい式の誤差項との相関を検定する ((6) 式の検定) ことができる。これは**過剰識別制約テスト**と呼ばれているもので、考え方は次のようなものである。

(1) まず、(4) 式を内生変数と同数の操作変数を用いて推計し、誤差 $\hat{u}$ を計算する。

(2) 誤差 $\hat{u}$ を被説明変数として、全ての操作変数 (l) を含む全ての外生変数を用いて最小二乗法推計する。決定係数 R^2 を計算する。

(3) 全ての操作変数が誤差 $\hat{u}$ と無相関であるという帰無仮説は次の統計量で検定できる。

$$nR^2 \sim \chi^2(l - k) \tag{16}$$

この帰無仮説が棄却されれば、操作変数の内、少なくともいくつかは外生変数ではないことが判明する。操作変数を無暗に増やすことは、推計にバイアスをもたらす危険性があるので、過剰識別制約テストを行ってチェックすべきである。

1.3.3 積率法

積率法あるいはモーメント法 (Method of Moments) として知られている統計的推計方法はピアソン (Pearson, Karl) によって提唱されたものである。考え方は、大量の観測値があるとすれば、標本のモーメント（平均、分散等）が母集団のモーメントに確率的に収束すると考え、すなわち、母集団分布のモーメントが標本モーメントに近似的に等しいと見なして、推定すべきパラメータ数だけ標本モーメントを連立させて方程式を解き、その推定量とするというものである。

良く指摘されるように、ピアソンは大量の標本を集めることで標本＝母集団と考え、その統計的性質をいかに記述するかということに関心があり、この積率法にもその考え方が反映されている。

この方法を形式的に記述すると次のようになる。母集団が $f(x \mid \theta)$ という密度関数に従っており、θ が未知のパラメータであるとする。母集団から抽

出されたサンプルの期待値は次のように表せる。

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x \mid \theta)dx = g(\theta) \tag{17}$$

すなわち、期待値 $E(x)$ は θ の関数として表せる。これを θ について解くと、

$$\theta = g^{-1}(E(x)) \tag{18}$$

$E(x)$ の代わりにサンプル平均 $\bar{x}$ を代入してやると、

$$\hat{\theta} = g^{-1}(\bar{x}) \tag{19}$$

となる。

もしサンプルが母集団からの無作為抽出であるとすれば、$\hat{\theta}$ は θ と一致すると考えられる。

ピアソンはこのようにして導かれたパラメータが母集団が形成しているであろう理論値にいかに適合しているかを検定する目的でカイ二乗適合度検定を提唱した。ピアソンにとっては検定は仮説の真偽を判断するために行うものではなく、標本から得られたパラメータが母集団の理論値に近いかどうかを確かめるために行うものであった[13]。

積率法を現代的に拡張したのが**一般化積率法**(Generalized Method of Moments; GMM) である[14]。この方法は未知のパラメータ θ を推計するのに標本モーメントの数が未知パラメータの数より多い場合、すなわち θ が過剰識別 (overidentified) されている場合に用いられる[15]。

p 個の未知パラメータ θ を q 本の方程式を用いて推計値を求めるということである。この場合、適度識別ではないので、統計的に 2 次式のモーメント関数 $Q(\theta)$ を最小化することによってパラメータ θ を求めることになる。

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{GMM}} \equiv \arg\min_{\theta} Q(\theta) \tag{20}$$
$$Q(\theta) = f(\theta)' A f(\theta)$$

ここで、A は加重行列 (weighting matrix) であり正値定符号対称行列を考えている、$Q(\theta) \geq 0$ かつ、$f(\theta) = 0$ の時（適度識別の時）、$Q(\theta) = 0$ となる。$E(f(\theta)) = 0$ が q 本のモーメント条件を表わし、$f(\theta)$ が標本から得られたモーメントを表わしている。

一般化積率法は文字通り、様々な推計方法を包括した一般的な推計法である。具体的には、この方法は古典的積率法、最小二乗法、非線形最小二乗法、

[13] フィッシャーはピアソンのカイ二乗適合度検定の意義を高く評価していたが、自由度という概念を導入して、カイ二乗検定を改善する必要があることを指摘した。
[14] この手法は Hansen(1982) と Hansen and Singleton(1982) を嚆矢とする。
[15] ここでは、操作変数法で論じた過剰識別制約テストを行う必要がある (Hansen(1982))。

一般化最小二乗法、操作変数法などを特殊形式として含む推計方法であるといえる。フィッシャーは彼の提唱した推定量が持つべき特性、すなわち、一致性、十分性、有効性のうち、積率法は常に有効であるとは限らないので問題があると指摘したが、その問題は一般化積率法にも当てはまる。しかし、積率法は以下で説明する最尤法が関数型を特定化しなければならないのに対して、モーメント条件だけを使っているので簡便であり、計算も簡単になっている。また、最尤法も必ずしも不偏推定量を与えないという意味でも完全に積率法より優位な推計方法とは言えない。第４章のダイナミック・パネル分析では、この最尤法と一般化積率法を用いた推計方法が論じられるが、そこでもピアソンとフィッシャーが対立した問題が残っていることが示される。

1.3.4 最尤法

最尤法の考え方はガウスやベルヌーイに見られることは知られているが、最尤推定量の漸近的有効性を最初に証明したのはエッジワース (Edgeworth, Francis Ysidro) である。しかし、尤度や最尤法などの概念を導入し、推計方法を体系立てたのはフィッシャーである[16]。パネルデータ分析で最尤法が用いられるのは主として第 5 章で論じる質的従属変数モデルにおいて用いられる非線形関数の推計においてである。線形関数の場合は、最尤法推計は最小二乗法推計と一致する。

標本データ $\mathbf{y} = (y_1, \cdots y_n)\prime$ を所与として、未知母数 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_p)'$ の関数を尤度（likelihood）とよび $L(\theta)$ と表す。[17]ここで尤度 $L(\theta)$ を最大にする θ の値 $\tilde{\theta}$ は最尤推定量（maximum likelihood estimator）と呼び、標本データで評価したときに最大確率を起こりうる θ を推定したことになる。$L(\theta)$ の代わりに対数をとった $logL(\theta)$ を最大にしても、最尤推定量 $\tilde{\theta}$ は推定できる。この場合、

$$\frac{\partial \log(L\theta)}{\partial\theta} = 0 \tag{21}$$

を満たす。

接片ゼロの単回帰モデルを考える。

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, \cdots, n \tag{22}$$

ここで誤差 ε_i は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとすると、対数尤度は次のように表せる。

[16]統計学説史上では、フィッシャーがエッジワースの功績を不当に無視し、最尤法推計の先駆的研究を隠蔽してしまったという議論が出てきている。Pratt (1976) 参照。またエッジワースの統計学における業績の簡便な要約は蓑谷（1997、pp.108-116）を参照されたい。また最尤法の統計的性質に関しては Silvey (1970)、Cox and Hinkley (1974)、細谷 (1995) などを参照されたい。

[17]本節は東京大学教養学部統計学教室（編）『自然科学の統計学』（東京大学出版会、1992）第４章を参照している。

$$\log L(\beta) = \log\left[(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{y}-\beta\mathbf{x})'(\mathbf{y}-\beta\mathbf{x})}{2\sigma^2}\right\}\right] \quad (23)$$
$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}-\beta\mathbf{x})'(\mathbf{y}-\beta\mathbf{x})$$

これを最大化する β は最小二乗解になる。また最尤推定量は

$$\tilde{\beta} = \hat{\beta} = \mathbf{x}'\mathbf{y}/\mathbf{x}'\mathbf{x} \quad (24)$$

となる。

ここで $\log L(\beta)$ の 2 階微分

$$\frac{\partial^2 \log(L\beta)}{\partial\beta^2} = -\mathbf{x}'\mathbf{x}/\sigma^2 \quad (25)$$

は β^2 の係数であり、対数尤度関数 $\log L(\beta)$ の項点の曲率を表す量となっている。別の言い方をすれば、$\tilde{\beta}$ の推定量の分数に関する情報を表しており、**フィッシャー情報量**$I(\theta)$ と呼ばれている。これは対数尤度の 2 階微分は標本 $\mathbf{y}$ に依存するので、$\mathbf{y}$ が密度関数 $f_\theta(y)$ に従っているとき、期待値を取ると

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{\partial^2 \log L(\theta)}{\partial\theta^2}\right\} \quad (26)$$
$$= -E\left\{\frac{\partial^2 \log f_\theta(\mathbf{y})}{\partial\theta^2}\right\}$$

と表わすことができる。

最尤法による不偏推定量の分散の下限は、フィッシャー情報量 $I(\theta)$ を用いて次のように表せる。

$$V\{t(\mathbf{y})\} \geqq \frac{1}{I(\theta)} \quad (27)$$

これを**クラメール・ラオの不等式**と呼び、右辺を**クラメール・ラオの下限**とも呼ぶ。クラメールラオの下限をとる不偏推定量は有効推定量という。

最尤法では、パラメータ θ の有意性の検定に Z 値を使う。これはパラメータの分布が帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$ の下で $\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta_0)$ が漸近的に正規分布 $N(0, 1/I_1(\theta_0))$ に従うことを利用して、$\theta_1 > \theta_0$ の場合に棄却域

$$\sqrt{nI_1(\theta_0)}(\tilde{\theta}-\theta_0) > Z_\alpha \quad (28)$$

として計算したものである。ここで $I_1(\theta) = I(\theta)/n$ はデータ 1 個あたりのフィッシャー情報量であり、Z_α は標準正規分布の上側確率が α となる水準を表している。

また最尤法では帰無仮説が複数の制約式からなる場合、Z 値ではなく、カイ二乗分布に基く**尤度比検定**を行う。

ここで帰無仮説 $H_0 : \theta = \theta_0$、対立仮説 $H_1 : \theta \neq \theta_0$ とすると、H_0 下では、最尤推定量を θ_0 と漸近分散で規準化したものの二乗は、漸近的に自由度 1 のカイ二乗分布 $\chi^2(1)$ に従うので次のような関係が成り立つ。

$$2 \log \frac{L(\tilde{\theta})}{L(\theta_0)} > \chi^2_\alpha(1)(= Z^2_{\alpha/2}) \tag{29}$$

これは尤度比検定の棄却域 $\chi^2_\alpha(1) = Z^2_{\alpha/2}$ を表している。

代替的な検定としては**ワルド検定**(Wald Tests) がある。ワルド検定は無制約モデルのパラメータの分散行列を用いて、r 個の制約式 $r(\theta) = 0$ が成り立つかどうかを検定しようとするものである。具体的には $r(\theta)$ の 2 次関数を無制約モデルのパラメータの分散の逆行列で評価したものである。

$$Var(r(\hat{\theta})) \approx R(\theta_0)Var(\hat{\theta})R'(\theta_0) \tag{30}$$

ここで $R(\theta)$ は要素を $\partial r_i(\theta)/\partial\theta_i$ とする $r \times k$ 行列である。無制約モデルのパラメータを用いた推計量 $\widehat{Var}(\hat{\theta})$ を代入して、次のようなワルド統計量が定義できる。

$$W = r'(\hat{\theta})(R(\hat{\theta})\widehat{Var}(\hat{\theta})R'(\hat{\theta}))^{-1}r(\hat{\theta}) \tag{31}$$

この統計量は帰無仮説を $H_0 : \theta = \theta_0$ とした時に、漸近的にカイ二乗分布 $\chi^2(r)$ に従うことが知られている。しかしワルド検定はパラメータに対する制約のかけ方によって統計量が違ってくるなどの問題があり、必ずしも安定的な検定量とはなっていない。

もう一つの検定方法は**ラグランジュ乗数検定**(Lagrange Multiplier Tests) である。この検定は対数尤度関数 $l(\theta)$ を制約式 $r(\theta) = 0$ の下での最大化問題から導かれる。すなわち、次のような式を θ に関して最大化する。

$$l(\theta) - r'(\theta)\lambda \tag{32}$$

一階条件は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} g(\tilde{\theta}) - R'(\tilde{\theta})\tilde{\lambda} &= 0 \\ r(\tilde{\theta}) &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

ここでラグランジュ乗数 λ に関してラグランジュ乗数統計を次のように定義する。

$$LM = \tilde{\lambda}' R(\tilde{\theta})\tilde{I}^{-1}R'(\tilde{\theta})\tilde{\lambda} \tag{34}$$

この統計量も帰無仮説を $H_0 : \theta = \theta_0$ とした時に、漸近的にカイ二乗分布 $\chi^2(r)$ に従うことが知られている[18]。

[18] これら 3 つの検定方法のさらに詳しい統計的な比較検討は Davidson and MacKinnon (2004, 10 章) で与えられているので参照されたい。

最尤法は計量経済学の中では、もっとも広く利用されている推計方法であり、パネルデータ分析においてもよく用いられている。確率変数の関数型を特定する必要があり、それが必ずしも現実のデータに当てはまらないという限界はあるが、関数型が特定化されており、パラメータを推計できることは経済学的な解釈が行いやすいことも意味している。

1.4 分散分析

分散分析こそはパネルデータ分析の直系の祖先であり、その基本的な考え方は現在のパネルデータ分析の手法にも色濃く残っている。既に書いたように分散分析はフィッシャーが実験計画法の枠組みの中で考案した分析方法であり、誤差をいくつかの構成要素に分解して、それぞれの誤差を適切に管理しながら、共通の変数による効果を抽出するという意味で、パネルデータ分析と共通している。また、最近論じられるようになってきた、プログラム評価、政策評価の手法にも通じている[19]。

1.4.1 一元配置分散分析

3 つ以上の母集団平均 $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_a \quad (a \geq 3)$ の比較には分散分析（analysis of variance: ANOVA）を用いる。

実験結果に影響を及ぼすと考えられる変数を**因子**(factor) と呼び因子に対して与える条件を**水準**(level）と呼ぶ。因子と水準を組み合わせて実験を行うことを**処理**(treatment）と呼ぶ[20]。

因子を A、水準 $A_1, \ldots, A_a$ を、繰り返し数を $r_1, \ldots, r_a$ とすると、A_i 水準の j 番目のデータを y_{ij} とし次のモデルを想定する。

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots, a; \quad j = 1, \ldots, r_i \tag{35}$$

母数 μ_i は第 i 水準に固有な平均であり実験誤差 ε_{ij} はすべてお互いに独立に $N(0, \sigma^2)$ に従うものとする。

データの総数を $n = \Sigma r_i$ とし、繰り返し数 r_i の重みで μ_i の加重平均

$$\mu = \sum r_i \mu_i / n$$

を**一般平均**（grand mean）と呼ぶ。

[19] 本節は東京大学教養学部統計学教室（編）『自然科学の統計学』（東京大学出版会）第 3 章および広津（1992）に依拠している。日本語で読める実験計画法、分散分析に関するその他の参考文献としては奥野・芳賀（1969）を挙げておきたい。

[20] 処理の比較を目的とする実験では因子として取り上げていないさまざまな要因による**系統誤差**が比較に偏りを生じないように注意する必要がある。それには完全無作為化法（completely randomized design）や乱魂法 (randomized block design) などを用いる。これらの手法については奥野・芳賀（1969）が詳しい。

各水準から一般平均を引いたものが正味の**効果**(effect) である。

$$\alpha_i = \mu_i - \mu$$

ここで $\sum r_i \alpha_i = 0$
すると (30) 式は次のように書き換えることができる。

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots; \quad j = 1, \ldots, r_i \tag{36}$$

これは (共通の効果 μ)+（第 i 水準の効果 α_i）+（それ以外の誤差 ε_{ij}) という形式になっている。これを一元配置（one-way layout）モデルと呼ぶ。
分散分析とは因子 A の全ての水準の平均が等しいという帰無仮説

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_a$$
$$\text{あるいは} \quad H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_a = 0$$

を検定する方法である。
データに一元配置モデルをあてはめると残差平方和は

$$\begin{aligned} S_e &= \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \\ &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_i y_i^2 ／ r_i \end{aligned} \tag{37}$$

となり、$S_e ／ \sigma^2$ は自由度 $\nu_e = n - a$ のカイ二乗分布に従う。
仮説 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_a$ のもとで、モデル $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$ をあてはめたときの残差平方和は μ を総平均 $\bar{y}$ で推定して

$$S_T = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \bar{y}_i^2 ／ n \tag{38}$$

となる。
仮説 H_0 による残差平方和の増加分は

$$\begin{aligned} S_A &= S_T - S_e \\ &= \sum_i y_i^2 ／ r_i - y^2 ／ n \\ &= \sum_i r_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \end{aligned} \tag{39}$$

となる。
S_A と S_e は独立で自由度 $\nu_A = a - 1$ のカイ二乗分布に従う。
すると

$$F = \frac{S_A ／ \nu_A}{S_e ／ \nu_e} \tag{40}$$

が自由度 ν_A、ν_e の F 分布 (ν_A, ν_e) に従うことを利用して仮説検定を行うことができる。これを**分散分析検定**(ANOVA Test) と呼ぶ。(35) 式から明らかなように平均が等しいという仮説の検定を級間平方和 (S_A) に基づく分散 $(S_A ／ \nu_A)$ と誤差平方和 (S_e) に基づく分散 $(S_e ／ \nu_e)$ の比によって検定することから**分散分析**と呼ばれている。

1.4.2 バートレット検定

分散分析で仮定された等分散性を検定する方法に**バートレット検定**がある[21]。各水準の不偏分散を

$$V_i = \sum_i (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 ／ (r_i - 1) \quad i = 1, \ldots, a$$

としてそれらを併合したものを

$$V_e = \sum_c (r_i - 1) V_i ／ (n - a) = \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 ／ (n - a)$$

とすると、

$$B = (n - a) \log V_e - \sum_i (r_i - 1) \log V_i \tag{41}$$

が等分散仮説 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_a^2$ の下で近似的に自由度 $a - 1$ のカイ二乗分布に従うことを用いる。

このときカイ二乗の近似をよくするために次のように補正する。

$$B' = \frac{B}{1 + \frac{1}{3(a-1)} \left\{ \sum_i \frac{1}{r_i - 1} - \frac{1}{n-a} \right\}} \tag{42}$$

この検定は平均に関する F 検定のように一般的な対立仮説に対して良い検定である。またこの検定は繰り返し数がそろっていなくても用いることができるし、カイ二乗分布を用いて簡単に検定できる。

交互作用

2 つ以上の因子を取り上げる場合、各因子の単独の効果 (主効果 main effect) だけでなく、組み合わせによる効果にも注意を払う必要がある。とりわけ因子間で**加法性**が成り立たず**相殺効果**(交互効果) がある場合には重要である。

他因子の最適な水準組み合わせを決めるときに各因子別に最適水準を決めていきその集合を最適水準組み合わせとする方法を**単一因子実験**(one factor at a time experiment) というが、交互効果のある場合には因子の全ての水準組み合わせを考慮して最適組み合わせを求める実験 (これを**要因実験**(factorial experiment) という) を行う必要がある。

ただしこの実験では因子と水準のとり方によって実験回数が膨大な数になり実行不可能となることもあることに注意すべきである。[22]

1.4.3 二元配置分散分析

多因子要因実験を完全無作為化法で行うときそれを**多元配置**という。以下では因子 A、B の二つを考える二元配置モデルについて考えてみよう。

---

[21] 他の等分散性検定については広津 (1992,pp.122-1228) を参照されたい。

[22] このような実験組み合わせには直交表を用いて実験の回数を有効な限り最小限に切り下げることを行う。

水準組み合わせ A_iB_j での k 番目の観測値を y_{ijk} とする。AB の水準数を a, b、繰り返し数を r とする。

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk} \quad i = 1, 2, \ldots a; \quad j = 1, \ldots, b; \quad k = 1, 2, \ldots, r \tag{43}$$

μ_{ij} は水準組み合わせ A_iB_j の平均であり、実験誤差 e_{ijk} は独立して $N(0, \sigma^2)$ に従うとする。データ総数は $n = abr$ とする。

A の第 i 水準 A_i、B の第 j 水準 B_j、全体の効果をそれぞれ次のようにおく。

$$\bar{\mu}_i . = \sum_j \mu_{ij} / b, \quad \bar{\mu} ._j = \sum_i \mu_{ij} / a, \quad \mu \sum_i \sum_j \mu_{ij} / ab \tag{44}$$

μ を**一般平均**とする。A_i、B_j の効果から μ を引いた正味効果を主効果（main effect）と呼び次のように定義する。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \bar{\mu}_i . - \mu, \quad i = 1, \ldots a; \\ \beta_j &= \bar{\mu} ._j - \mu, \quad j = 1, \ldots b \end{aligned} \tag{45}$$

μ_{ij} のうち主効果と一般平均で表せない部分を因子 A, B の相互作用 (interaction) と呼び次のように表わす。

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \bar{\mu}_i . - \bar{\mu} ._j + \mu \\ i = 1, 2, \ldots a; \quad j = 1, 2 \ldots, b \end{aligned} \tag{46}$$

(38) に (41) を代入して

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{47}$$

これは (一般平均)+(因子 A の効果)+(因子 B の効果)+(因子 AB の交互作用)+(誤差) という形になっている。

ここで $\Sigma\alpha_i = 0$, $\Sigma\beta_j = 0$, $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0$, $j = 1, \ldots b$; $\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$, $i = 1, \ldots a$ である。

一元配置モデルの場合と同様平方和 S_A, S_B, S_{AB} の大きさを S_e を基準として判断するためにはそれぞれの自由度を考慮しなければならない。

自由度は

$$v_T = n - 1, \quad v_A = a - 1, \quad v_B = b - 1, \quad v_{AB} = (a-1)(b-1), \quad v_e = ab(r-1) \tag{48}$$

となり各平方和を自由度で割って平均平方を求める。

$$V_A = S_A / v_A, \quad V_B = S_B / v_B, \quad V_{AB} = S_{AB} / v_{AB}, \quad V_e = S_e / v_e \tag{49}$$

各仮説検定に用いられる F 統計量は

H_0: $(\alpha\beta)_{ij} \equiv 0$ の検定は $F_{AB} = V_{AB} / V_e$
H_0: $\alpha_i \equiv 0$ の検定は $F_A = V_A / V_e$ で表せる。
H_0: $\beta_j \equiv 0$ の検定は $F_B = V_B / V_e$

とりわけ第 1 の仮説は交互作用がないというものでありこれを最初に調べるべきである。

交互作用が有意でありかつ繰り返しのない二元配置モデルは次のように表せる。

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ij} \tag{50}$$

S_e の中に交互作用と誤差の情報が入り分離できなくなる。この場合には分散分析検定は誤る可能性が出てくる。

図表 1.1　パネルデータの構造